

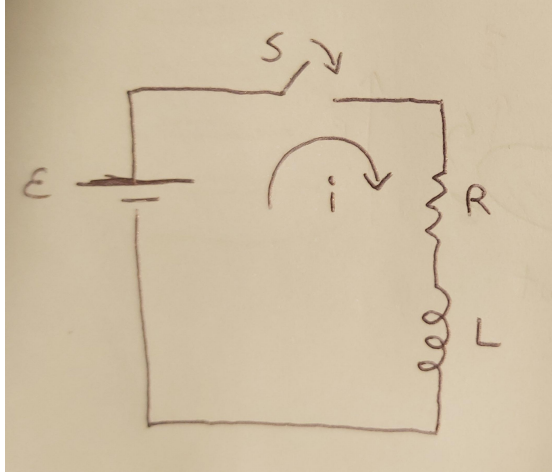
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 20

Vamos a ver ahora circuitos en su etapa transitoria, es decir, desde el instante en que cerramos alguna llave que activa el circuito, hasta que llegue (o no...) al estacionario.

Circuito RL serie:



Tenemos,

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind} = i R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - L \frac{di}{dt} = i R$$

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} + R i$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria que debemos resolver para obtener $i = i(t)$ con la

condición inicial $i(t = 0) = 0$ donde suponemos que en $t=0$ se cierra la llave S.

La resolvemos con la técnica de separar la solución general en una [solución del problema homogéneo](#) y una [solución particular](#):

$$i = i_h + i_p$$

$$\text{donde } 0 = L \frac{di_h}{dt} + R i_h \quad \text{y} \quad \varepsilon = L \frac{di_p}{dt} + R i_p$$

normalmente podemos buscar la solución particular *constante* entonces $\frac{di_p}{dt} = 0$ y $\varepsilon = R i_p$

$$\Rightarrow i_p = \varepsilon / R$$

que sería la solución si no hubiera inductancia

Para la solución del homogéneo proponemos una exponencial en el tiempo, $i_h(t) = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \frac{di_h}{dt} = \lambda A e^{\lambda t}$$

y reemplazando en la ecuación dif. homogénea,

polinomio característico

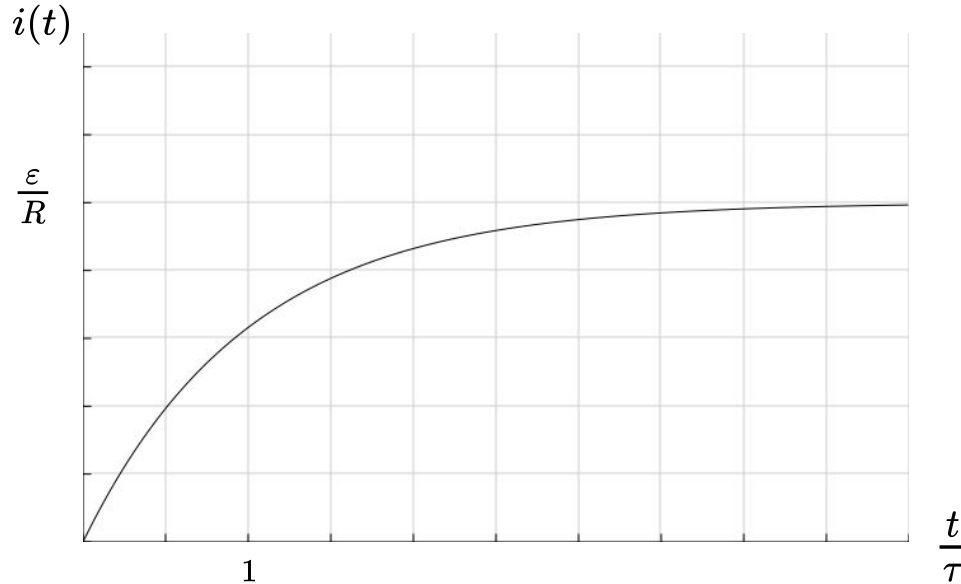


$$0 = L \lambda A e^{\lambda t} + R A e^{\lambda t} \Rightarrow 0 = L \lambda + R \Rightarrow \lambda = -R/L$$

Reemplazando, $i_h(t) = A e^{-Rt/L}$ y $i(t) = A e^{-Rt/L} + \varepsilon/R$

La constante A la determinamos mediante la condición inicial,

$$i(t=0) = 0 = A + \varepsilon/R \Rightarrow A = -\varepsilon/R \Rightarrow i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$



Llamamos $\tau = L/R$ *tiempo característico*

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

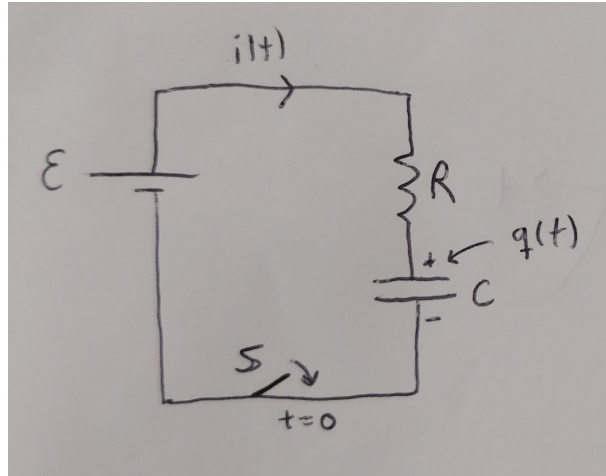
unidades $[\tau] = [L]/[R] \rightarrow s = Hy/\Omega$

$$[L][I]/[t] = [V] \quad , \quad [I][R] = [V]$$

$$[L][I]/[t] = [I][R] \rightarrow [L]/[R] = [t]$$

La corriente satura al valor estacionario ε/R y allí $di/dt = 0$ y la f.e.m. inducida tiende a 0

Circuito RC serie:



Recorriendo el circuito,

$$\varepsilon = V_R + V_C = R i + \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

queda una ecuación diferencial ordinaria para $q = q(t)$

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

con condición inicial $q(t=0) = q_0$ la carga inicial en el capacitor

Resolvemos buscando la solución del homogéneo y una solución particular constante, $q = q_h + q_p$

$$\frac{dq_p}{dt} = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{C} q_p \rightarrow q_p = \varepsilon C$$

$$0 = R \frac{dq_h}{dt} + \frac{1}{C} q_h \rightarrow q_h(t) = A e^{\lambda t} \rightarrow R \lambda A e^{\lambda t} + \frac{1}{C} A e^{\lambda t} = 0 \rightarrow R \lambda + \frac{1}{C} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

polinomio característico

$$q(t) = A e^{-t/(RC)} + \varepsilon C \quad q(t=0) = q_0 \rightarrow q_0 = A + \varepsilon C \rightarrow A = q_0 - \varepsilon C$$

$$\Rightarrow q(t) = (q_0 - \varepsilon C) e^{-t/(RC)} + \varepsilon C$$

$$\tau = RC \quad \text{tiempo característico} \rightarrow \text{unidades: } [\tau] = [R][C] \rightarrow s = \Omega F \quad [V] = [I][R] \text{ , } [V] = [Q]/[C]$$

$$[I][R] = [Q]/[C] \rightarrow [R][C] = [Q]/[I] = C/A = s$$

Consideramos dos casos típicos:

a) Descarga del capacitor

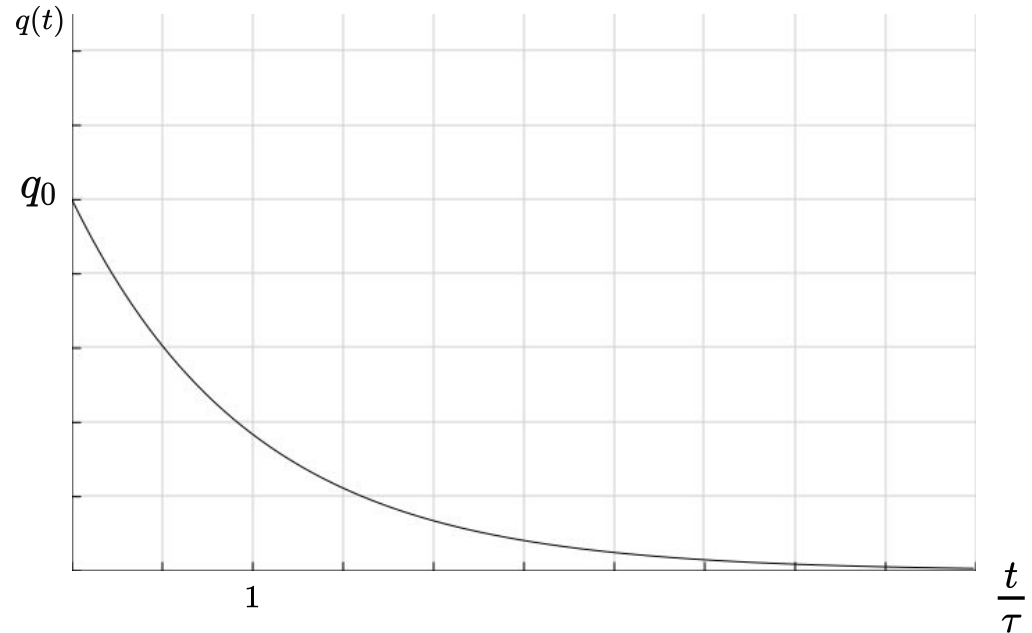
$$\varepsilon = 0 \text{ , } q_0 \neq 0$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$$

La corriente es (derivando)

$$i(t) = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

corriente de descarga

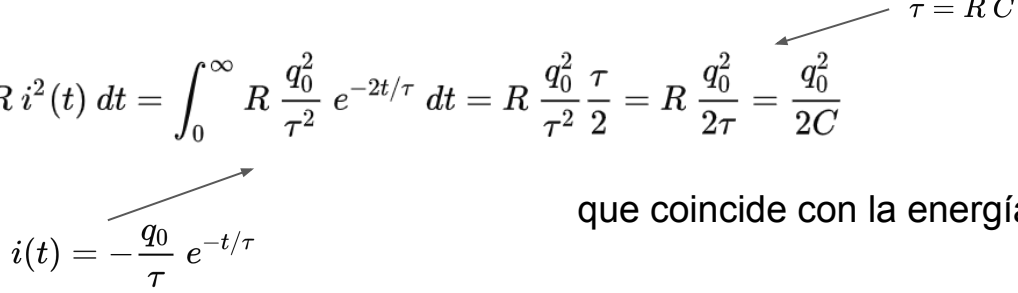


Podemos analizar el balance de energía.

$$\text{A } t = 0, U_C = \frac{C V_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} \quad \text{es la energía almacenada en el capacitor}$$

al establecerse la corriente de descarga se disipa energía en R con potencia $P_R = R i^2(t)$

la energía total disipada en la descarga es entonces

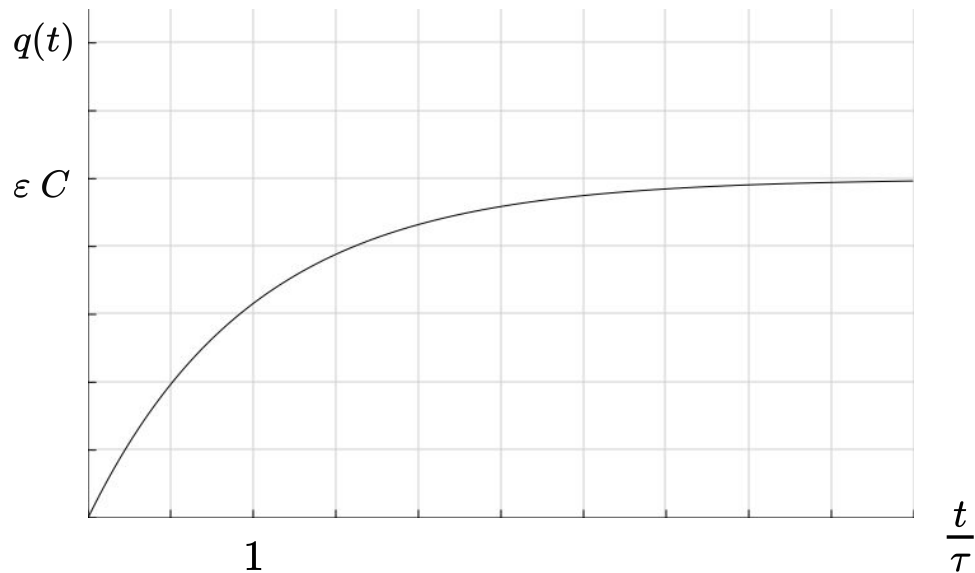
$$\int_0^\infty R i^2(t) dt = \int_0^\infty R \frac{q_0^2}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt = R \frac{q_0^2}{\tau^2} \frac{\tau}{2} = R \frac{q_0^2}{2\tau} = \frac{q_0^2}{2C}$$


$$i(t) = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

que coincide con la energía almacenada inicialmente en C

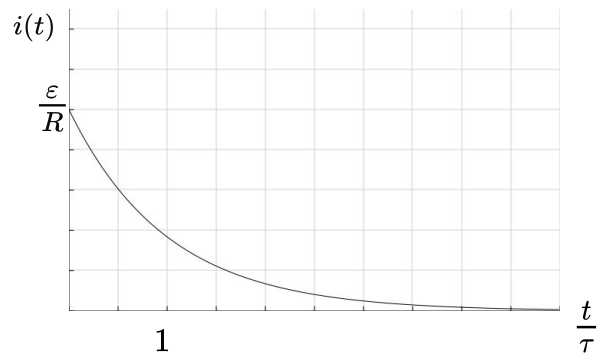
b) Carga del capacitor

$$q_0 = 0 \quad , \quad \varepsilon \neq 0 \quad \quad q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-t/\tau})$$



La corriente es

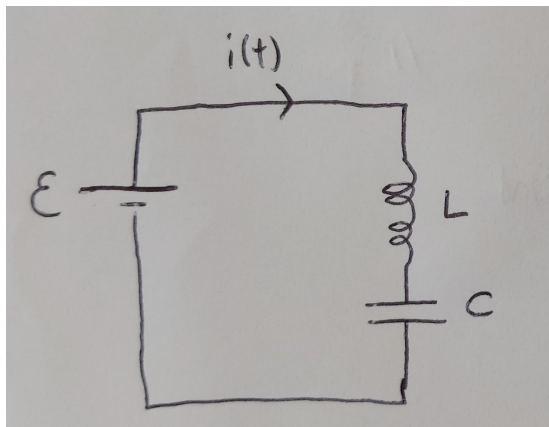
$$i(t) = \frac{\varepsilon C}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau}$$



Se puede ver que la energía entregada por la fuente se disipa parte en R y parte se almacena en C,

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-t/\tau} dt = \varepsilon^2 C = U_C + \int_0^{\infty} R i^2(t) dt = \frac{q_{\infty}^2}{2C} + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\varepsilon^2 C}{2} + \frac{\varepsilon^2 C}{2}$$

Circuito LC serie:



Recorriendo el circuito,

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q \quad \xrightarrow{\quad} \quad i = \frac{dq}{dt} \quad , \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

queda una ecuación diferencial ordinaria (de 2do orden) para $q = q(t)$

Necesitamos dos cond. iniciales,

$$q(t=0) = q_0 \quad , \quad \frac{dq}{dt}(t=0) = i(t=0) = i_0$$

Buscamos $q = q_h + q_p$, $q_p = cte \rightarrow q_p = \varepsilon C$

$$0 = L \frac{d^2 q_h}{dt^2} + \frac{1}{C} q_h \rightarrow q_h(t) = A e^{\lambda t}$$

$$0 = L \lambda^2 + \frac{1}{C} \rightarrow \lambda^2 = -\frac{1}{LC} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{j}{\sqrt{LC}} \quad \text{con } j^2 = -1$$

número complejo j

exponencial compleja

Llamamos $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$q(t) = \varepsilon C + A_1 e^{j \omega_c t} + A_2 e^{-j \omega_c t}$$

$$e^{j \omega_c t} = \cos(\omega_c t) + j \sin(\omega_c t)$$

Utilizamos las condiciones iniciales para obtener las constantes de integración,

$$q(t) = \varepsilon C + (q_0 - \varepsilon C) \cos(\omega_c t) + \frac{i_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \rightarrow \text{solución oscilatoria (en torno al valor } \varepsilon C \text{)}$$

con frecuencia ω_c

$$i(t) = -\omega_c (q_0 - \varepsilon C) \sin(\omega_c t) + i_0 \cos(\omega_c t) \quad \rightarrow \text{solución oscilatoria en torno a 0}$$

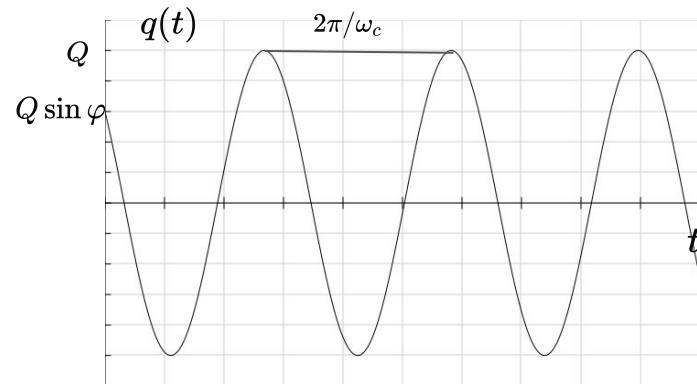
En general si

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = F \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con } F = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ y } \varphi = \arctan(B/A)$$

En este caso entonces, $q(t) = \varepsilon C + Q \sin(\omega_c t + \varphi)$ $i(t) = \omega_c Q \cos(\omega_c t + \varphi)$

$$Q = \sqrt{(q_0 - \varepsilon C)^2 + i_0^2 / \omega_c^2}$$



Si $\varepsilon = 0$, $q(t) = Q \sin(\omega_c t + \varphi)$, $i(t) = \omega_c Q \cos(\omega_c t + \varphi)$

$$Q = \sqrt{q_0^2 + i_0^2 / \omega_c^2}$$

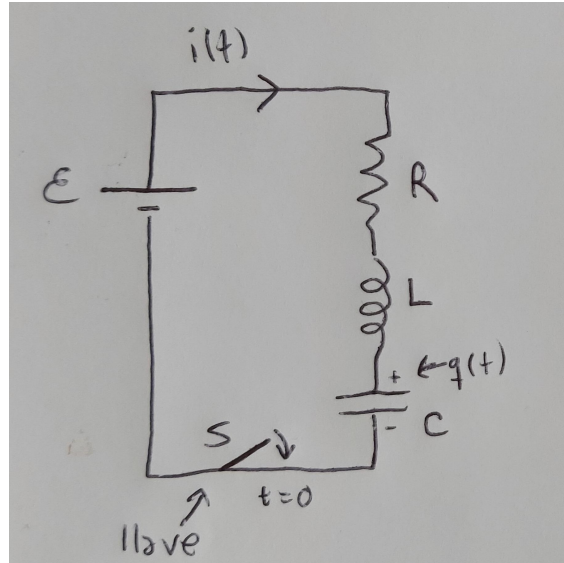
Para el caso sin batería si calculamos la energía almacenada en la inductancia y en el capacitor a cada instante obtenemos:

$$U_L + U_C = L \frac{i^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C} = L \frac{i_0^2}{2} + \frac{q_0^2}{2C} = cte$$

reemplazamos con las
soluciones obtenidas

es decir la energía total es constante, la inductancia y el capacitor se reparten la energía que va oscilando de una al otro

Circuito RLC serie:



Tenemos,

$$\varepsilon = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q \quad \rightarrow \text{ec. dif. 2do orden}$$

$$q(t=0) = q_0 \quad , \quad i(t=0) = \frac{dq}{dt}(t=0) = 0$$

$$q = q_h + q_p$$

$$q_p = \varepsilon C$$

$$q_h = A e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad 0 = R \lambda + L \lambda^2 + \frac{1}{C} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Es análoga a la ecuación de movimiento de una masa en un resorte con amortiguamiento proporcional a la velocidad

$$m \ddot{x} = -k x - \mu \dot{x} \quad \rightarrow \quad 0 = \mu \dot{x} + m \ddot{x} + k x$$

$\mu \rightarrow R \quad , \quad m \rightarrow L \quad , \quad k \rightarrow 1/C$

Llamamos $\alpha = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \beta^2 = \alpha^2 - \omega_c^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

Según sea $\alpha > \omega_c$ o $\alpha = \omega_c$ o $\alpha < \omega_c$ va a haber 3 soluciones posibles

a) Caso sobreamortiguado:

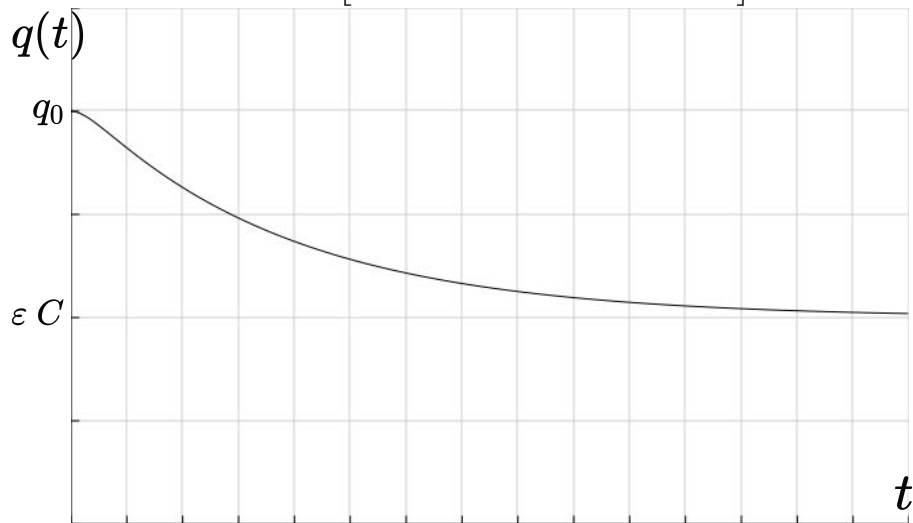
$$\alpha > \omega_c \rightarrow R > 2\sqrt{L/C}$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_c^2} \in \mathbb{R}$$

$$q_h = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

$$q(t) = \varepsilon C + e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} [(\beta - \alpha) A_1 e^{\beta t} - (\beta + \alpha) A_2 e^{-\beta t}]$$

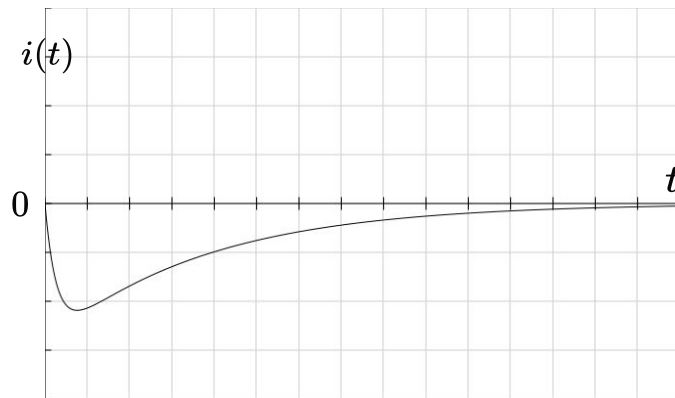


$$q(t=0) = q_0, \quad i(t=0) = \frac{dq}{dt}(t=0) = 0$$

De las cond. iniciales obtenemos las constantes que nos faltan y resulta:

$$q(t) = Q e^{-\alpha t} \left[\cosh(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \sinh(\beta t) \right] + \varepsilon C$$

$$i(t) = -\frac{\omega_c^2}{\beta} Q e^{-\alpha t} \sinh(\beta t) \quad Q = q_0 - \varepsilon C$$



b) caso crítico $\alpha = \omega_c \rightarrow R = 2\sqrt{L/C}$

$\beta = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \rightarrow$ raíz doble

$e^{\lambda t} = e^{-\alpha t}$ y $t e^{\lambda t} = t e^{-\alpha t}$ son las soluciones fundamentales

$\rightarrow q(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\alpha t} + \varepsilon C$

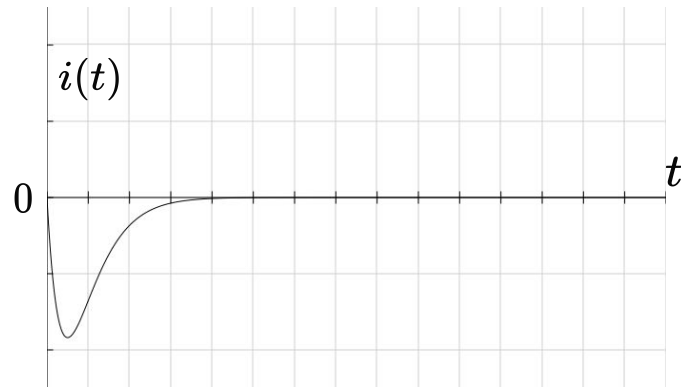
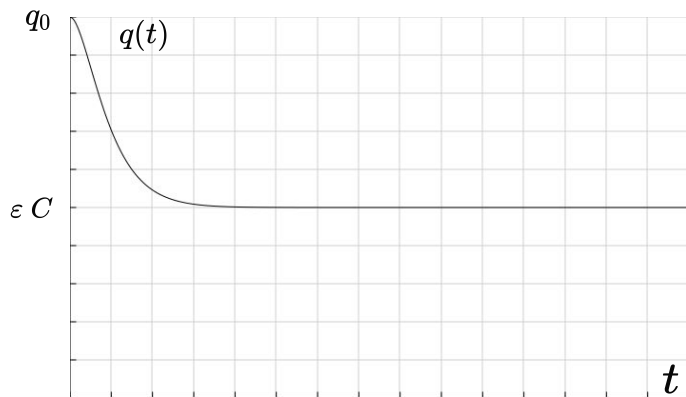
$i(t) = (B_2 - \alpha B_1 - \alpha B_2 t)e^{-\alpha t}$

ajustamos con las cond. iniciales

$q(t) = Q(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + \varepsilon C$

$Q = q_0 - \varepsilon C$

$i(t) = -\alpha^2 Q t e^{-\alpha t}$



c) Caso sub-amortiguado $\alpha < \omega_c \rightarrow R < 2\sqrt{L/C} \rightarrow \beta = \sqrt{\omega_c^2 - \alpha^2} j, j^2 = -1$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_c^2 - \alpha^2} \in \mathbb{R}$$

Las sol. fundamentales son $e^{\lambda_1 t} = e^{(-\alpha + j\omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(-\alpha - j\omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

y ajustando con las cond. iniciales se obtiene

$$q(t) = Q e^{-\alpha t}(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) + \varepsilon C \quad Q = q_0 - \varepsilon C$$

$$i(t) = \frac{\omega_c^2}{\omega} Q e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

frecuencia de oscilación
↑

