Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 4

Potencial eléctrico

Supongamos una carga puntual q_0 en la posición $\vec{\mathbf{r}}'$. El campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = k\, q_0 \dfrac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$

Introducimos la función escalar $V(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{k\, q_0}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$

Se cumple que: $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\nabla} V(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathrm{grad}(V)(\vec{\mathbf{r}})$ donde el gradiente de V es un *operador vectorial*,

que en coordenadas cartesianas es $\vec{\nabla} V(\vec{\mathbf{r}}) = (\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z})$

Esto lo podemos demostrar así:

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{k\, q_0}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r'}}|}$$

en cartesianas:

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = V(x, y, z) = \frac{k\, q_0}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-k\, q_0\ (x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -E_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-k\, q_0\ (y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -E_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-k\, q_0\ (z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -E_z$$

ya que $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = k\, q_0\, \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r'}}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r'}}|^3}$

Una forma alternativa de demostrarlo es usando *notación indicial*, $\vec{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, x_3)$

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\, q_0\, |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^{-1} = k\, q_0\, \left[\sum_{l=1}^{3}(x_l - x_l')^2\right]^{-1/2}$$

$$(\vec{\nabla} V)_j = \frac{\partial V}{\partial x_j} = -\frac{k\, q_0}{2}\left[\sum_{l=1}^{3}(x_l - x_l')^2\right]^{-3/2} 2\,(x_j - x_j') = -k\, q_0\, (x_j - x_j')\left[\sum_{l=1}^{3}(x_l - x_l')^2\right]^{-3/2} = -(\vec{\mathbf{E}})_j$$

Si ahora tenemos N cargas puntuales q_i definimos la función escalar (por superposición):

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\, q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'_\mathbf{i}}|}$$

que cumple

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\nabla} V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'_\mathbf{i}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'_\mathbf{i}}|^3}$$

A esta función escalar la llamamos el *potencial eléctrico*.

Notemos que *la función potencial está definida a menos de una constante aditiva* (es decir, si le sumamos una constante, sigue cumpliendo que su gradiente es el campo eléctrico):

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\, q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'_\mathbf{i}}|} + C$$

Si pedimos (imponemos) $V(\infty) = 0 \rightarrow C = 0$

Para distribuciones continuas en volumen, $V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{k\,\rho(\overrightarrow{\mathbf{r}'})}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}|} d\mathcal{V}'$

con expresiones correspondientes para distribuciones en superficie o en una curva.

Suponemos en esa expresión (de cálculo del potencial por integración directa) que la distribución está acotada a una región del espacio.

Notemos que la obtención del potencial por integración directa involucra solamente una integral y no tres como para el campo eléctrico.

De todas formas en algunas situaciones es más conveniente obtener el campo eléctrico utilizando la ley de Gauss (como vimos) y calcular el potencial integrando el campo eléctrico, de forma que se satisfaga que

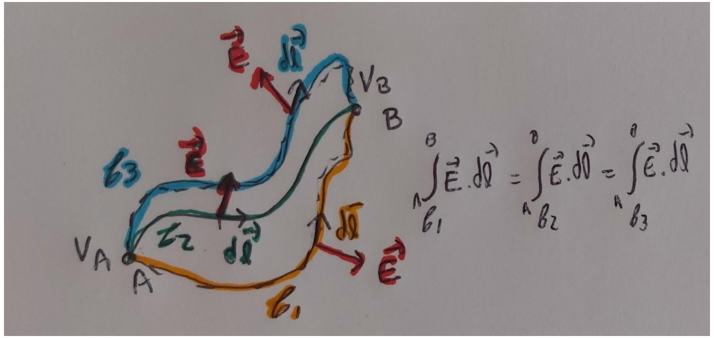
$-\overrightarrow{\nabla} V = \overrightarrow{\mathbf{E}}$

Lo importante es que la función potencial existe siempre (para el caso electrostático), lo cual nos está diciendo algo importante sobre la fuerza eléctrica...

Si traemos una carga de prueba q, la fuerza eléctrica que siente en el campo eléctrico (generado por otras cargas) es $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} = -q\vec{\nabla}V = -\vec{\nabla}U,\quad \text{con } U = q\,V(\vec{\mathbf{r}})$

Entonces (en electrostática) *la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa*

La energía potencial electrostática es $U = q\,V$



Unidades: $[U] = J\ (\text{Joule}) \ \rightarrow\ [V] = J/C = V\ (\text{Volt})$

(castellanizadas: “Julios”, “Voltios”)

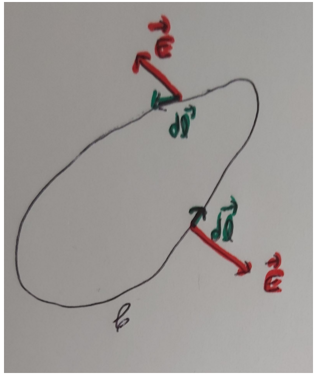
Como $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V \ \rightarrow\ [E] = [V]/[L] = V/m$

El trabajo de la fuerza eléctrica en ir de un punto A a un punto B es entonces,

$$W_{\mathbf{F}_\mathbf{E}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \int_A^B q\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = -\Delta U = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

$$\rightarrow \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = V_A - V_B \qquad \text{(no depende del camino)}$$

Si tomamos una curva cerrada (o sea, A=B),

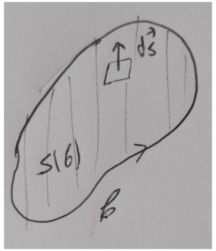


Circulación --->
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = 0$$

Esto vale para cualquier curva cerrada que uno dibuje en el espacio !

Recordemos otro teorema de Mate 3, el *Teorema de Stokes o Teorema del rotor*,

Si $\vec{\mathbf{A}}$ es un campo “bueno”, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \int_{S(\mathcal{C})} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}}$ donde $S(\mathcal{C})$ es una superficie encerrada por $\mathcal{C}$



y aparece un nuevo *operador vectorial, el rotor* (da una idea de la circulación por unidad de área)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \mathrm{rot}(\vec{\mathbf{A}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Si aplicamos el teorema del rotor al campo eléctrico,

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}} = \int_{S(\mathcal{C})} (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0, \quad \forall\, S(\mathcal{C}) \quad \rightarrow \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}} = 0$$

Este resultado lo podemos obtener también directamente de $\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\nabla} V$ y aplicando la definición del rotor (usando que las derivadas segundas cruzadas son iguales), es decir usando el hecho de que vale siempre que rot(grad)=0.

El campo eléctrico en electrostática cumple:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}} = 0$$

La primer ecuación se mantiene aún cuando hay variación temporal, la segunda ecuación se modifica.

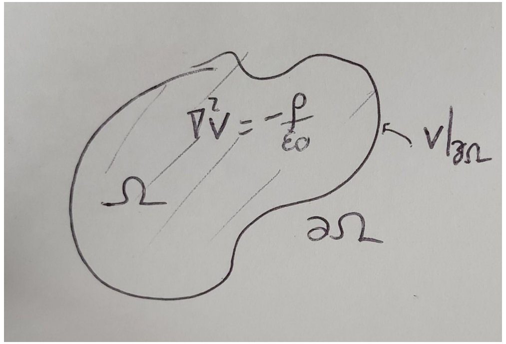
Si combinamos el hecho de que $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$ y que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\rightarrow$ $\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Donde $\nabla^2 V = \mathrm{lapl}(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ es el *laplaciano* de V

Esta *ecuación diferencial en derivadas parciales* se denomina ecuación de Poisson (también se aplica al potencial gravitatorio).

Esta ecuación es ampliamente conocida por los matemáticos y se puede demostrar que, dada una región en el espacio y *condiciones de borde (o de contorno)* sobre el contorno que encierra a esta región, que pueden ser de Dirichlet (dando el valor de V en los contornos) o de Neumann (dando el valor de la derivada normal de V en los contornos), entonces existe solución y es única !



Miremos el potencial eléctrico, para el caso de una carga puntual q_0 en el origen

$$V(r) = \frac{k\, q_0}{r}$$

Si traemos un carga de prueba q desde el infinito hasta una distancia r de la carga q_0 el trabajo que hace la fuerza eléctrica contra nosotros es $W_{\mathbf{F_E}}(\infty \rightarrow r) = -\Delta U = U(\infty) - U(r) = q[V(\infty) - V(r)] = -q\, V(r)$

por lo tanto el trabajo que hacemos nosotros es $W = qV(r)$ es decir que

$V(r)$ representa el *trabajo por unidad de carga* que hay que realizar para traer una carga a la posición r en ese potencial eléctrico.

Energía de un sistema de cargas

Es la energía (trabajo) que se necesita para “armar” una configuración dada de cargas.

Traigo la 1er carga q_1, a la posición $\overrightarrow{\mathbf{r_1}}$ y como no había nada no tengo que hacer ningún trabajo.

Traigo la 2da carga q_2 a la posición $\overrightarrow{\mathbf{r_2}}$, el trabajo es $W_2 = q_2 V_1(\overrightarrow{\mathbf{r_2}}) = \dfrac{k\ q_2\ q_1}{|\overrightarrow{\mathbf{r_2}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}|} = U_{21} = U_{12}$

Traigo la 3er carga, $W_3 = q_3 V_1(\overrightarrow{\mathbf{r_3}}) + q_3 V_2(\overrightarrow{\mathbf{r_3}}) = U_{31} + U_{32}$

El trabajo hasta aquí es $W = W_2 + W_3 = U_{21} + U_{31} + U_{32}$

Traigo la 4ta carga $W_4 = q_4 V_1(\overrightarrow{\mathbf{r_4}}) + q_4 V_2(\overrightarrow{\mathbf{r_4}}) + q_4 V_3(\overrightarrow{\mathbf{r_4}}) = U_{41} + U_{42} + U_{43}$

El trabajo hasta aquí es $W = W_2 + W_3 + W_4 = U_{21} + U_{31} + U_{32} + U_{41} + U_{42} + U_{43}$

Generalizando, el trabajo total se puede escribir como:

$$U = W = \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=1}^{m-1} U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1, n\neq m}^{N} U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} q_m \sum_{n=1, n\neq m}^{N} V_n(\overrightarrow{\mathbf{r_m}}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} q_m V_m$$

Donde usamos que $U_{mn} = U_{nm}$ y definimos $V_m = \sum_{n=1, n\neq m}^{N} V_n(\overrightarrow{\mathbf{r_m}})$

Llamamos a U la *energía almacenada en la configuración de cargas*.

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} q_m V_m}$$

Para una distribución continua de cargas en volumen es:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\overrightarrow{\mathbf{r}})\, V(\overrightarrow{\mathbf{r}})\, d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\overrightarrow{\mathbf{r}})\, V(\overrightarrow{\mathbf{r}})\, d\mathcal{V}}$$

Extendemos la integral a todo el espacio haciendo la densidad = 0 afuera del volumen de carga

Usamos Gauss, $\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \epsilon_0 \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} \rightarrow U = \dfrac{\epsilon_0}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} V(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) \, d\mathcal{V}$

y aplicamos la identidad $\vec{\nabla} \cdot (V \, \vec{\mathbf{E}}) = V \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\nabla} V = V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$

$$\rightarrow V \, (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla} \cdot (V \, \vec{\mathbf{E}}) + |\vec{\mathbf{E}}|^2$$

reemplazamos en la integral de volumen que nos da la energía,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot (V \, \vec{\mathbf{E}}) \, d\mathcal{V} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\mathbf{E}}|^2 \, d\mathcal{V}$$

para la primer integral usamos el teo. divergencia, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot (V \, \vec{\mathbf{E}}) \, d\mathcal{V} = \oint_{S(\mathbb{R}^3)} V \, \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0$

donde usamos que el campo eléctrico se anula en el infinito (el “borde” de todo el espacio).

$$\rightarrow \quad \boxed{U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\mathbf{E}}|^2 \, d\mathcal{V}}$$

y podemos definir una *densidad de energía eléctrica* $\rho_U = \dfrac{\epsilon_0 \, |\vec{\mathbf{E}}|^2}{2}$

Podemos interpretar esto como que al crear un campo eléctrico almacenamos una energía, que está distribuida en todo el espacio, con esa densidad de energía.

Algo más…

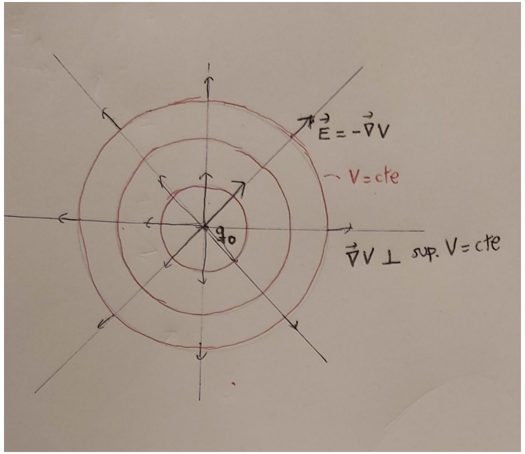
Definimos las *superficies equipotenciales* como las superficies en donde el potencial V = cte

(si estamos en dos dimensiones, en el plano, definimos las curvas equipotenciales, donde V=cte).

Por ejemplo, para el caso del potencial de una carga en el origen, sabemos

$$V(r) = \frac{k\, q_0}{r}$$

y las superficies equipotenciales son las superficies dadas por V=cte, o sea r=cte, es decir, superficies esféricas.



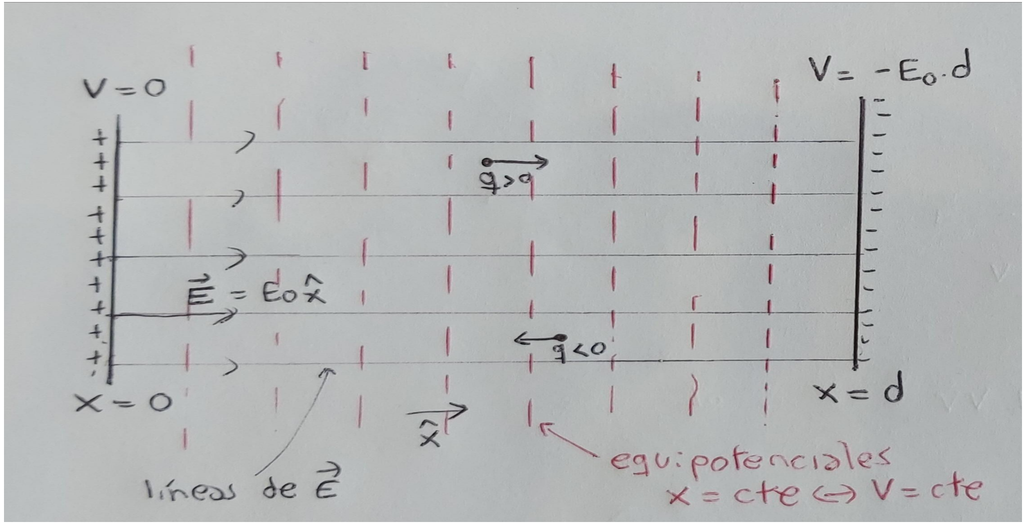
Notemos que las *líneas de campo eléctrico* (que en este caso son radiales) son *ortogonales a las superficies equipotenciales*.

Esto vale siempre, ya que el gradiente de V (que es el campo eléctrico) es ortogonal a las superficies de V=cte.

Si solamente actúa la fuerza eléctrica (conservativa) la *energía total se conserva*, es decir energía cinética más energía potencial = constante.

Si una carga de prueba q > 0, es dejada libre (con velocidad inicial = 0) se va a mover en la dirección perpendicular a las equipotenciales (dirección del campo eléctrico), y de las equipotenciales con V mayor a las de V menor, ganando energía cinética. Si la carga de prueba es q < 0 entonces se mueve de las equipotenciales de V menor a las de V mayor, también ganando energía cinética (esto ocurre ya que U= qV).

Consideremos el siguiente potencial de ejemplo, $V(x) = -E_0\, x$, definido entre la posición $x = 0$ y $x = d$ el campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V = E_0\, \hat{\mathbf{x}}$ es decir un campo uniforme entre $x = 0$ y $x = d$ que corresponde al campo entre dos placas (infinitas) paralelas a distancia d entre sí.



Una carga q > 0 soltada entre las dos placas se mueve en la dirección x positiva (es decir, de V mayor a V menor) disminuyendo su U=q V y ganando energía cinética.

Una carga q < 0 soltada entre las dos placas se mueve en la dirección x negativa (es decir de V menor a V mayor) disminuyendo su U= q V y ganando energía cinética.