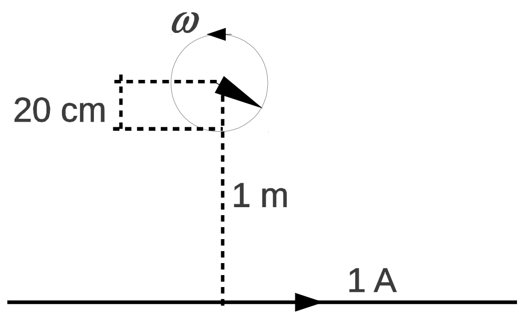
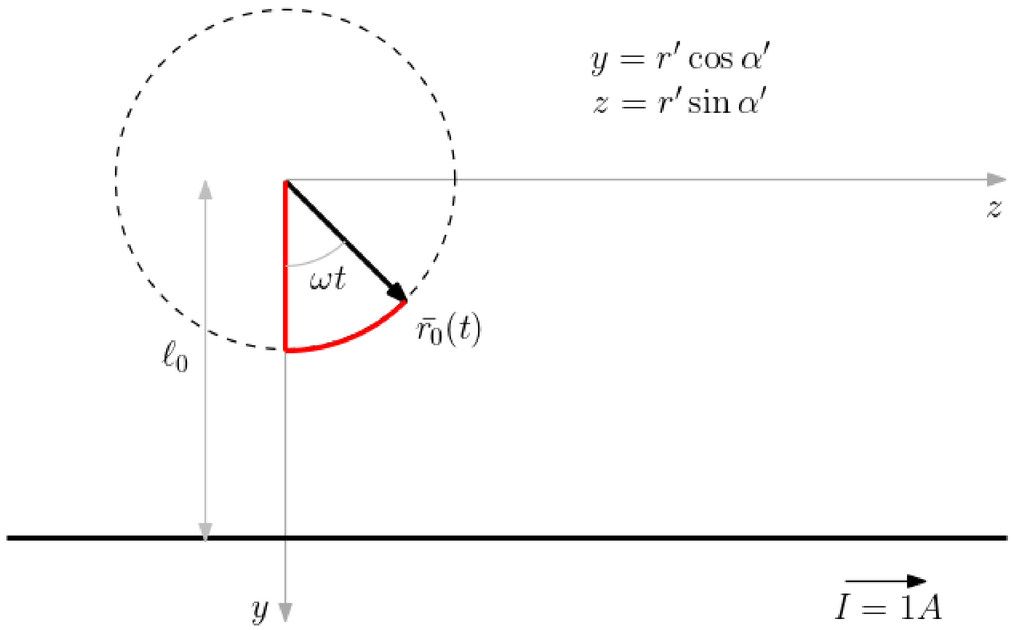
71 Un cable rectilíneo muy largo, conduce una corriente de 1A. A 1m del cable se encuentra el extremo de una aguja de 20 cm de largo que gira en torno de dicho extremo en forma coplanar al cable, con una velocidad angular $\omega = 20\pi s^{-1}$. Calcular la fem inducida entre los extremos de la aguja en función del tiempo.



Comencemos con un dibujo de la situación en el que agregamos un sistema de coordenadas centrado en el centro de giro de la aguja, a la que representamos con un vector $\mathbf{r_0}(t)$. El eje x sería normal y saliente a la hoja para que la terna de ejes sea derecha. $\ell_0 = 1m$, $r_0 = |\mathbf{r_0}(t)| = 20cm$. Como la aguja está girando con velocidad angular constante ω, tenemos que

$$\mathbf{r_0}(t) = r_0 \left[\cos(\omega t)\,\hat{y} + \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{z}\right] \ . \tag{1}$$



Para hallar la fem inducida entre los extremos de $\mathbf{r_0}(t)$ lo que vamos a hacer es pensar que $\mathbf{r_0}(t)$ junto con el camino marcado en rojo en la figura constituyen un circuito cerrado. Vamos a calcular la fem inducida por la variación del flujo de campo magnético a través de este circuito y, como sobre las trayectorias rojas el potencial eléctrico no cambia (las partes rojas están estáticas y el campo magnético entonces no genera movimiento de los portadores de carga), la fem encontrada será la fem inducida entre los extremos de la aguja.

Calculemos entonces la fem inducida sobre el circuito cerrado. Para ello necesitamos hallar la variación en el tiempo del flujo de campo magnético Φ_B a través de ese circuito. Para hallar el flujo, necesitamos el campo magnético $\mathbf{B}$ generado por el cable con corriente $I = 1A$ sobre el circuito, que está contenido en el plano de la figura. Dicho campo magnético será envolvente al hilo, pero sobre el plano tendrá dirección perpendicular al mismo y sentido saliente de la hoja. Su valor sobre el plano dependerá sólo de la distancia al hilo. El campo generado por el cable sobre el plano $x = 0$ para un valor y de la coordenada es

$$\mathbf{B}(x = 0, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\,|y - \ell_0|}\hat{x}\,. \tag{2}$$

El flujo sobre el circuito va a variar en el tiempo no porque varíe el campo (que vemos que no depende del tiempo) sino porque el vector $\mathbf{r_0}(t)$ está en movimiento y entonces el área del circuito se hará más grande con el tiempo. El flujo del campo $\mathbf{B}$ a un tiempo t sobre el circuito será

$$\Phi_B = \iint_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_0^{\omega t} d\alpha' \int_0^{r_0} dr'\, r' \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\,|r'\cos\alpha' - \ell_0|}\right)\,, \tag{3}$$

donde llamamos r' y α' a las coordenadas polares sobre el plano de la figura (con el ángulo α' medido desde el eje y hacia el z); en términos de esas coordenadas polares escribimos que $y = r'\cos\alpha'$.

El valor de la fem inducida sobre todo el circuito estará dado por la derivada temporal de la expresión anterior, que sale en forma sencilla antes de integrar usando el teorema fundamental del cálculo[1]

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_0^{\omega t} d\alpha' \int_0^{r_0} dr'\, r' \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\,|r'\cos\alpha' - \ell_0|}\right) = -\int_0^{r_0} dr'\, r'\,\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\,|r'\cos(\omega t) - \ell_0|} \tag{4}$$

Esta última integral puede resolverse (noten que de acuerdo a la figura, como $\ell_0 > r_0$, resulta $|r'\cos(\omega t) - \ell_0| = \ell_0 - r'\cos(\omega t)$) y se obtiene finalmente

$$\varepsilon = -\int_0^{r_0} dr'\, r'\,\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\,|r'\cos(\omega t) - \ell_0|} = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos^2(\omega t)}\left\{\ell_0 \log\left[\frac{\ell_0}{\ell_0 - r_0\cos(\omega t)}\right] + r_0\cos(\omega t)\right\}\,, \tag{5}$$

que, como dijimos al comienzo, coincide con la fem generada entre los extremos de la aguja, dado que el potencial eléctrico es constante sobre los cables marcados en rojo en la figura.

Una forma alternativa de calcular la fem

Una forma alternativa de hallar la fem consiste en hallar el trabajo que realiza el campo magnético sobre los portadores de carga de la aguja. Dicho trabajo se puede obtener partiendo de la expresión de la fuerza de Lorentz (con $\mathbf{E} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,. \tag{6}$$

Para hallar el trabajo que hace el campo para llevar una carga desde un extremo de la aguja al otro, tenemos que integrar la fuerza por unidad de carga sobre la aguja. Dicha cantidad, por la expresión de la fuerza de Lorentz escrita arriba, está asociada al valor de $\mathbf{B}$ y a la velocidad $\mathbf{v}$ de los portadores de carga (que se están moviendo a velocidad $v = \omega r'$ porque la aguja está girando

[1] Que para el tipo de integral que nos concierne en este caso nos dice que $\frac{d}{dt}\int_0^{f(t)} dx\, g(x) = g(f(t))f'(t)$.

con velocidad angular ω). Como $\mathbf{v}$ es en este caso perpendicular al campo $\mathbf{B}(x=0,y,z)$ sobre el plano, el modulo de la fuerza de Lorentz de la ecuación (6) sobre un portador de carga q es $F = qvB$. Tenemos que el trabajo que hace el campo sobre dicho portador de carga para llevarlo desde el centro al extremo de la aguja está dado por

$$W = \int_0^{r_0} dr' \frac{F}{q} = \int_0^{r_0} dr' \, vB = \int_0^{r_0} dr' \, \omega r' \frac{\mu_0 I}{2\pi \left| r' \cos(\omega t) - \ell_0 \right|} \, . \tag{7}$$

Como pueden ver esta es la misma integral que hallamos en la ecuación (5) (salvo un signo), por lo que el resultado coincide con el que habíamos calculado por el otro método. Vemos nuevamente reforzada la idea de que la fem es una fuerza electromotriz; la presencia de una fem no nula se manifiesta en un trabajo realizado sobre los portadores de carga.

Noten por último que esta fem se opone al aumento de flujo de campo magnético, como es de esperar. Esto se puede ver notando que la fuerza F que actúa sobre los portadores de carga de la aguja (y está dada por la ecuación (6)) tiene dirección desde el origen de la aguja hacia el extremo de la misma (para portadores de carga q positivos). Esto genera entonces una corriente en el sentido del origen hacia el extremo de la aguja y dicha corriente será la causa de que aparezca un nuevo campo magnético que, sobre el circuito, tendrá sentido opuesto al campo $\mathbf{B}$ original generado por el cable. Vemos entonces una manifestación explícita de la Ley de Lenz.