Guia 2, Ejercicio 22

$\boxed{22}$ Tres esferas conductoras A_1, A_2 y A_3, concéntricas de radios a_1, a_2 y a_3 ($a_1 < a_2 < a_3$) están conectadas, respectivamente, a tres baterias V_1, V_2 y V_3. A_1 es maciza, y A_2 y A_3 son huecas (de espesor despreciable respecto de su radio, pero no nulo).

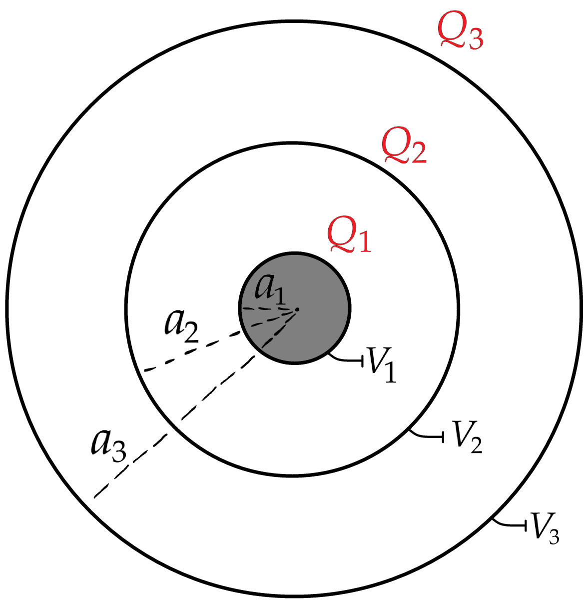
Datos: $a_1 = a$, $a_2 = 2a$ y $a_3 = 3a$; $V_1 = V_0$, $V_2 = V_3 = 2V_0$. Suponer además que el potencial se mide de modo que en el infinito es nulo, es decir: $V_\infty = 0$.

(a) ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas? Detallar cómo se distribuye espacialmente.

(b) Suponer ahora que todas las esferas se desconectan de las baterias y, a continuación, la esfera A_2 se conecta a tierra. Calcular las cargas (detallar su distribución) y los potenciales de cada esfera.

(c) Partiendo de la situación planteada en el inciso anterior, se separa ahora de la configuración al conductor A_3. ¿Qué sucede en este caso con las cargas de las esferas A_1 y A_2?. Justificar.

El sistema en cuestión se ve de la siguiente manera:



En el ejercicio nos piden considerar $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$ y los potenciales $V_1 = V_0$, $V_2 = 2V_0$ y $V_3 = 2V_0$.

Tenemos 3 conductores esféricos concéntricos, siendo el primero macizo. Cada conductor esta conectado a una batería que lo mantiene a determinado potencial. Una vez el sistema llega al equilibrio cada conductor almacena una carga Q_i desconocida, la cual (debido a la simetría esférica del sistema) se distribuye uniformemente sobre su superficie.

Ítem a)

El potencial electrostático en todo el espacio se puede obtener mediante superposición, utilizando el potencial que genera cada esfera cargada. Recordemos el potencial de una esfera cargada uniformemente en superficie con potencial nulo en el infinito

$$V_i(r) = \begin{cases} \frac{kQ_i}{r} & r > a_i \\ \frac{kQ_i}{a_i} & r < a_i \end{cases}$$

Por superposición, el potencial en todo el espacio queda de la siguiente manera

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kQ_1}{a_1} + \frac{kQ_2}{a_2} + \frac{kQ_3}{a_3} & r \leq a_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{a_2} + \frac{kQ_3}{a_3} & a_1 \leq r \leq a_2 \\ \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{r} + \frac{kQ_3}{a_3} & a_2 \leq r \leq a_3 \\ \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{r} + \frac{kQ_3}{r} & a_3 \leq r \end{cases} \tag{1}$$

Para despejar el valor de las cargas Q_i utilizamos el dato del potencial sobre los conductores, esto es

$$\begin{aligned} V(a_1) = V_1 \quad &\longrightarrow \quad V_1 = \frac{kQ_1}{a_1} + \frac{kQ_2}{a_2} + \frac{kQ_3}{a_3} \\ V(a_2) = V_2 \quad &\longrightarrow \quad V_2 = \frac{kQ_1}{a_2} + \frac{kQ_2}{a_2} + \frac{kQ_3}{a_3} \\ V(a_3) = V_3 \quad &\longrightarrow \quad V_3 = \frac{kQ_1}{a_3} + \frac{kQ_2}{a_3} + \frac{kQ_3}{a_3} \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, no necesitamos nada mas. Para despejar estas ecuaciones de forma simple, paso dividiendo la constante eléctrica k y escribo las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{V_1}{k} \\ \frac{V_2}{k} \\ \frac{V_3}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{V_1}{k} \\ \frac{V_2}{k} \\ \frac{V_3}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa y multiplicamos. Reemplazando los valores $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$, $V_1 = V_0$, $V_2 = 2V_0$ y $V_3 = 2V_0$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1 a_2 (V_2 - V_1)}{k(a_1 - a_2)} \\ \frac{V_1 a_1 a_2 (a_2 - a_3) - V_2 a_2^2 (a_1 - a_3) + V_3 a_2 a_3 (a_1 - a_2)}{k(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} \\ \frac{V_2 a_2 a_3 - V_3 a_3^2}{k(a_2 - a_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2V_0 a}{k} \\ \frac{2V_0 a}{k} \\ \frac{6V_0 a}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

Una vez que despejamos las cargas, el potencial queda

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ -\frac{2V_0 a}{r} + 3V_0 & a \leq r \leq 2a \\ 2V_0 & 2a \leq r \leq 3a \\ \frac{6V_0 a}{r} & 3a \leq r \end{cases}$$

Que el potencial en las regiones $r \leq a$ y $2a \leq r \leq 3a$ sea constante era de esperar si consideramos resolver este sistema mediante Laplace $\bar{\nabla}^2 V = 0$. Tomemos como ejemplo la región $2a \leq r \leq 3a$. Las superficies que lo delimitan son $r = 2a$ y $r = 3a$ y en ambas el potencial vale $2V_0$. Entonces $V(r) = 2V_0$ es solución a la ecuación de Laplace (toda constante lo es) y además cumple las condiciones de contorno $\longrightarrow$ Por existencia y unicidad esa es la única solución.

Calculo del potencial mediante Laplace

Veamos como calcular el potencial de esta distribución utilizando únicamente la ecuación de Laplace $\bar{\nabla}^2 V = 0$. Recordemos que esta ecuación vale únicamente para las regiones donde no tenemos carga. En este caso, considerando que $V(\bar{r}) = V(r)$, tenemos 4 regiones

1) $0 < r < a \begin{cases} \bar{\nabla}^2 V_1(r) = 0 \\ V_1(0) \neq \infty \\ V_1(a) = V_0 \end{cases}$ **2)** $a < r < 2a \begin{cases} \bar{\nabla}^2 V_2(r) = 0 \\ V_2(a) = V_0 \\ V_2(2a) = 2V_0 \end{cases}$

3) $2a < r < 3a \begin{cases} \bar{\nabla}^2 V_3(r) = 0 \\ V_3(2a) = 2V_0 \\ V_3(3a) = 2V_0 \end{cases}$ **4)** $3a < r < \infty \begin{cases} \bar{\nabla}^2 V_4(r) = 0 \\ V_4(3a) = 2V_0 \\ V_4(\infty) = 0 \end{cases}$

La única condición de contorno 'extraña' que estamos pidiendo es que el potencial en el origen este bien definido, lo cual es razonable. Un potencial infinito daría lugar a un campo eléctrico infinito con energía infinita.

El Laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\bar{\nabla}^2 V_i(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_i(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V_i(r)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 V_i(r)}{\partial\phi^2}$$

Donde i indica que región del potencial estamos considerando. La dependencia únicamente radial simplifica drásticamente la ecuación, y queda

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_i(r)}{\partial r}\right) = 0$$

Despejando el potencial

$$\begin{aligned}
\cancel{\frac{1}{r^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_i(r)}{\partial r}\right) &= 0\\
r^2\frac{\partial V_i(r)}{\partial r} &= A_i\\
\frac{\partial V_i(r)}{\partial r} &= \frac{A_i}{r^2}\\
\boxed{V_i(r) = -\frac{A_i}{r} + B_i}
\end{aligned}$$

Sobre cada una de las 4 regiones el potencial tiene la misma dependencia. Aplicar las 2 condiciones de contorno que tenemos sobre cada región nos da las siguientes ecuaciones

$$\textbf{1)}\begin{cases} A_1 = 0\\ B_1 = V_0\end{cases} \qquad \textbf{2)}\begin{cases} -\frac{A_2}{a} + B_2 = V_0\\ -\frac{A_2}{2a} + B_2 = 2V_0\end{cases}$$

$$\textbf{3)}\begin{cases} -\frac{A_3}{2a} + B_3 = 2V_0\\ -\frac{A_3}{3a} + B_3 = 2V_0\end{cases} \qquad \textbf{4)}\begin{cases} -\frac{A_4}{3a} + B_4 = 2V_0\\ B_4 = 0\end{cases}$$

Tenemos 4 sistemas de ecuaciones, cada sistema tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas, así que solo queda despejar. Las constantes A_i y B_i resultan

$$\textbf{1)}\begin{cases} A_1 = 0\\ B_1 = V_0\end{cases} \qquad \textbf{2)}\begin{cases} A_2 = 2V_0 a\\ B_2 = 3V_0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} A_3 = 0 \\ B_3 = 2V_0 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} A_4 = -6V_0 a \\ B_4 = 0 \end{cases}$$

Las cuales coinciden con lo despejado anteriormente. Como algunas de las regiones comparten frontera, las condiciones de contorno nos garantizan la continuidad del potencial de forma directa.

Ítem b)

En el segundo ítem nos dicen que se desconectan las baterías y se conecta el segundo conductor (de carga Q_2) a tierra. Nos piden calcular las cargas y los potenciales sobre los conductores.

Cuando se desconectan las baterías, las cargas Q_i sobre los conductores quedan fijas. Luego se conecta el segundo conductor a tierra, la cual actúa como fuente de cargas positivas o negativas, y cambia el valor de Q_2 a Q_2' de forma tal que $V(2a) = 0$.

El potencial estará dado entonces por (1), donde Q_1 y Q_3 las mismas que antes y Q_2 paso a ser Q_2' desconocida. Evaluando este potencial sobre la superficie del segundo conductor tenemos

$$V(2a) = \frac{kQ_1}{2a} + \frac{kQ_2'}{2a} + \frac{kQ_3}{3a} = 0$$

Despejando Q_2' obtenemos que

$$\boxed{Q_2' = -\frac{2V_0 a}{k}}$$

Ya tenemos Q_1, Q_2' y Q_3. Reemplazando en (1) el potencial nos queda

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq a \\ -\frac{2V_0 a}{r} + V_0 & a \leq r \leq 2a \\ -\frac{4V_0 a}{r} + 2V_0 & 2a \leq r \leq 3a \\ \frac{2V_0 a}{r} & 3a \leq r \leq \infty \end{cases}$$

Sobre el primer conductor, el potencial sera $V(a) = -V_0$, para el segundo tendremos $V(2a) = 0$ y para el tercero $V(3a) = \frac{2}{3}V_0$.

1. Ítem c)

En este ítem nos dicen que, partiendo de la situación anterior, se separa al tercer conductor de la configuración. Luego nos preguntan que pasa con las cargas sobre los otros dos conductores.

La carga sobre el primer conductor no cambia, la única forma de que cambie es que se conecte el mismo a una batería o tierra (que actúan como fuentes de cargas).

Por otro lado, el segundo conductor necesita mantenerse a potencial nulo ya que esta conectado a tierra. Si quitamos el tercer conductor, su contribución al potencial total pasara a ser nula. Luego, el potencial total sobre el segundo conductor cambiara de valor y, para mantenerse a potencial nulo, debe intercambiar cargas con la tierra y así modificar el valor de su carga de Q_2' a Q_2'', desconocido.

Podemos hacer el mismo procedimiento que hicimos recién, el potencial estará dado por (1), donde cambiamos Q_2 a Q_2'', Q_1 es el mismo y $Q_3 = 0$ ya que en este caso el tercer conductor no esta. Evaluando este potencial sobre la superficie del segundo conductor tenemos

$$V(2a) = \frac{kQ_1}{2a} + \frac{kQ_2''}{2a} = 0$$

Despejando Q_2'' obtenemos que

$$\boxed{Q_2' = -Q_1 = \frac{2V_0 a}{k}}$$

El potencial es entonces el de 2 esferas concéntricas de radios a y $2a$, con cargas $Q_1 = -\frac{2V_0 a}{k}$ y $Q_2'' = \frac{2V_0 a}{k}$ respectivamente

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq a \\ V_0(1 - \frac{2a}{r}) & a \leq r \leq 2a \\ 0 & 2a \leq r \leq \infty \end{cases}$$

Ejercicio resuelto por Lautaro Kinalczyk, ayudante de 2da.