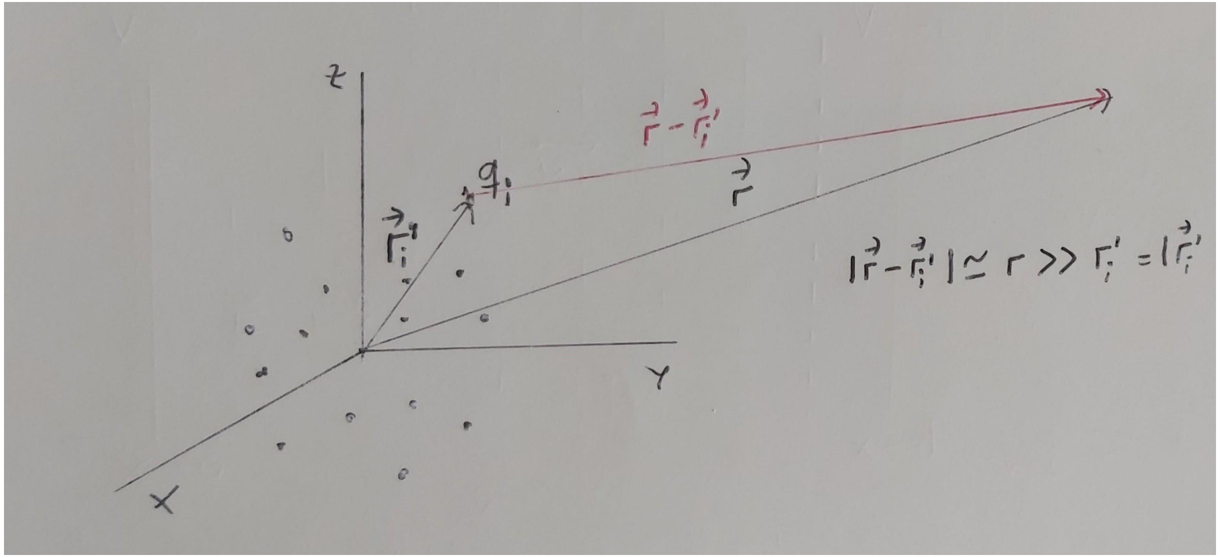
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 5

Momentos de una distribución finita de cargas

Idea: calcular el potencial $V(\vec{\mathbf{r}})$ en puntos muy alejados de la distribución de cargas.



$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\, q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'}|}$$

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'}|^{-1} = \left[(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'})\right]^{-1/2} = \left[r^2 - 2\,\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'} + r_i'^2\right]^{-1/2} = \left[r^2\left(1 - 2\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'}}{r^2} + \frac{r_i'^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

Vamos a suponer que $\dfrac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}_\mathbf{i}'}}{r^2} < \dfrac{r_i'}{r} \ll 1$ y $\dfrac{r_i'^2}{r^2} \ll \dfrac{r_i'}{r} \ll 1$

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}|^{-1} = \left[(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}})\right]^{-1/2} = \left[r^2 - 2\,\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}} + r_i'^2\right]^{-1/2} = \left[r^2\left(1 - 2\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}}{r^2} + \frac{r_i'^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

Definimos $\varepsilon = 2\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}}{r^2} \ll 1$ y despreciamos el término $\frac{r_i'^2}{r^2} \sim O(\varepsilon^2)$

Usamos el desarrollo de Taylor: $\left(1 - \varepsilon\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$

Entonces aproximamos, $|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}|^{-1} \approx r^{-1}\left(1 + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}}{r^2}\right)$

$$\Rightarrow V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\,q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}|} \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{k\,q_i}{r}\left(1 + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}}{r^2}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\,q_i}{r} + \sum_{i=1}^{N} k\,q_i\,\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}}{r^3}$$

$$\Rightarrow V(\vec{\mathbf{r}}) \approx \frac{k}{r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{k\,\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}$$

$$\Rightarrow V(\vec{\mathbf{r}}) \approx \frac{k}{r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{k\,\vec{\mathbf{r}}}{r^3}\cdot\sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{\mathbf{r}'_i}$$

Llamamos $\boxed{Q=\sum_{i=1}^{N} q_i}$ a la carga neta total o *momento monopolar* de la distribución de cargas.

y $\vec{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{\mathbf{r}'_i}$ al *momento dipolar de la distribución de cargas*.

$$\Rightarrow V(\vec{\mathbf{r}}) \approx \frac{k}{r}Q + \frac{k}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{p}}$$

El primer término corresponde al potencial de una carga puntual de valor $Q=\sum_{i=1}^{N} q_i$ en el origen.

Si Q neta no es 0 ese término es el que domina (va como $1/r$ mientras que el otro término va como $1/r^2$).

Pero si Q neta es 0, entonces $\boxed{V(\vec{\mathbf{r}}) \approx \frac{k}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{p}}}$ al que llamamos *potencial dipolar o potencial de un dipolo* $\vec{\mathbf{p}}$.

El momento dipolar $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}}$ es como una "versión en cargas" del centro de masa (como una carga "pesada" por donde está distribuida) pero una diferencia importante es que la carga tiene signo.

Consideremos entonces por separado las cargas positivas y negativas de la distribución y llamemos

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}_+ = \sum_{i=1,q_i>0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} \Big/ \sum_{i=1,q_i>0}^{N} q_i \quad y \quad \overrightarrow{\mathbf{R}}_- = \sum_{i=1,q_i<0}^{N} |q_i| \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} \Big/ \sum_{i=1,q_i<0}^{N} |q_i| = \sum_{i=1,q_i<0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} \Big/ \sum_{i=1,q_i<0}^{N} q_i$$

que podemos llamar *centro de carga positiva* y *centro de carga negativa* y definimos también

$$Q_+ = \sum_{i=1,q_i>0}^{N} q_i \quad y \quad Q_- = \sum_{i=1,q_i<0}^{N} |q_i| = -\sum_{i=1.q_i<0}^{N} q_i \qquad \rightarrow \sum_{i=1,q_i>0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} = Q_+ \overrightarrow{\mathbf{R}}_+ \quad , \quad \sum_{i=1,q_i<0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} = -Q_- \overrightarrow{\mathbf{R}}_-$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} = \sum_{i=1,q_i>0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} + \sum_{i=1,q_i<0}^{N} q_i \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathbf{i}} = Q_+ \overrightarrow{\mathbf{R}}_+ - Q_- \overrightarrow{\mathbf{R}}_-$$

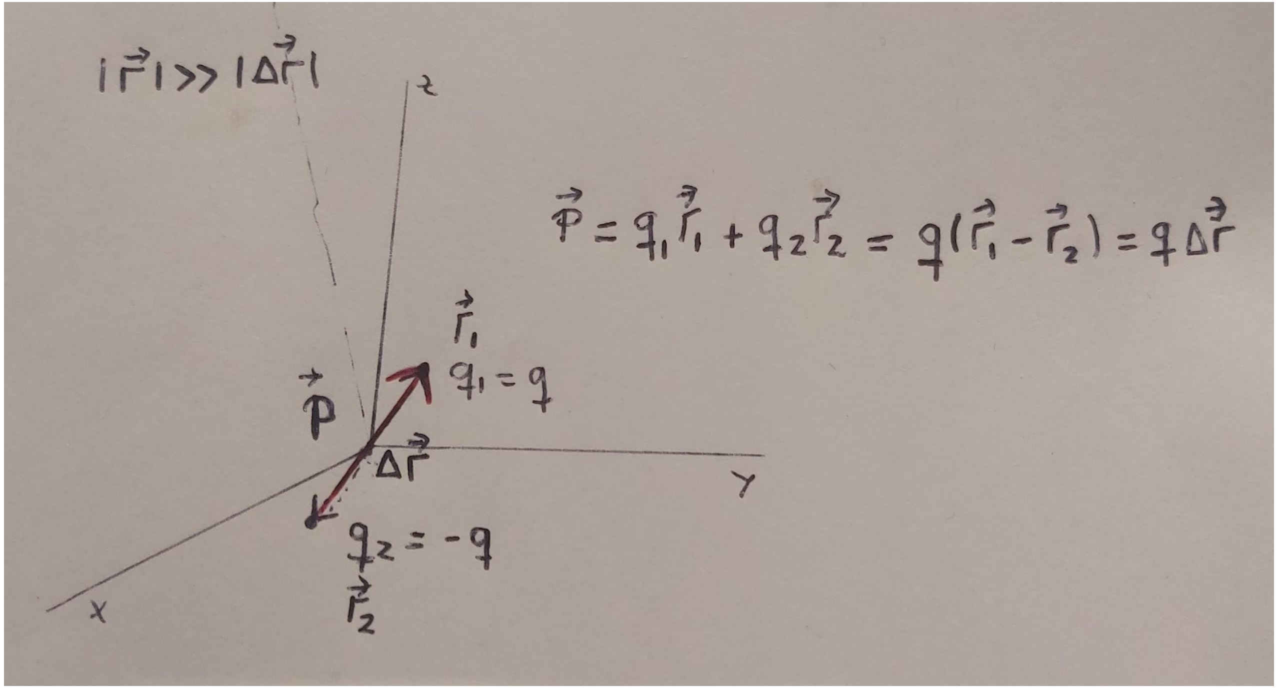
Si $\quad Q = 0 \qquad \rightarrow Q_+ = Q_- \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{p}} = Q_+ (\overrightarrow{\mathbf{R}}_+ - \overrightarrow{\mathbf{R}}_-) = Q_+ \Delta \overrightarrow{\mathbf{R}}$

Se comporta como un par de cargas puntuales separadas una distancia ΔR

Un *dipolo* es un par de cargas puntuales de igual magnitud q y signo opuesto separadas por una distancia $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}$

Como la carga neta es 0, el potencial, a distancias grandes es de la forma

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) \approx k\frac{\overrightarrow{\mathbf{p}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}}}{r^3} \quad \text{con} \quad \overrightarrow{\mathbf{p}} = q\,\Delta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}$$

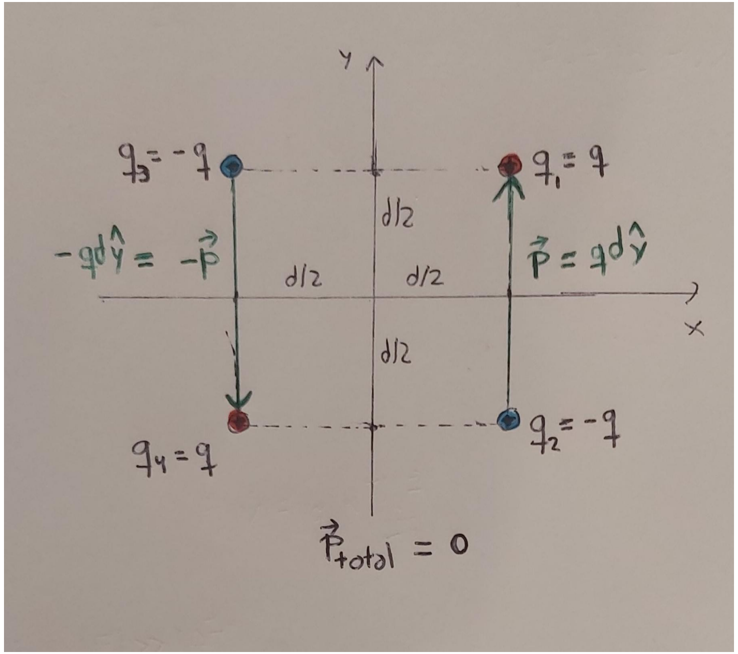


Nota 1: Hicimos la cuenta del desarrollo del potencial a distancias grandes suponiendo que la carga estaba distribuida cerca del origen. Si la carga está distribuida cerca de una posición $\overrightarrow{\mathbf{r_0}}$ podemos repetir la cuenta referenciando a esa posición y resulta (para el caso de carga neta nula),

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) \approx k\frac{\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_0}})}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_0}}|^3}$$

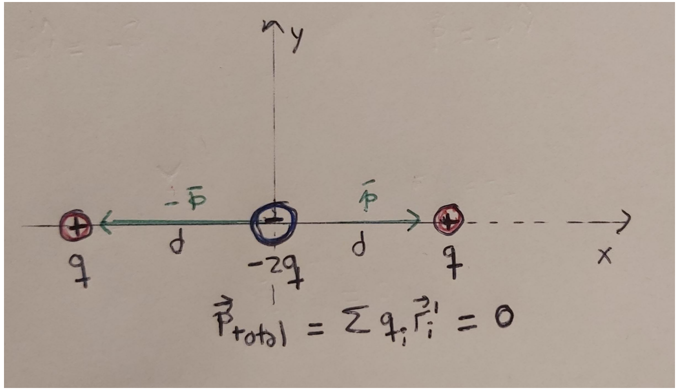
Nota 2: Vimos que si la carga neta total es 0, el potencial no es 0 y domina el término dipolar.

Pero podría ocurrir que Q neta = 0 y también $\overrightarrow{\mathbf{p}} = 0$?



Una distribución simétrica de 4 cargas de igual magnitud q y signos opuestos en pares como la de la figura nos da un momento dipolar total 0.

Una distribución simétrica de 3 cargas, una en el centro de valor -2q y dos a la misma distancia d, a derecha e izquierda, de valor q c/u.



Qué hacemos en estos casos ?

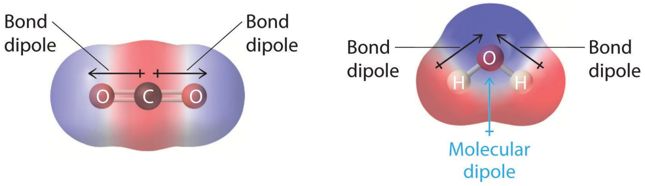
En ese caso hay que retener el término que iba como $\frac{r_i'^2}{r^2}$ en el desarrollo y en el potencial queda un nuevo término que se denomina *cuadrupolar* (es un *tensor*, con dos índices, como una *matriz*).

Nota 3: en átomos y moléculas podemos pensar que si la carga neta es 0, vistos desde distancias grandes (comparadas con el tamaño del átomo o molécula) el potencial no es 0 y está dominado por el término dipolar (si lo hay, si no, por el cuadrupolar), y por lo tanto eso produce un campo eléctrico y puede hacer efecto (fuerzas) sobre otros átomos o moléculas. Esas *fuerzas interatómicas o intermoleculares* son las responsables de los enlaces químicos (ver https://es.wikipedia.org/wiki/Fuerza_intermolecular).

El momento dipolar en un átomo o molécula puede ser *permanente* o *inducido* (por un campo eléctrico externo).

https://www.youtube.com/watch?v=0n-KHjHMAg0

https://www.youtube.com/watch?v=dS4fdiicp0E



(a) No net dipole moment (b) Net dipole moment

Campo eléctrico de un dipolo

Obtuvimos hasta ahora el potencial, calculemos ahora el campo eléctrico a partir de $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$

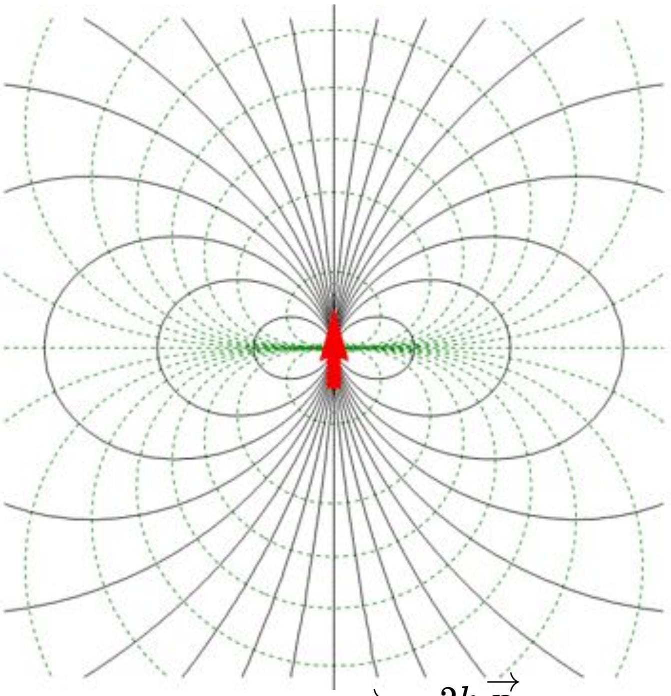
Supongamos un dipolo $\vec{\mathbf{p}}$ en el origen, el potencial a distancias grandes es $V(\vec{\mathbf{r}}) \approx k \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$

Con notación indicial $(\vec{\mathbf{E}})_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\,\frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{r^3}\right) = -\frac{k}{r^3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) - k\,(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\frac{\partial}{\partial x_j}(r^{-3})$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{l=1}^{3} p_l\, x_l\Big) = p_j \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(r^{-3}) = -3r^{-4}\frac{\partial}{\partial x_j}(r) = -3r^{-4}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\Big(\sum_{l=1}^{3} x_l^2\Big)^{1/2}\Big] = -3r^{-4}\, x_j \Big(\sum_{l=1}^{3} x_l^2\Big)^{-1/2} = -3r^{-5}\, x_j$$

$$\rightarrow (\vec{\mathbf{E}})_j = -\frac{k\, p_j}{r^3} + \frac{3k}{r^5}(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\, x_j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{E}} = \frac{k}{r^3}\Big[\frac{3\,(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\,\vec{\mathbf{r}}}{r^2} - \vec{\mathbf{p}}\Big]}$$

Notar que el campo eléctrico va como $1/r^3$, es decir decae más rápido que el de una carga neta.

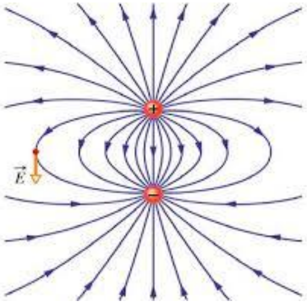


Líneas de campo (en negro) y equipotenciales (en verde)

En el eje perpendicular al dipolo $\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\dfrac{k\,\overrightarrow{\mathbf{p}}}{r^3}$

En el eje del dipolo $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \dfrac{2k\,\overrightarrow{\mathbf{p}}}{r^3}$

Recordemos el campo de dos cargas “+” y “-”, si hacemos tender la distancia “d” entre las cargas a 0 (pero mantenemos q.d=p finito) obtenemos el campo del dipolo.



Fuerza sobre un dipolo en un campo externo

Supongamos un dipolo formado por una carga $-q$ en $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ y una carga q en $\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}$ que se encuentra en una región donde hay un campo eléctrico externo $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$

Desarrollamos en Taylor el campo, $E_j(\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}) = E_j(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + \frac{\partial E_j}{\partial x}\delta x + \frac{\partial E_j}{\partial y}\delta y + \frac{\partial E_j}{\partial z}\delta z + O(\delta^2)$

que podemos escribir como $E_j(\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}) = E_j(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla} E_j + O(\delta^2)$

y en forma vectorial como $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}) = \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + (\overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\mathbf{E}} + O(\delta^2)$

La fuerza total sobre el dipolo es $\overrightarrow{\mathbf{F}}_d = -q\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + q\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}) = -q\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + q\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + q(\overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\mathbf{E}} + O(\delta^2)$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{F}}_d = (q\overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\mathbf{E}} = (\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\mathbf{E}}}$$

Notar que si el campo externo es uniforme, entonces la fuerza es 0.
Esto lo podíamos haber visto directamente viendo que en ese caso actúa una fuerza qE y una -qE lo que resulta en una fuerza neta 0.

Torque (o momento) sobre un dipolo en un campo externo

$$\vec{\tau}_d = -q\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) + q(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\delta\mathbf{r}}) \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\delta\mathbf{r}})$$

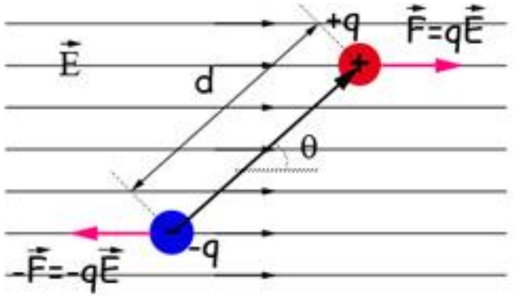
y usamos nuevamente $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\delta\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) + (\vec{\delta\mathbf{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{E}} + O(\delta^2)$

$$\vec{\tau_{\mathbf{d}}} = -q\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}} + q\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}} + q\,\vec{\delta\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}} + q\,\vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\delta\mathbf{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{E}} + O(\delta^2)$$

$$\vec{\tau_{\mathbf{d}}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_d$$ con $$\vec{\mathbf{F}}_d = (q\vec{\delta\mathbf{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{E}} = (\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{E}}$$

$$\boxed{\text{Si } \vec{\mathbf{F}}_d = 0 \rightarrow \vec{\tau_{\mathbf{d}}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}}$$

Esto ocurre por ejemplo si el campo es uniforme, la fuerza neta es 0, pero si el dipolo no está alineado al campo hay un torque que tiende a alinearlo con el campo.



Energía (debida al campo externo)

$$U_d = -qV(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + qV(\overrightarrow{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\delta\mathbf{r}}) = -qV(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + qV(\overrightarrow{\mathbf{r}}) + q(\overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla})V = (q\overrightarrow{\delta\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla})V$$

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = q\,\overrightarrow{\delta\mathbf{r}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\nabla}V$

$$\rightarrow \boxed{U_d = -\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}}$$

La energía es mínima cuando el dipolo se alinea con el campo