Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

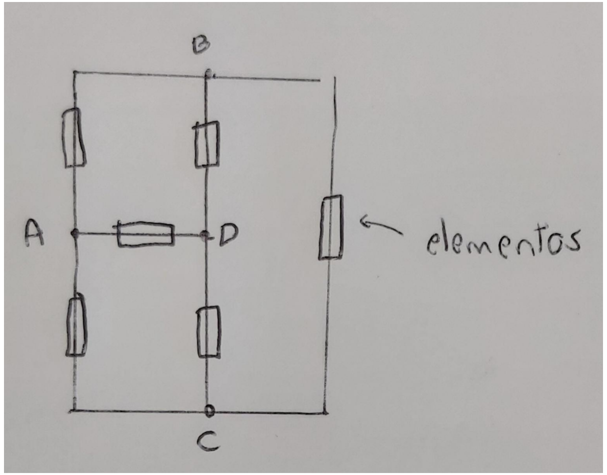
Clase 13

Leyes de Kirchoff

Permiten resolver las corrientes y tensiones en circuitos.

En un circuito definimos:

- *Rama* : conjunto de elementos conectados en serie de modo que la corriente a través de ellos es la misma
- *Nodo*: intersección de 3 o más ramas
- *Malla*: recorrido cerrado sobre ramas en un circuito

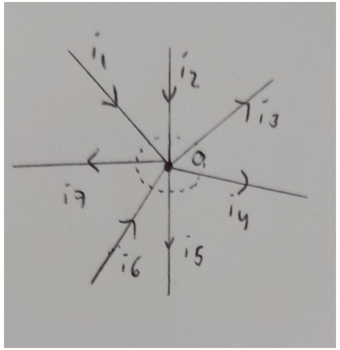


4 nodos: A, B, C, D

6 ramas: AB, BD, BC, CD, AD, AC

muchas mallas: ABDA, ADCA, CDBC, ABCA, ADBCA, ...

Ley de los nodos: la suma de las corrientes entrantes menos las salientes a un nodo es 0

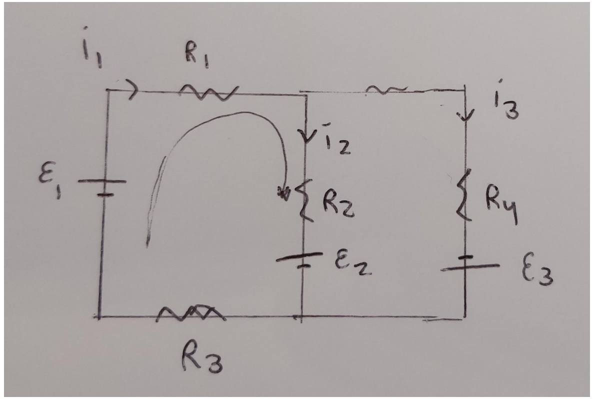


$$\sum_{k\ entrantes} i_k - \sum_{k\ salientes} i_k = 0$$

Expresa la cons. de la carga con corrientes estacionarias

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 + i_6 - i_7 = 0$$

Ley de las tensiones (o ley de mallas): para cualquier malla, la suma de las diferencias de potencial sobre todas las ramas de la malla es 0

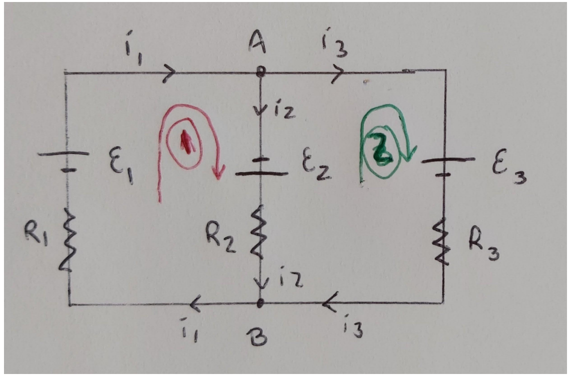


$$\sum_j \Delta V_j = 0 \ , \text{ con } \Delta V_j = \text{ dif. potencial rama } j = \varepsilon_j - i_j\ R_j$$

$$\varepsilon_1 - i_1\ R_1 - i_2\ R_2 - \varepsilon_2 - i_i\ R_3 = 0$$

El sentido de las corrientes lo asigno yo de antemano, después al resolver el circuito puede que me de signo opuesto al que pensaba.

Un ejemplo:



Hay 2 nodos (A y B) y 3 ramas y las incógnitas son las corrientes i_1, i_2, i_3 en cada rama.

Si tengo N nodos y R ramas en general lo podemos resolver con N-1 ecs. de nodos y M=R-(N-1) ecs. de mallas.

En este ejemplo sería con 2-1=1 ec. de nodos y 3-(2-1)=2 ec. de mallas

Recorremos la malla 1, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i_2 R_2 - i_1 R_1 = 0 \rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2$

Recorremos la malla 2, $-\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - i_3 R_3 + i_2 R_2 = 0 \rightarrow -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = i_3 R_3 - i_2 R_2$

y en el nodo A, $0 = i_1 - i_2 - i_3$ (notar que la ec. en el nodo B es idéntica)

$$i_2 = [R_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + R_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]/D$$

Son 3 ecs. con 3 inc. → resolvemos !

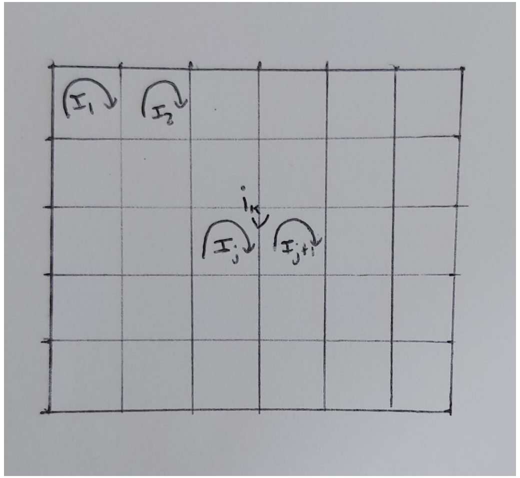
$$i_3 = [R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - R_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]/D$$

$$i_1 = [R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + R_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]/D$$

$$D = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$

(conviene reemplazar una de las corr. con la ec. de nodos y queda un sist. de 2x2)

Método de mallas



Definimos la corriente de malla I_j de modo que en la rama común

$$i_k = I_j - I_{j+1}$$

Llamamos $R_{jj} = \sum_{malla\ j} R_k$ a la resistencia total en la malla j, con R_k la resistencia en cada rama k de la malla

y $R_{jl} = -\sum_{j/l} R_k$ a la resistencia total (cambiada de signo) de la rama común a las mallas j y l.

Llamamos $\varepsilon_{jj} = \sum_{malla\ j} \varepsilon_k$ a la f.e.m. total en la malla j, con ε_k la f.e.m. en cada rama k de la malla, con signo + si genera corriente en el sentido de recorrido y con signo - si genera corriente en el sentido opuesto

para la malla j-ésima tenemos, $\varepsilon_{jj} = \sum_{malla\ j} i_k R_k = I_j R_{jj} - \sum_{j/l} I_l R_{j/l} = \sum_{l=1}^{M} I_l R_{jl}\ \ , j = 1, 2, \ldots, M$

con M el número total de mallas → nos queda un sist. de MxM para obtener las corrientes en cada malla.

El sistema se puede escribir en forma matricial, $\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{R}}\bar{I}$

con $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \ldots, \varepsilon_{MM})$ un vector de M-dimensiones que contiene las f.e.m. totales de cada malla

$\bar{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_M)$ un vector de M-dimensiones que contiene las corrientes de cada malla y $\bar{\bar{R}}$ una matriz

con las resistencias totales de cada malla R_{jj} en la diagonal y las resistencias comunes (cambiadas de

signo) a dos mallas en los elementos j,l fuera de la diagonal R_{jl} con $j \neq l$

El sistema se puede invertir para obtener las corrientes de mallas, dadas las f.e.m. y las resistencias,

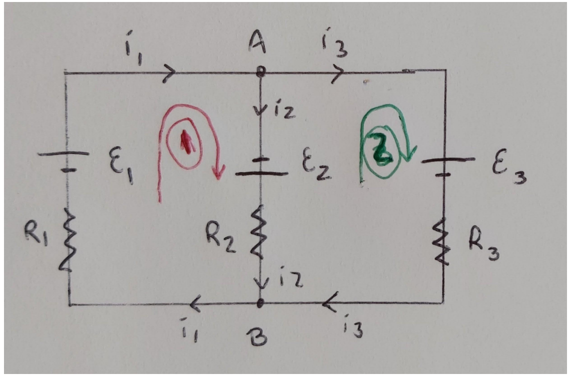
$$\bar{I} = \bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\varepsilon}$$

La inversa de la matriz $\bar{\bar{R}}$ se podría obtener en teoría con la regla de Cramer,

$$\bar{\bar{R}}^{-1}_{jl} = \frac{A_{jl}}{D} \text{ , con } D = det(\bar{\bar{R}}) \text{ y } A_{jl}$$

el determinante de la matriz que resulta de sacarle a $\bar{\bar{R}}$ la fila j y la columna l (matriz adjunta jl).

$$\Rightarrow I_j = \sum_{l=1}^{M} \frac{A_{jl}}{D} \varepsilon_{ll} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, M$$



El circuito que vimos antes, ahora lo resolvemos con el método de mallas

$$i_1 = I_1 \ , \ \ i_3 = I_2 \ , \ \ , i_2 = I_1 - I_2$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ , \ \ , \varepsilon_{22} = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$R_{11} = R_1 + R_2 \ , \ \ R_{12} = -R_2 \ , \ \ , R_{21} = -R_2 \ , \ \ R_{22} = R_2 + R_3$$

El sist. de 2x2 queda:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2$$

$$-\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = -R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_2$$

resolviendo,

$$I_1 = [R_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + R_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]/D$$

$$I_2 = [R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - R_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]/D$$

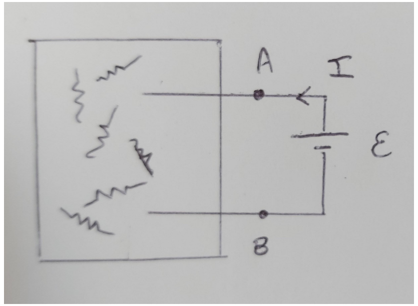
con $D = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 = det(\bar{\bar{R}})$

$$i_1 = I_1 \ , \ \ i_3 = I_2 \ , \ \ i_2 = I_1 - I_2 = [R_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + R_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]/D$$

Teorema de Thevenin

Sirve para conocer el comportamiento de un circuito en una sola rama y reemplazar el resto del circuito por una rama equivalente muy sencilla.

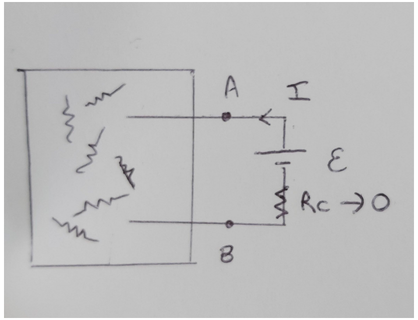
Supongamos que en la caja de la izq en la figura hay un circuito totalmente pasivo (sin f.e.m.)



Llamamos *resistencia de entrada* (o equivalente) del circuito, vista desde el par de terminales AB, a la relación

$$\tilde{R} = \frac{\varepsilon}{I}$$

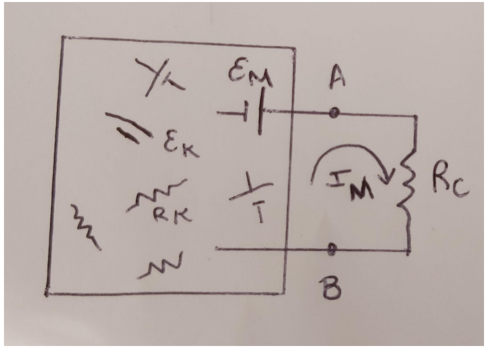
que existe cuando se conecta una f.e.m. ideal ε entre A y B y se mide una corriente I



Sup. ahora agregamos una $R_c \to 0$

$$I_j = \sum_{l=1}^{M} \frac{A_{jl}}{D} \varepsilon_{ll} = \frac{A_{jM}}{D} \varepsilon \quad (\text{sólo } \varepsilon_{MM} = \varepsilon \neq 0) \quad \text{y} \quad I_M = \frac{A_{MM}}{D} \varepsilon$$

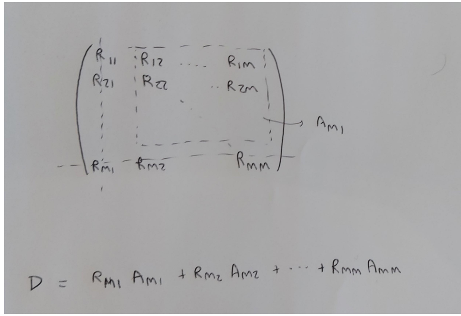
$$\Rightarrow \tilde{R} = \frac{\varepsilon}{I_M} = \frac{D}{A_{MM}} = \frac{\tilde{D}}{A_{MM}} \quad \text{con} \quad \tilde{D} = \lim_{R_c \to 0} D \qquad \text{y } A_{MM} \text{ indep. de } R_c$$



Sup. ahora un circuito con varias f.e.m, donde a la derecha de AB tenemos una resistencia de carga R_c. Queremos hallar un equivalente sencillo de la parte izquierda.

Tenemos $I_M = \sum_{l=1}^{M} \frac{A_{Ml}}{D} \varepsilon_{ll}$

Por otro lado $V_c = V_A - V_B = I_M R_c \;\Rightarrow\; V_c = R_c \sum_{l=1}^{M} \frac{A_{Ml}}{D} \varepsilon_{ll}$



Nos interesan dos valores particulares de I_M y V_c :

a) La tensión V_c a circuito abierto, es decir, para $R_c \to \infty$

Como los A_{Ml} son independientes de R_c y podemos escribir $D = \sum_{l=1}^{M} R_{Ml} A_{Ml} = \sum_{l=1}^{M-1} R_{Ml} A_{Ml} + (R_{MM} - R_c) A_{MM} + R_c A_{MM}$

$$\Rightarrow V_{c.a.} = \lim_{R_c \to \infty} V_c = \lim_{R_c \to \infty} \frac{R_c \sum_{l=1}^{M} A_{Ml}\varepsilon_{ll}}{D} = \lim_{Rc \to \infty} \frac{R_c \sum_{l=1}^{M} A_{Ml}\varepsilon_{ll}}{R_c A_{MM}} = \frac{\sum_{l=1}^{M} A_{Ml}\varepsilon_{ll}}{A_{MM}}$$

b) La corriente I_M de cortocircuito, haciendo $R_c \to 0$

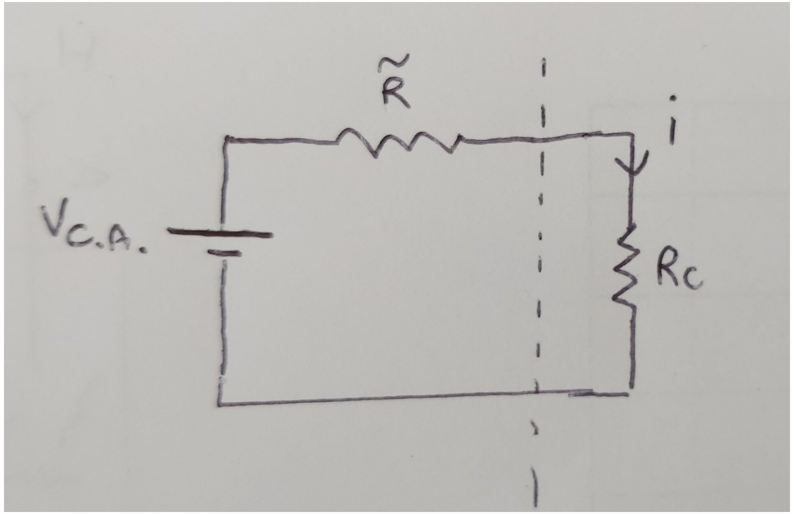
$$I_{c.c.} = \lim_{R_c \to 0} I_M = \lim_{R_c \to 0} \sum_{l=1}^{M} \frac{A_{Ml}\varepsilon_{ll}}{D} = \frac{\sum_{l=1}^{M} A_{Ml}\varepsilon_{ll}}{\tilde{D}}$$

$$\text{con } \tilde{D} = \lim_{R_c \to 0} D$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{c.a.}}{I_{c.c.}} = \frac{\tilde{D}}{A_{MM}} = \tilde{R}$$

la resistencia equivalente

Es decir, entre A y B hay una fuente cuya f.e.m. es $V_{c.a.}$ y cuya resistencia interna es $\tilde{R} = V_{c.a.}/I_{c.c.}$



$$V_{c.a.} = i(\tilde{R} + R_c) \;\Rightarrow\; i = \frac{V_{c.a.}}{R_c + \tilde{R}}$$