Física 3

Guía 4-Medios materiales

Andrea Buccino

Lineamientos

En esta clase veremos el campo magnético generado por corrientes libres en presencia de medios materiales y el generado por medios con magnetización permanente.

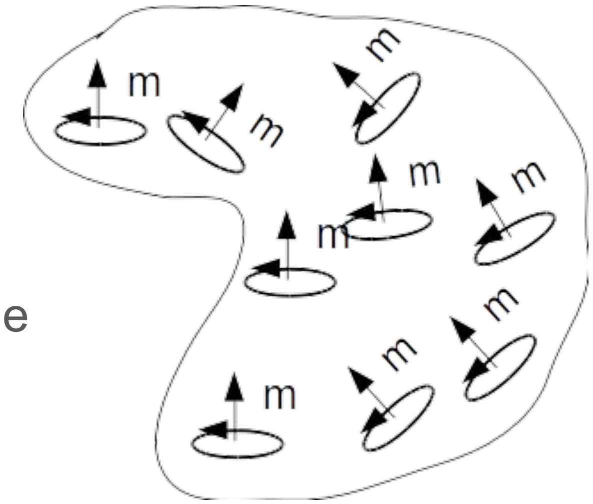
La explicación servirá para resolver los ejercicios 4.12 a 4.16 inclusive.

Los ejercicios 4.17 a 4.19 no deben hacerse.

Magnetización

Definimos la magnetización de un material como la densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen

$$\vec{M}(\vec{r}) = lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V}$$



A partir de la magnetización se genera una corriente de

Magnetización $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

$$\vec{g}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

Relaciones constitutivas

La magnetización puede ser constante o depender del campo que generan las corrientes libres.

Las corrientes libres y de magnetización son fuentes del campo magnético.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_M + \vec{J}_L)$$

Se puede definir un campo

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Relaciones constitutivas

Se puede definir un campo

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

De manera que

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\oint \vec{H} \vec{dl} = I_{Lconc}$$

Relaciones constitutivas

La magnetización puede ser permanente, a estos materiales se los llama **materiales ferromagnéticos**.

También existen materiales lineales isótropos y homogéneos:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

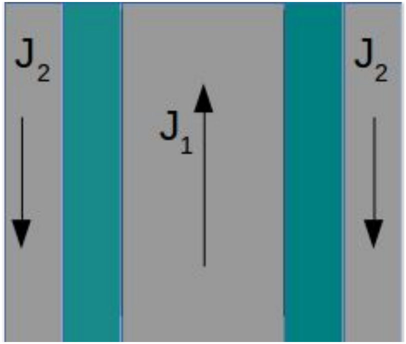
Donde χ_M es la susceptibilidad magnética del medio. Si es positivo, se dice que el material es **paramagnético** y si es negativo, el material es **diamagnético**. En estos materiales la relación entre los campos está dada por:

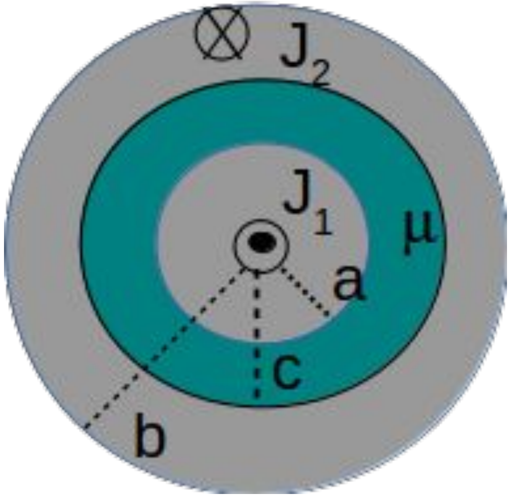
$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_M)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

Permitividad magnética

Problema 4.14

14. Un cable coaxil está formado por dos conductores cilíndricos coaxiales, separados por un medio de permeabilidad μ (ver figura). Por ambos conductores circulan corrientes I iguales y opuestas. Suponiendo densidad de corriente uniforme, encuentre $\vec{B}$ en todo el espacio.



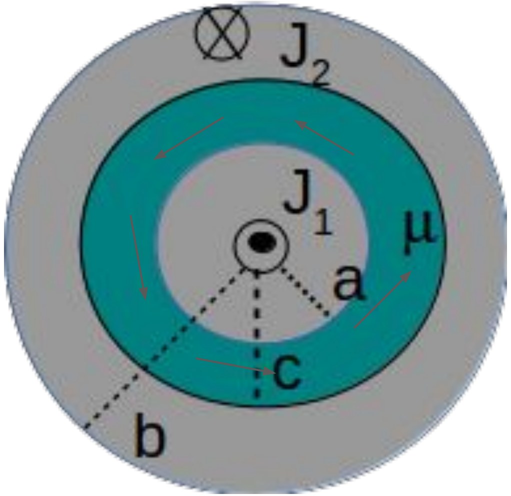


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \vec{J}_1.d\vec{S} = I$$

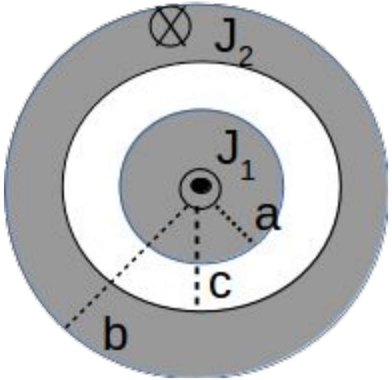
$$\int_0^{2\pi}\int_c^{b} \vec{J}_2.d\vec{S} = -I$$

Problema 4.14

14. Un cable coaxil está formado por dos conductores cilíndricos coaxiales, separados por un medio de permeabilidad μ (ver figura). Por ambos conductores circulan corrientes I iguales y opuestas. Suponiendo densidad de corriente uniforme, encuentre $\vec{B}$ en todo el espacio.

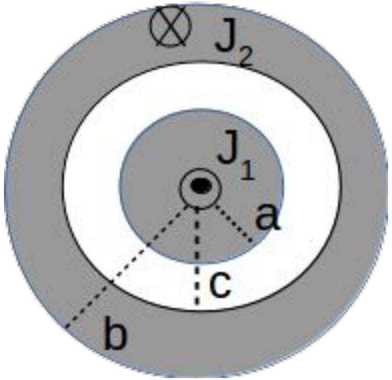


Al tratarse de medios lineal isótropo y homogéneo, se puede encarar el problema desde el campo H.



Problema 4.14

14. Un cable coaxil está formado por dos conductores cilíndricos coaxiales, separados por un medio de permeabilidad μ (ver figura). Por ambos conductores circulan corrientes I iguales y opuestas. Suponiendo densidad de corriente uniforme, encuentre $\vec{B}$ en todo el espacio.



Dado que se trata de cilindros infinitos con corrientes verticales, los campos tendrán la misma simetría que las de un hilo infinito.

$$\vec{H} = H(r)\hat{\phi}$$

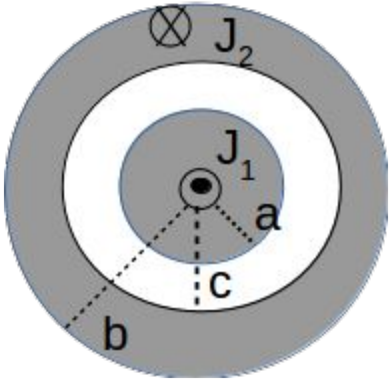
$$\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$$

Problema 4.14

Dado que se trata de cilindros infinitos con corrientes verticales, los campos tendrán la misma simetría que las de un hilo infinito.

$$\vec{H} = H(r)\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$$



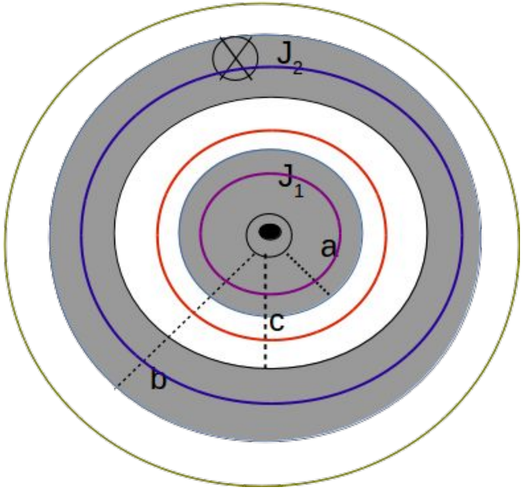
En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c, c<r<b y r>b. En cada región:

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = I_{Lconc}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c, c<r<b y r>b. En cada región:

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = I_{Lconc}$$



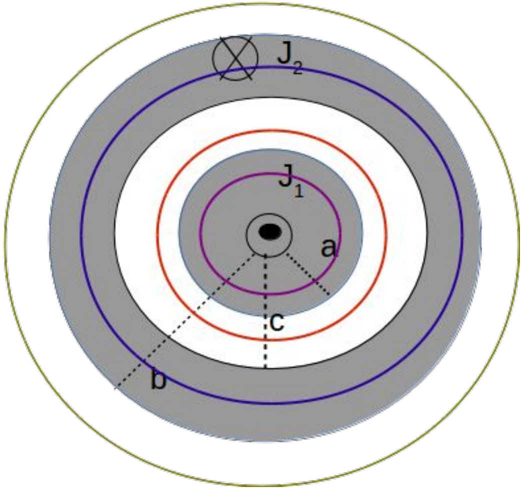
$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} J_1 \hat{z} r' dr' d\phi \hat{z}}$$

$$r < a$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c, c<r<b y r>b. En cada región:

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = I_{Lconc}$$



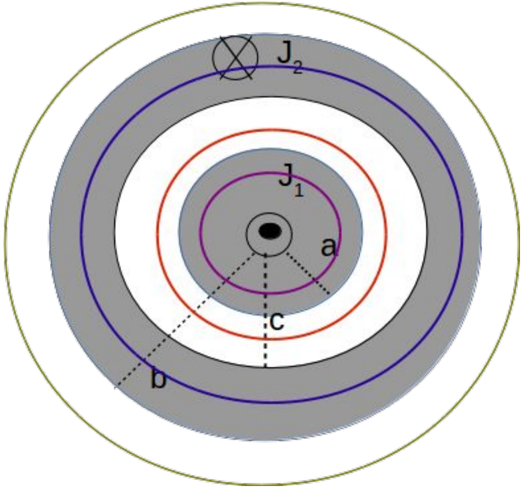
$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_1 \hat{z} r' dr' d\phi \hat{z} = I}$$

$$a < r < c$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 3 regiones en r<a, a<r<c y c<r<b. En cada región:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_{Lconc}$$



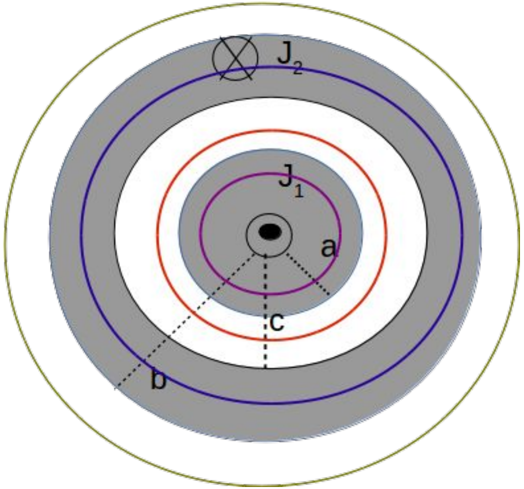
$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = \overbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_1 \hat{z} r' dr' d\phi \hat{z}}^{I} + \int_0^{2\pi}\int_c^{r} J_2(-\hat{z}) r' dr' d\phi \hat{z}}$$

$$c < r < b$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 3 regiones en r<a, a<r<c y c<r<b. En cada región:

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = I_{Lconc}$$

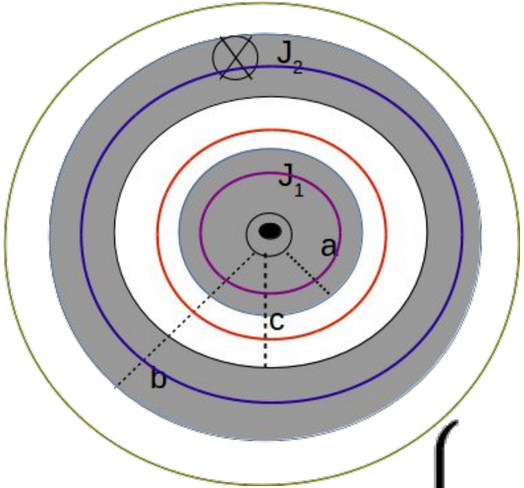


$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = \overbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_1 \hat{z} r' dr' d\phi \hat{z}}^{I} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_c^{b} J_2(-\hat{z}) r' dr' d\phi \hat{z}}_{-I}}$$

$$r > b$$

Problema 4.14

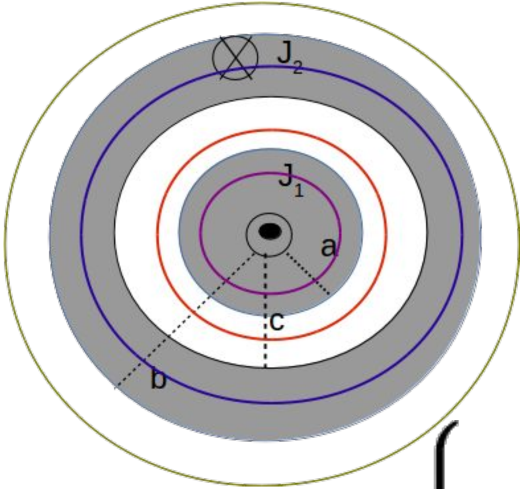
En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:



$$\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} J_1 \pi r^2 & r < a \\ I & a < r < c \\ I - \pi J_2 (r^2 - c^2) & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:



$$\int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} r d\phi \hat{\phi} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} J_1 \pi r^2 & r < a \\ I & a < r < c \\ I - \pi J_2 (r^2 - c^2) & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en $r<a$, $a<r<c$,$c<r<b$ y $r>b$. En cada región:

$$\vec{H}(r) = \begin{cases} J_1 \frac{r}{2} \hat{\phi} & r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} \hat{\phi} & a < r < c \\ \dfrac{I - \pi J_2 (r^2 - c^2)}{2\pi r} \hat{\phi} & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \quad \vec{J}_2 = -\frac{I}{\pi (b^2 - c^2)} \hat{z}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:

$$\vec{B}(r) = \mu\vec{H} = \begin{cases} \mu_0 J_1 \frac{r}{2}\hat{\phi} & r < a \\ \mu\frac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ \mu_0\frac{I - \pi J_2(r^2 - c^2)}{2\pi r}\hat{\phi} & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z} \quad \vec{J}_2 = -\frac{I}{\pi(b^2 - c^2)}\hat{z}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en $r<a$, $a<r<c$,$c<r<b$ y $r>b$. En cada región:

$$\vec{M}(r) = \chi_M \vec{H} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \chi_M \frac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ 0 & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z} \quad \vec{J}_2 = -\frac{I}{\pi(b^2 - c^2)}\hat{z}$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:

$$\vec{M}(r) = \chi_M \vec{H} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \chi_M \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ 0 & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad \vec{g}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} \boxed{- \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\left[\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:

$$\vec{M}(r) = \chi_M \vec{H} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \chi_M \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ 0 & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} \boxed{- \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\left[\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0$$

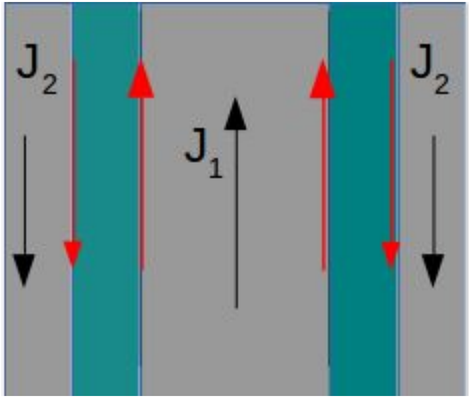
Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:

$$\vec{M}(r) = \chi_M \vec{H} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \chi_M \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ 0 & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{g}_M = \vec{M} \times (-\hat{r})|_{r=a} = \chi_m \frac{I}{2\pi a}\hat{z}$$

$$\vec{g}_M = \vec{M} \times \hat{r}|_{r=c} = -\chi_m \frac{I}{2\pi c}\hat{z}$$



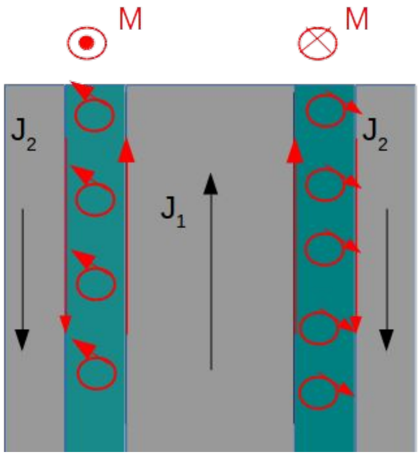
Problema 4.14

En este caso tendremos 4 regiones en r<a, a<r<c,c<r<b y r>b. En cada región:

$$\vec{M}(r) = \chi_M \vec{H} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \chi_M \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < c \\ 0 & c < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{g}_M = \vec{M} \times (-\hat{r})|_{r=a} = \chi_m \frac{I}{2\pi a}\hat{z}$$

$$\vec{g}_M = \vec{M} \times \hat{r}|_{r=c} = -\chi_m \frac{I}{2\pi c}\hat{z}$$



Magnetización permanente

Cuando nos encontramos en presencia de materiales ferromagnéticos, en general la magnetización es conocida a una dada temperatura. Al conocer la magnetización podemos conocer los campos asociados.

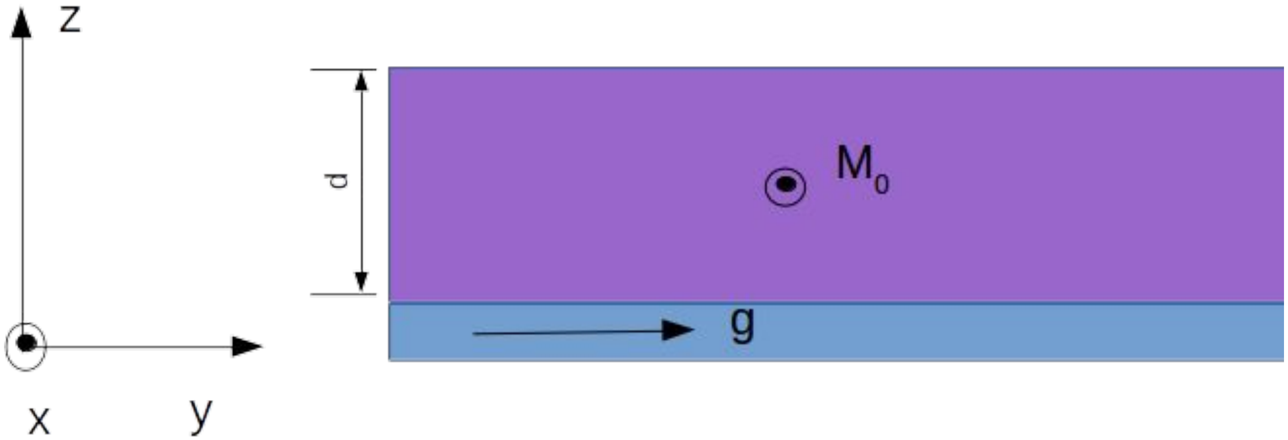
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_M + \vec{J}_L) \longrightarrow \begin{array}{c} \nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M \\ \vec{M} \times \hat{n} = \vec{g}_M \end{array}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \longrightarrow \begin{array}{c} \nabla . \vec{M} = -\nabla . \vec{H} \\ \vec{M} . \hat{n} = -\vec{H} . \hat{n} \end{array}$$

Si algunas de estas cantidades son no nulas, entonces habrá fuentes de H debido a la magnetización.

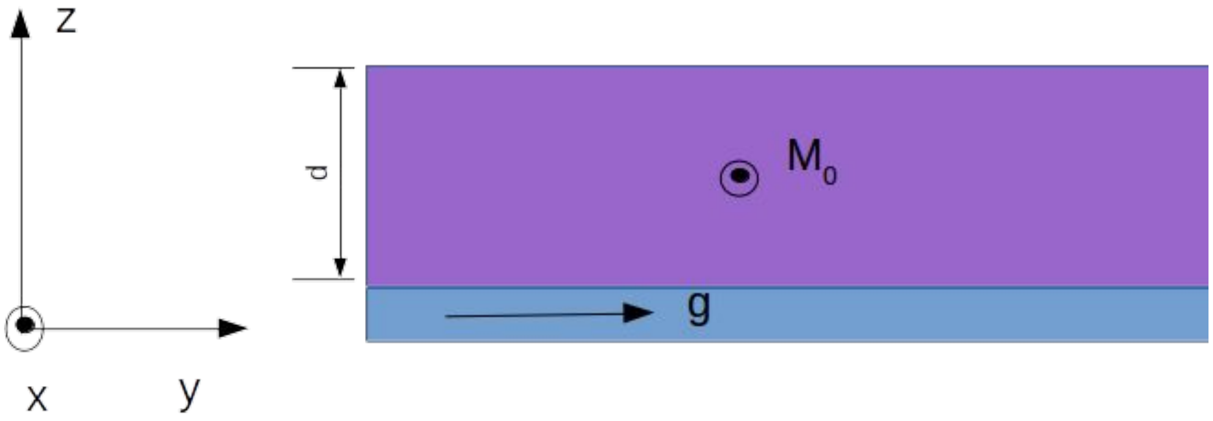
Problema extra con magnetización permanente

Dado una lámina en el plano x-y de espesor despreciable con corriente superficial uniforme dirección y una lámina de espesor d con magnetización permanente uniforme en la dirección x. Determinar el campo magnético en todo el espacio.



Problema extra con magnetización permanente

Dado una lámina en el plano x-y de espesor despreciable con corriente superficial uniforme dirección y una lámina de espesor d con magnetización permanente uniforme en la dirección x. Determinar el campo magnético en todo el espacio.



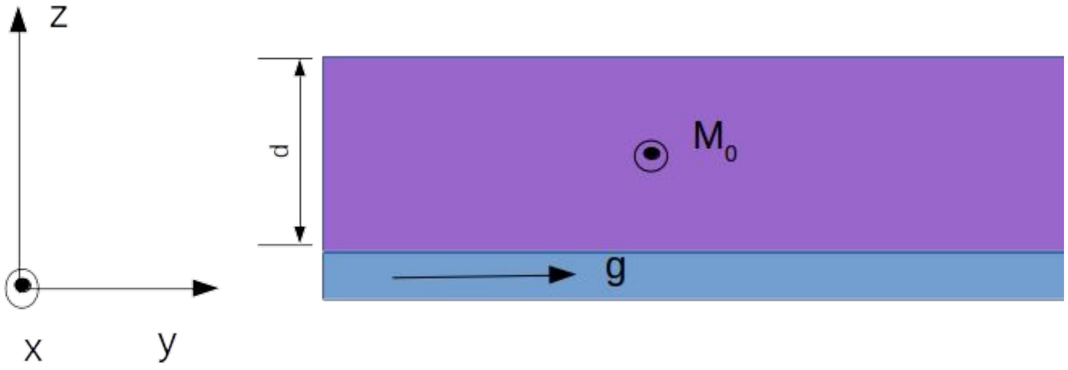
Corriente $\vec{g}$: fuente de $\vec{H}$ y $\vec{B}$

¿Y la magnetización?

Para ello debemos realizar un par de cálculos.

$$\nabla.\vec{M} \ y \ \vec{M}.\hat{n}$$
$$\nabla \times \vec{M} \ y \ \vec{M} \times \hat{n}$$

Problema extra con magnetización permanente



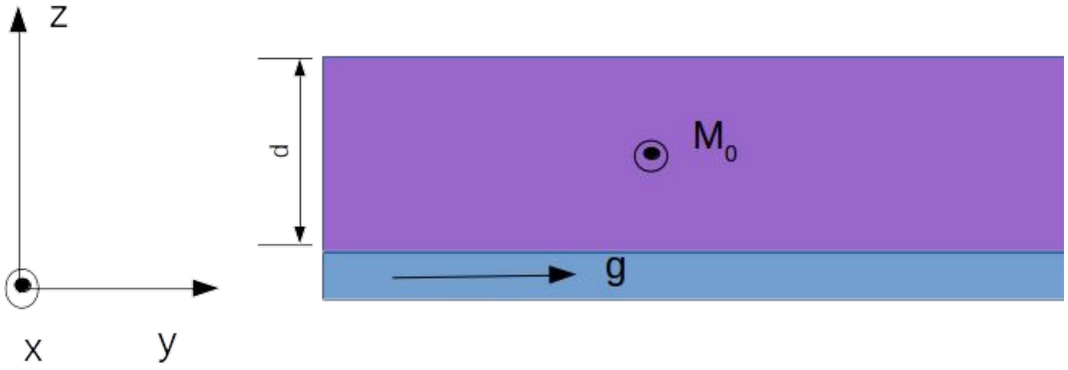
$$\nabla.\vec{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial M_0}{\partial x} = 0$$

$$\vec{M}.\hat{z}|_{z=d} = M_0\hat{x}.\hat{z} = 0$$

$$\vec{M}.(-\hat{z})|_{z=0} = M_0\hat{x}.(-\hat{z}) = 0$$

No hay fuentes de $\vec{H}$
debido a la magnetización

Problema extra con magnetización permanente



$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{M} = \nabla \times (M_0 \hat{x}) = \frac{\partial M_0}{\partial z}\hat{y} - \frac{\partial M_0}{\partial y}\hat{z} = 0$$

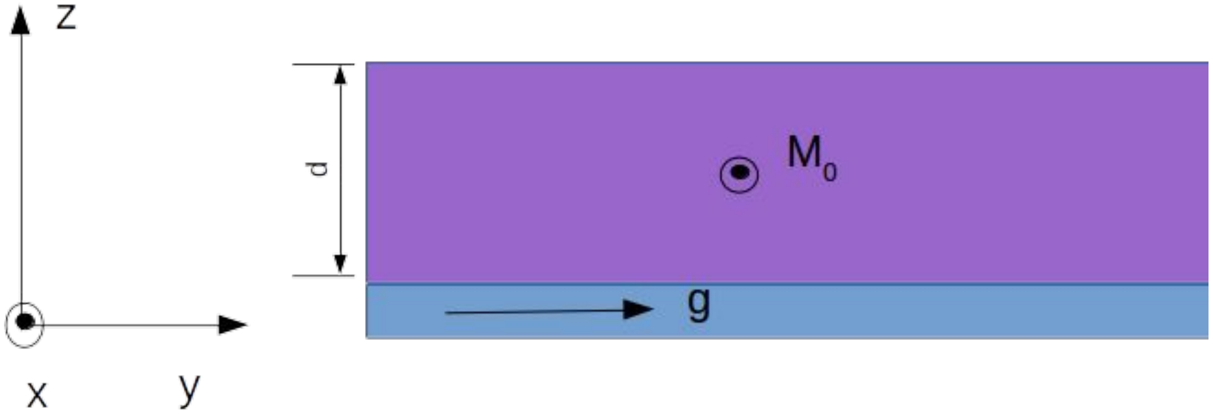
$$\vec{M} \times \hat{z}|_{z=d} = M_0 \hat{x} \times \hat{z} = -M_0 \hat{y}$$

$$\vec{M} \times (-\hat{z})|_{z=0} = M_0 \hat{x} \times (-\hat{z}) = M_0 \hat{y}$$

Hay fuentes de $\vec{B}$
debido a la magnetización

Problema extra con magnetización permanente

Dado una lámina en el plano x-y de espesor despreciable con corriente superficial uniforme dirección y una lámina de espesor d con magnetización permanente uniforme en la dirección x. Determinar el campo magnético en todo el espacio.

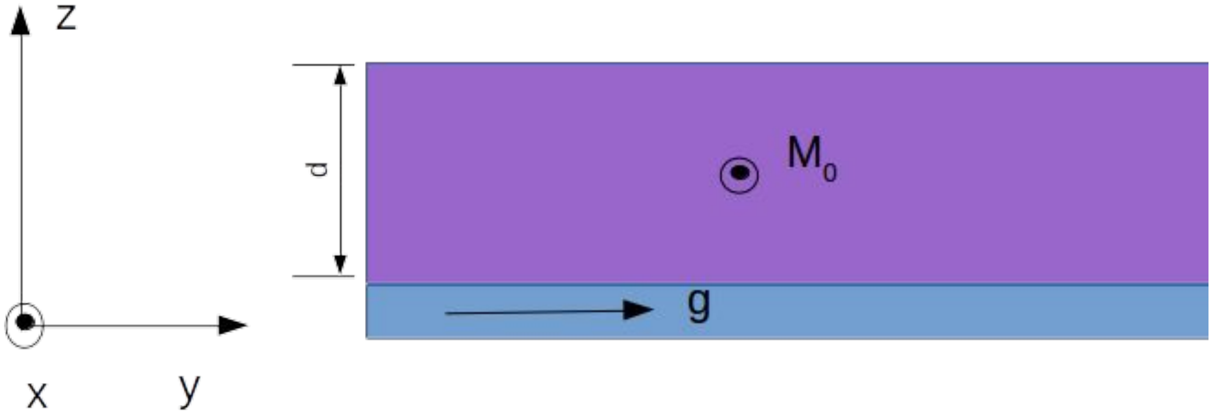


Corriente $\vec{g}$: fuente de $\vec{H}$

Corriente $\vec{g}$ y $\vec{M}$: fuente de $\vec{B}$

Entonces en este caso conviene encarar el problema desde $\vec{H}$ que se calcula a partir de Ampere en todo el espacio y luego se puede calcular $\vec{B}$ a partir de la relación entre los campos.

Problema extra con magnetización permanente

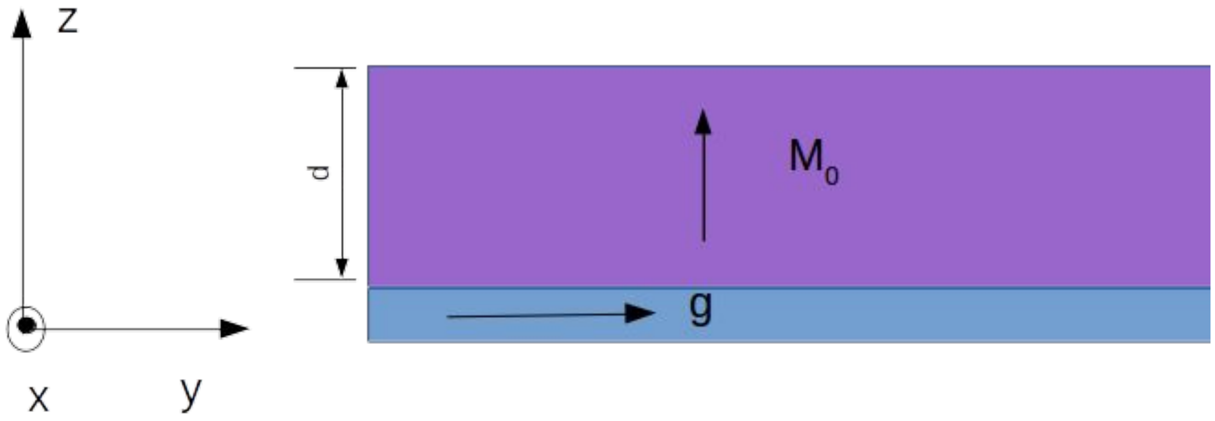


$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{g_0}{2}\hat{x} & z > 0 \\ -\frac{g_0}{2}\hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 g_0}{2}\hat{x} & z > d \\ \mu_0(\frac{g_0}{2}\hat{x} + M_0\hat{x}) & 0 < z < d \\ -\frac{\mu_0 g_0}{2}\hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

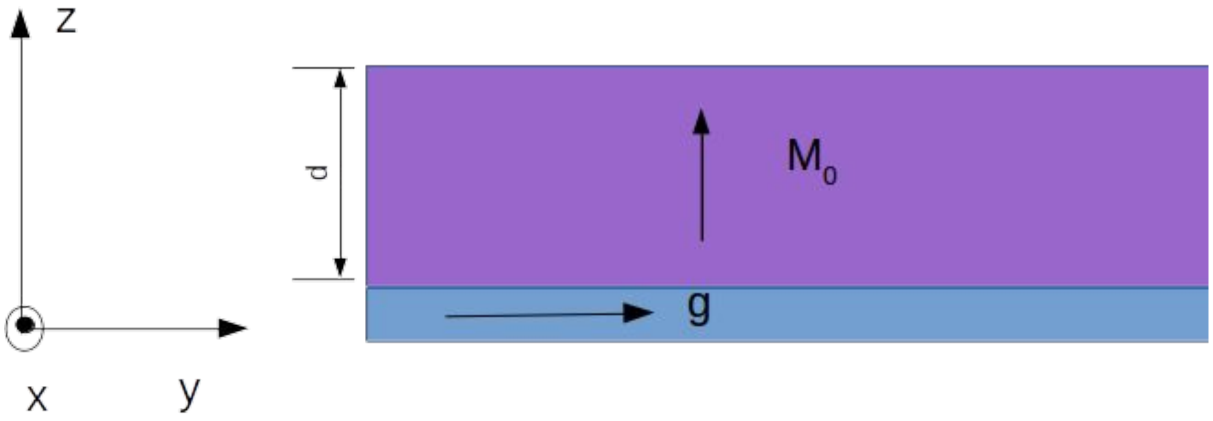
Otro problema extra con magnetización permanente

Dado una lámina en el plano x-y de espesor despreciable con corriente superficial uniforme dirección y una lámina de espesor d con magnetización permanente uniforme en la dirección z. Determinar el campo magnético en todo el espacio.



Otro problema extra con magnetización permanente

Dado una lámina en el plano x-y de espesor despreciable con corriente superficial uniforme dirección y una lámina de espesor d con magnetización permanente uniforme en la dirección z. Determinar el campo magnético en todo el espacio.



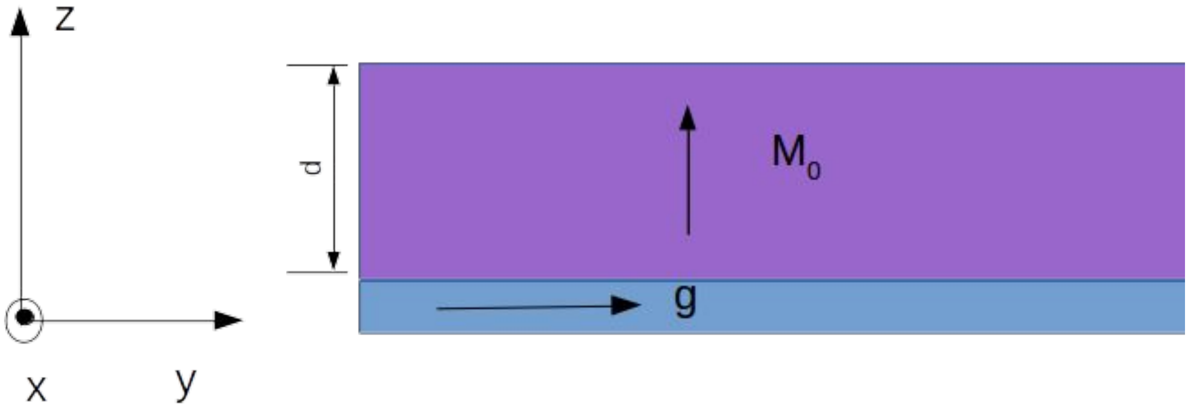
Corriente $\vec{g}$: fuente de $\vec{H}$ y $\vec{B}$

¿Y la magnetización?

Para ello debemos realizar un par de cálculos.

$$\nabla.\vec{M} \ y \ \vec{M}.\hat{n}$$
$$\nabla \times \vec{M} \ y \ \vec{M} \times \hat{n}$$

Otro problema extra con magnetización permanente



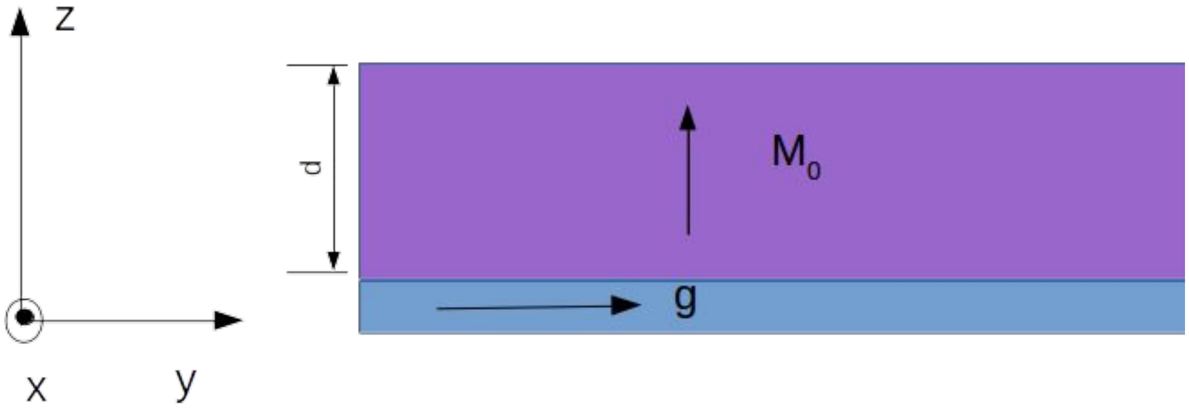
$$\nabla \times (M_0 \hat{z}) = \hat{x}\frac{\partial M_0}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial M_0}{\partial x} = 0$$

$$M_0 \hat{z} \times \hat{z}|_{z=d} = 0$$

$$M_0 \hat{z} \times (-\hat{z})|_{z=0} = 0$$

No hay fuentes de B
por magnetización

Otro problema extra con magnetización permanente



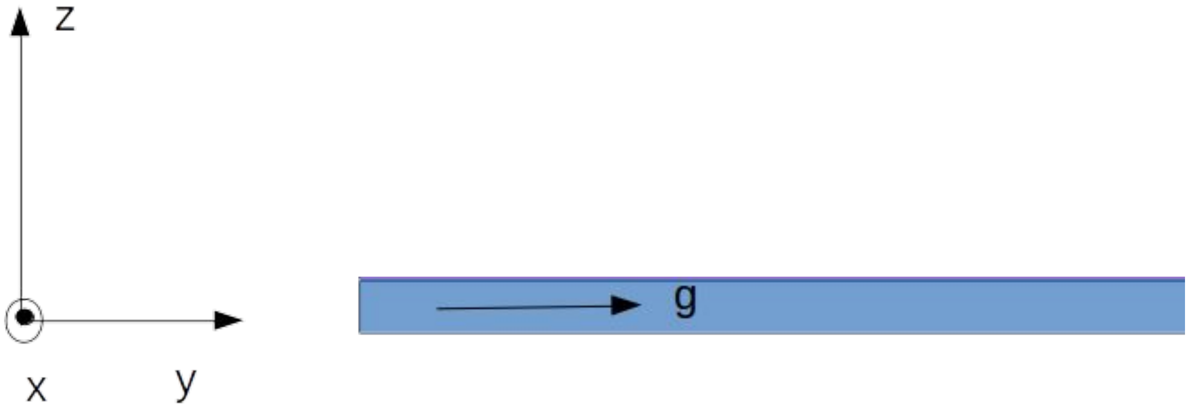
$$\nabla.(M_0\hat{z}) = \frac{\partial M_0}{\partial z} = 0$$

$$M_0\hat{z}.\hat{z}|_{z=d} = M_0$$

$$M_0\hat{z}.(-\hat{z})|_{z=0} = -M_0$$

Hay fuentes de H por magnetización

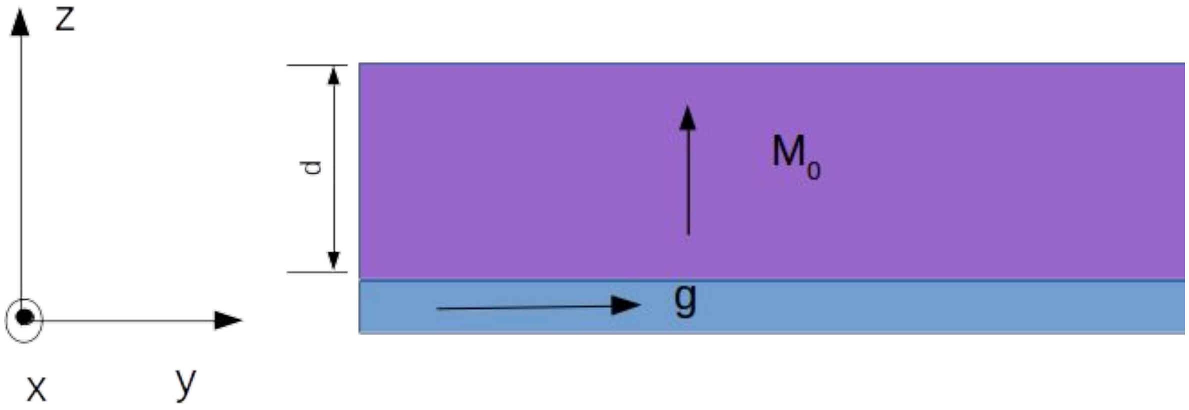
Otro problema extra con magnetización permanente



Conviene encarar el problema desde el campo $\vec{B}$ en este caso.

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 g_0}{2}\hat{x} & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 g_0}{2}\hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

Otro problema extra con magnetización permanente



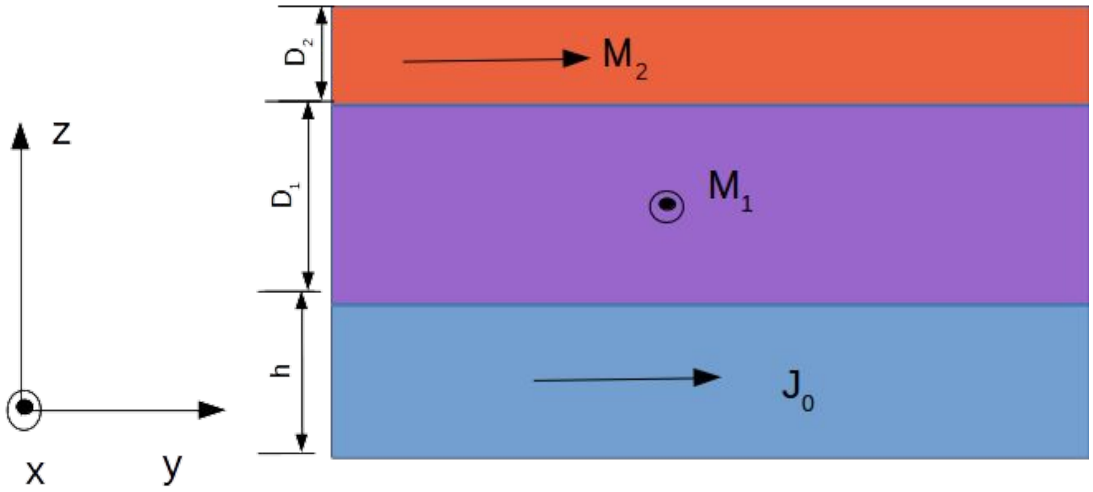
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \begin{cases} \frac{g_0}{2}\hat{x} & z > d \\ \frac{g_0}{2}\hat{x} - M_0\hat{z} & 0 < z < d \\ -\frac{g_0}{2}\hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

Resumen

Fuentes					
$\vec{H}$		$\vec{M}$		$\vec{B}$	
Vol	Sup	Vol	Sup	Vol	Sup
$\vec{J}_L$	$\vec{g}_L, I_L$	$\nabla.\vec{M}$	$\vec{M}.\hat{n}$	$\vec{J}_L + \vec{J}_M$	$\vec{g}_L + \vec{g}_M, I_L + I_M$
$\nabla.\vec{M}$	$\vec{M}.\hat{n}$	$\nabla \times \vec{M}$	$\vec{M} \times \hat{n}$		

Problema de medios materiales para practicar

Se tiene una lámina infinita en el plano *x-y* de espesor *h* y con corriente uniforme en volumen en la dirección *y*, se poseen también dos medios materiales con magnetización uniforme M_1 y M_2 como indica la figura.

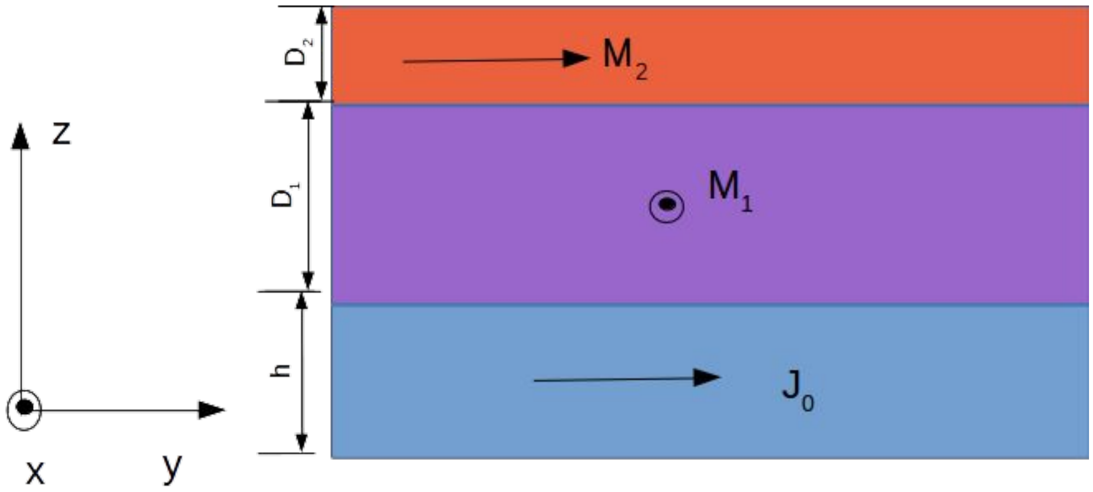


a) Determine H y B en todo el espacio. Para ello, analice primero las fuentes de ambos campos.

b) Uno de los medios materiales puede llegar a ser LIH. Cuál de ellos? Justifique

Problema de medios materiales para practicar

Primero analizamos las fuentes que generan los materiales con magnetización fija.



a) Determine H y B en todo el espacio. Para ello, analice primero las fuentes de ambos campos.
b) Uno de los medios materiales puede llegar a ser LIH. Cuál de ellos? Justifique