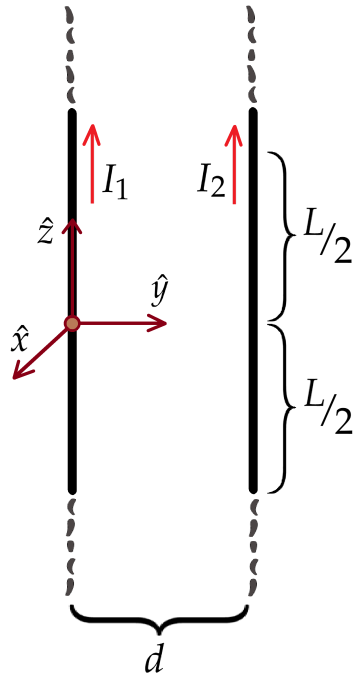
Guia 4, Ejercicio 54

$\boxed{54}$ Calcule la fuerza por unidad de longitud entre dos cables paralelos por los que circula una corriente de 30 A. La separación entre cables es de 2 cm. Estime hasta qué distancia por encima de los cables se verá afectada la indicación de una brújula. Considere los dos posibles sentidos de circulación de la corriente.

Nota: suponga que la intensidad del campo magnético terrestre en el lugar es de $0,5 \times 10^{-4}$ T y forma un ángulo de 30° con la vertical.

El sistema en cuestión se ve de la siguiente manera



Llamaremos 1 y 2 a los cables con corriente I_1 e I_2 respectivamente. El origen de coordenadas esta ubicado de forma tal que 1 coincida con el eje z, como se ve en la figura. Como el sistema es infinito, vamos a considerar una sección de longitud L.

Primero nos piden calcular la fuerza por unidad de longitud entre los cables. Para esto vamos a emplear la expresión de la fuerza magnética, dada por

$$\bar{F}_2 = \int_{C_2} I_2 \bar{d}l \times \bar{B}_1(\bar{r})$$

donde $\bar{F}_2$ es la fuerza magnética sobre 2 debida a 1 y C_2 es la sección de longitud L del cable 2. El campo magnético generado por 1 es el de un cable infinito con corriente I_1, esto es

$$\bar{B}_1(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

Como la fuerza se obtiene integrando sobre C_2, entonces necesitamos $\bar{B}_1(\bar{r})$ evaluado sobre

C_2, es decir, $\bar{r} = (0, d, z)$. El resultado es

$$\bar{B}_1(0, d, z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{x})$$

Sobre un intervalo de longitud L, la fuerza magnética resulta entonces

$$\bar{F}_2 = \int_{C_2} I_2 d\bar{l} \times \bar{B}_1(\bar{r}) = \int_{-L/2}^{L/2} I_2 dz\hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{x}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_{-L/2}^{L/2} dz(-\hat{y}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}\hat{y}$$

y la fuerza por unidad de longitud sera

$$\frac{\bar{F}_2}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\hat{y} = -9 \cdot 10^{-3}\frac{N}{m}$$

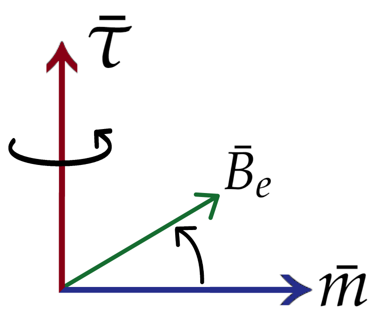
Donde usamos que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$, las corrientes son $I_{1/2} = 30\mathrm{A}$ y la distancia entre los cables es $d = 2\mathrm{cm} = 0{,}02\mathrm{m}$.

En la segunda parte del ejercicio nos dicen que se acerca una brújula a los cables y nos piden estudiar como se ve afectada la lectura de la misma.

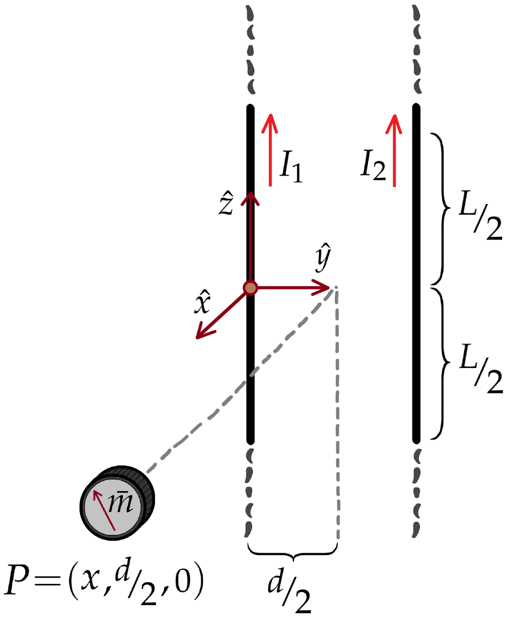
El funcionamiento de las brújulas esta basado en el torque que se genera sobre un dipolo magnético en presencia de un campo magnético externo. En el caso de la brújula, la aguja que nos da la lectura es la que actúa como dipolo magnético. Matemáticamente, el torque que siente el dipolo se escribe

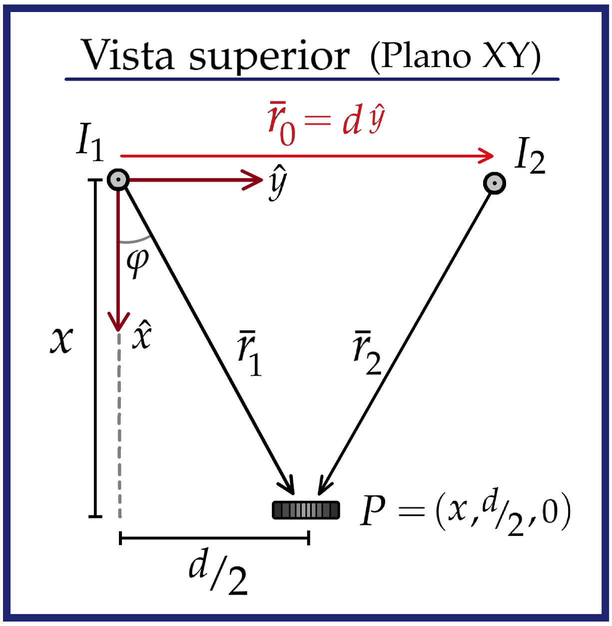
$$\bar{\tau} = \bar{m} \times \bar{B}_{ext}$$

donde $\bar{\tau}$ es el torque, $\bar{m}$ es el momento dipolar magnético y $\bar{B}_{ext}$ es el campo magnético externo. Las configuraciones de equilibrio para el dipolo son aquellas para los cuales el torque es nulo, por lo que $\bar{m}$ deberá ser paralelo o antiparalelo a $\bar{B}_e$. Utilizando la regla de la mano derecha se puede verificar que el torque generado siempre tiende a girar el dipolo en la dirección del campo magnético, por lo que esta es la dirección de equilibrio estable y la antiparalela sera un equilibrio inestable.



Para estudiar el efecto que tienen los cables sobre la lectura de la brújula, vamos a considerar el siguiente sistema





La brújula tendrá una posición $\bar{r}_1 = (x, \frac{d}{2}, 0)$, donde x nos indica la distancia al plano que contiene los cables.

Saber en que dirección apuntará la brújula es equivalente a conocer el campo magnético externo en ese punto. Este campo sera la superposición del campo terrestre y de los dos cables

$$\bar{B}_{ext}(\bar{r}_1) = \bar{B}_{terr}(\bar{r}_1) + \bar{B}_1(\bar{r}_1) + \bar{B}_2(\bar{r}_1)$$

De estos tres campos, el mas sutil de calcular es $\bar{B}_2(\bar{r}_1)$, asociado a 2. La razón es que, como este cable no se encuentra sobre el eje z, su dirección no sera simplemente $\hat{\varphi}$ sino alguna otra que desconocemos. Para calcular este campo, consideremos lo siguiente

$$\hat{\varphi} = \mathbf{R}\hat{r} = \frac{\mathbf{R}\bar{r}}{|\bar{r}|} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz que rota vectores 90° en sentido antihorario sobre el eje z (es decir, manda $\hat{x} \to \hat{y}$, $\hat{y} \to -\hat{x}$ y $\hat{z} \to \hat{z}$). Entonces, el campo magnético de un cable con corriente se escribe

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi|\bar{r}|}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi|\bar{r}|}\frac{\mathbf{R}\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\mathbf{R}\bar{r}}{|\bar{r}|^2}$$

luego, el campo magnético de un cable que no se encuentra sobre el eje z se obtiene realizando una traslación $\bar{r} \to \bar{r} - \bar{r}_0$. El campo resultante es

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{R}(\bar{r} - \bar{r}_0)}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^2}$$

Reemplazando los valores $I = I_2$, $\bar{r}_0 = d\hat{y}$ y evaluando sobre la brújula, $\bar{r} = \bar{r}_1 = (x, \frac{d}{2}, 0)$, tenemos

$$\bar{B}_2(\bar{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{\mathbf{R}((x\hat{x} + \frac{d}{2}\hat{y}) - d\hat{y})}{\left|(x\hat{x} + \frac{d}{2}\hat{y}) - d\hat{y}\right|^2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{x\mathbf{R}\hat{x} - \frac{d}{2}\mathbf{R}\hat{y}}{\left|x\hat{x} - \frac{d}{2}\hat{y}\right|^2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{x\hat{y} - \frac{d}{2}(-\hat{x})}{\frac{d^2}{4} + x^2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{x\hat{y} + \frac{d}{2}\hat{x}}{\frac{d^2}{4} + x^2}$$

La contribución de 1 es mas sencilla de calcular. Su campo magnético sera

$$\begin{aligned}
\bar{B}_1(\bar{r}_1) &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi|\bar{r}_1|}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}}(-\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}) \\
&= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}} \left(-\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}}\hat{y} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{-\frac{d}{2}\hat{x} + x\hat{y}}{\frac{d^2}{4} + x^2}
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos a suponer que el campo magnético terrestre $\bar{B}_{terr}$ es constante y que forma un ángulo de 30° con el eje z, entonces

$$\bar{B}_{terr} = B_0(-\cos(30^\circ)\hat{y} + \sin(30^\circ)\hat{z}) = B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) \quad \text{donde} \quad B_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-4} T$$

El campo magnético externo evaluado sobre la posición de la brújula sera entonces

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{ext}(\bar{r}_1) &= \bar{B}_{terr}(\bar{r}_1) + \bar{B}_1(\bar{r}_1) + \bar{B}_2(\bar{r}_1) \\
&= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{-\frac{d}{2}\hat{x} + x\hat{y}}{\frac{d^2}{4} + x^2} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{x\hat{y} + \frac{d}{2}\hat{x}}{\frac{d^2}{4} + x^2} \\
&= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\left[I_1 \left(-\frac{d}{2}\hat{x} + x\hat{y} \right) + I_2 \left(x\hat{y} + \frac{d}{2}\hat{x} \right) \right]}{\frac{d^2}{4} + x^2} \\
&= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\frac{d}{2}\left(I_2 - I_1\right)\hat{x} + x\left(I_2 + I_1\right)\hat{y}}{\frac{d^2}{4} + x^2}
\end{aligned}$$

Supongamos el caso $I_1 = I_2 = I$. El campo externo sera entonces

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{ext}(\bar{r}_1) &= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\frac{d}{2}\left(I - I\right)\hat{x} + x\left(I + I\right)\hat{y}}{\frac{d^2}{4} + x^2} \\
&= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{x}{\frac{d^2}{4} + x^2}\hat{y} \\
&= \bar{B}_{terr} + \bar{B}_{cables}
\end{aligned}$$

Para tener una idea de a que distancias es notable el campo de los cables, vamos a pedir que $|\bar{B}_{terr}| = |\bar{B}_{cables}|$. Esta condición define un valor de x, y el problema se reduce a buscar las raíces de una cuadrática, el resultado es

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{x}{\frac{d^2}{4} + x^2} \quad \longrightarrow \quad x \approx 2{,}4m$$

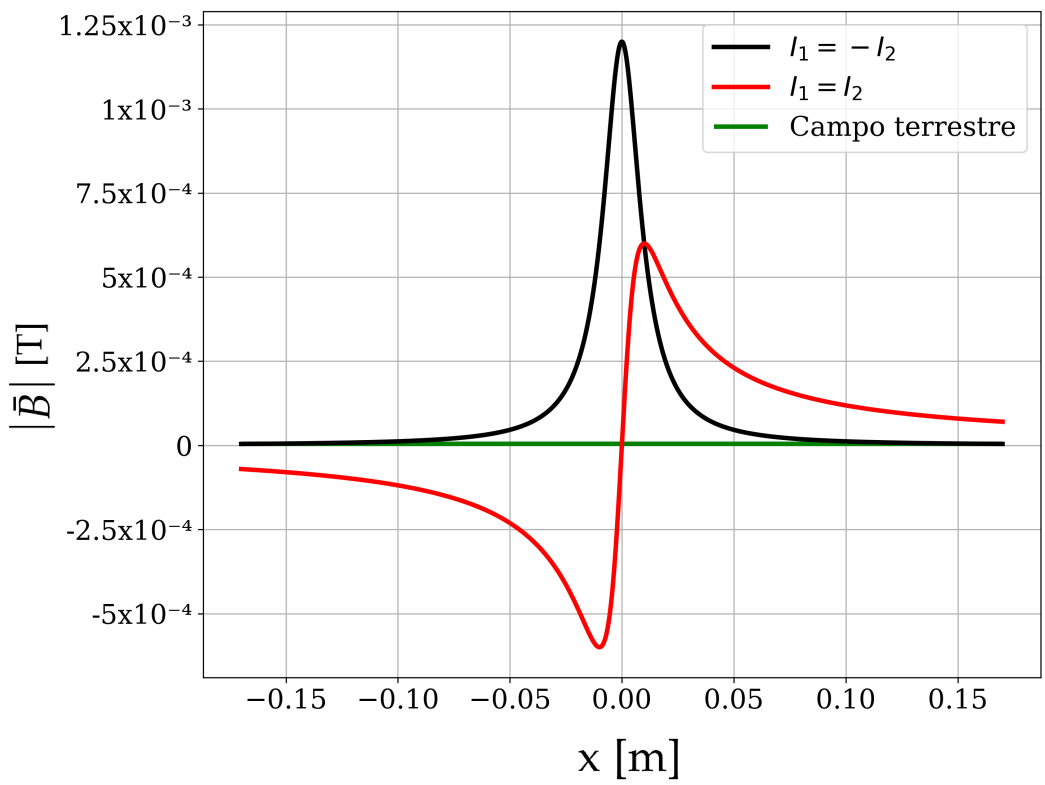
Si suponemos ahora que $I_1 = -I_2 = I$, el campo externo sera

$$\begin{aligned} \bar{B}_{ext}(\bar{r}_1) &= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\frac{d}{2}(-I - I)\,\hat{x} + x\,(-I + I)\,\hat{y}}{\frac{d^2}{4} + x^2} \\ &= B_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}) - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{\frac{d^2}{4} + x^2}\hat{x} \\ &= \bar{B}_{terr} + \bar{B}_{cables} \end{aligned}$$

Nuevamente, vamos a pedir que $|\bar{B}_{terr}| = |\bar{B}_{cables}|$. En este caso, obtenemos que

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{\frac{d^2}{4} + x^2} \quad \longrightarrow \quad x \approx 0{,}15m = 15cm$$

Estos resultados reflejan el hecho de que el campo magnético de la tierra es muy débil. La siguiente figura compara el modulo de estos campos sobre las posiciones $\bar{r}_1 = (x, \frac{d}{2}, 0)$.



Ejercicio resuelto por Lautaro Kinalczyk, ayudante de 2da.