La delta de Dirac

Este material es opcional y se incluye principalmente para justificar el hecho de que cualquier distribución de carga (incluso aún si tenemos sólo una carga puntual) se puede escribir en términos de una distribución de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$. De este modo, el campo eléctrico siempre podrá calcularse utilizando la ecuación

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}'\, \rho(\mathbf{r}')\, \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{1}$$

Saber esto será particularmente útil para realizar ciertos desarrollos formales, pero en definitiva, para hallar el campo eléctrico de una distribución de carga, lo más apropiado será utilizar la fórmula para distribuciones lineales, superficiales o volumétricas (según sea el caso) que ya hemos visto.

Lo que mostraremos aquí es que es posible escribir una "función" que represente la densidad de carga volumétrica asociada a una carga puntual de valor q. Para ello, es necesario introducir la "función" delta de Dirac. Utilizamos comillas para resaltar que, estrictamente, la delta de Dirac no es una función sino una distribución; con esto en mente, a partir de ahora, nos referiremos indistintamente a ella como la función delta de Dirac o la distribución delta de Dirac.

La delta de Dirac en una dimensión se define como la función $\delta(x-x_0)$ para la cual vale

$$\int_I dx\, f(x)\, \delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & si \quad x_0 \in I \\ \\ 0 & si \quad x_0 \notin I \end{cases}\,, \tag{2}$$

para toda función f "suave" (no vamos a meternos con el detalle del conjunto de las funciones f admitidas, lo importante es saber que puede definirse adecuadamente y que tal conjunto es "grande" e incluye a las funciones más tradicionales con las que uno se encuentra más familiarizado).

David Blanco - dblanco@df.uba.ar

De la relación (2), vemos que básicamente la delta de Dirac integrada junto a una función selecciona un valor particular de la función (el valor de tal función en x_0).

Utilizando la relación (2) como la definición de la delta de Dirac, es posible convencerse de que $\delta\left(x-x_0\right)$ debe tener las siguientes propiedades

1. $\delta\left(x-x_0\right)=0$ si $x\neq x_0$;
2. $\delta\left(x-x_0\right)=\delta\left(x_0-x\right)$ (es decir, es una función par);
3. $\int_I dx\, f\left(x\right)\delta'\left(x-x_0\right)=\begin{cases}-f'\left(x_0\right) & si \quad x_0\in I\\ \\ 0 & si \quad x_0\notin I\end{cases}$, donde $\delta'\left(x-x_0\right)$ es la derivada de la función delta de Dirac;
4. $\delta\left(f(x)\right)=\sum_i \frac{1}{f'(x_i)}\delta\left(x-x_i\right)$, donde x_i son los ceros simples de f (es decir, $f(x_i)=0$).

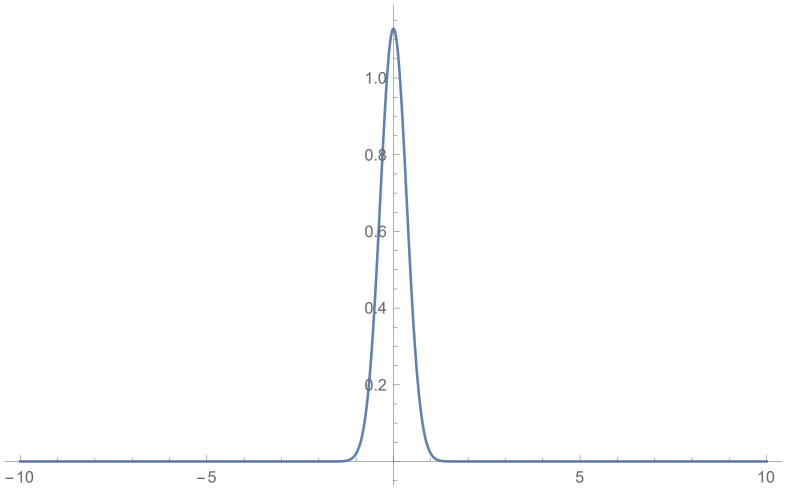
La delta de Dirac se puede pensar como el límite de ciertas familias de funciones. Un ejemplo de dicha familia está constituida por las funciones siguientes

$$\delta_a\left(x-x_0\right)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\,, \tag{3}$$

para distintos valores de a. Pueden verificar que

$$\int_I dx\, f\left(x\right)\delta_a\left(x-x_0\right)\rightarrow\begin{cases}f\left(x_0\right) & si \quad x_0\in I\\ \\ 0 & si \quad x_0\notin I\end{cases}\,, \tag{4}$$

cuando $a\rightarrow 0$. En ese sentido, decimos que $\delta_a\left(x-x_0\right)$ es una aproximante de la delta de Dirac. Todas las funciones aproximantes de la delta de Dirac son funciones que tienen un máximo alrededor de x_0 y que en el límite se anulan en todo punto, salvo en x_0 (en la figura se muestra la función $\delta_a\left(x-x_0\right)$ para $x_0=0$ y $a=0.5$). También es posible definir la



delta de Dirac en más dimensiones. En el caso que nos interesa a nosotros, lo relevante es saber que se puede definir la delta en tres dimensiones, que cumple

$$\int_I d^3\mathbf{r}\, f(\mathbf{r})\, \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & si \quad \mathbf{r}_0 \in V \\ & \\ 0 & si \quad \mathbf{r}_0 \notin I \end{cases} , \tag{5}$$

para toda función escalar f suave. La delta en tres dimensiones cumple propiedades análogas a la delta en una dimensión. Además, en coordenadas cartesianas se escribe en términos de un producto de deltas unidimensionales

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\ , \tag{6}$$

siendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ [1].

En este punto, ya podemos entender que la delta tridimensional nos va a permitir escribir una densidad de carga volumétrica que represente a una sola carga puntual q ubicada en $\mathbf{r}_0$. Noten que si definimos

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\ , \tag{7}$$

el campo eléctrico obtenido a partir de la expresión (1), reproduce el resultado conocido para el campo eléctrico de una carga puntual

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \tag{8}$$

[1] Ya verán más adelante cómo escribir la delta tridimensional en otros sistemas de coordenadas.

$$= \; k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \, q \, \delta^{(3)} \left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \, q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \, . \qquad (9)$$

Esto es justamente lo que queríamos mostrar: que es posible escribir una densidad de carga volumétrica asociada a una carga puntual. Como mencionamos al comienzo de esta sección, es relevante saber que cualquier distribución de carga se podrá escribir en términos de una densidad volumétrica de carga. Por ahora, es todo lo que necesitan saber. Y recuerden: cuando quieran hallar campos eléctricos no es necesario que pasen todo a densidades volumétricas usando la delta; utilicen las fórmulas para distribuciones lineales, superficiales o volumétricas (o para cargas puntuales), según sea el caso en consideración.