Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 23

Corriente de desplazamiento

Vimos que $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) = 0$

Pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = 0$ siempre ?

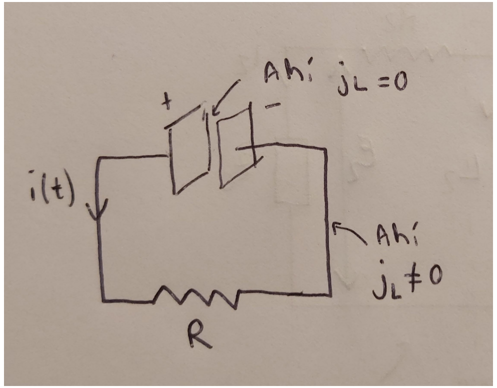
No, porque en general vale $\dfrac{\partial \rho_L}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = 0$ (conservación de la carga)

$$\oint_{S(V)} \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L \, d\mathcal{V} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_L \, d\mathcal{V} = -\int_V \frac{\partial \rho_L}{\partial t} \, d\mathcal{V}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} = -\frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

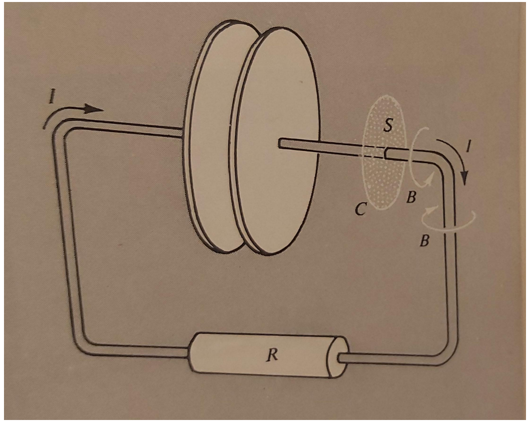
Si $\dfrac{\partial \rho_L}{\partial t} \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} \neq 0$

ejemplo:

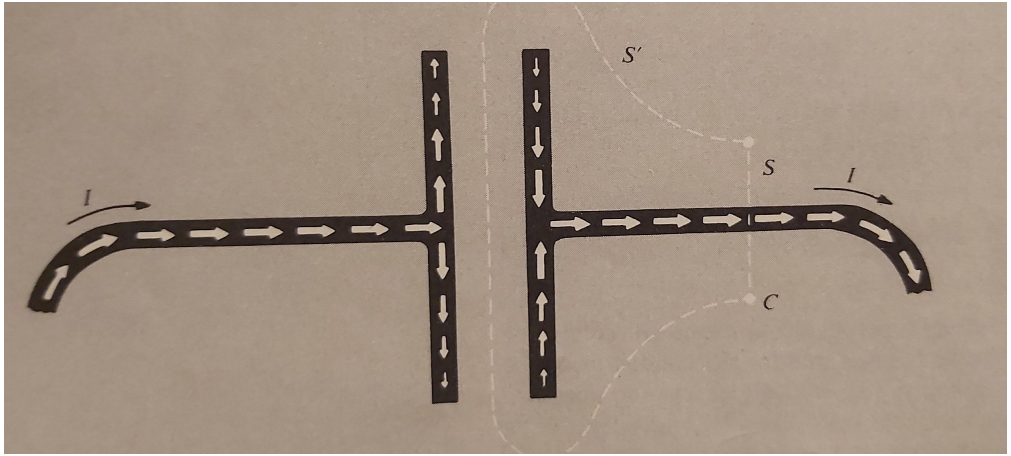


$\rightarrow$ las líneas de $\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}}$ no se cierran siempre

Otra forma de ver el problema:



Si aplicamos Ampere en la curva C alrededor del cable, si tomamos la superficie S hay corriente concatenada, pero si tomamos la superficie S' no → el campo B (que sale calculando la circulación en C) daría 0 con S' y distinto de 0 con S.



→ hay que corregir Ampere !

Maxwell (1865) propuso

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} = \frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

Pero sigue valiendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{U}}$$

Tiene unidades de densidad de corriente → la llamamos *corriente de desplazamiento*

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{D}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{D}}$$

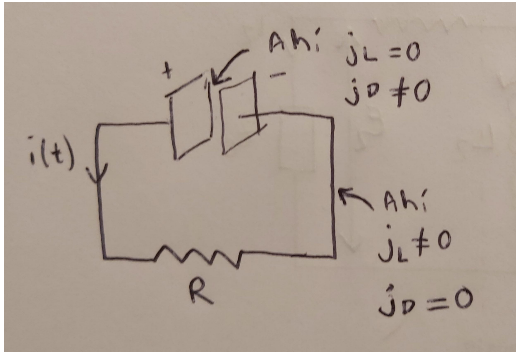
Elegimos $\vec{\mathbf{U}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ y $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}}$

Notar $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \dfrac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ implica generación de campo magnético cuando un campo eléctrico varía en el tiempo → análogo a Faraday que nos dice que variación en el tiempo de campo magnético produce un campo eléctrico.

En el caso estático $\dfrac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = 0$ y recuperamos la ley de Ampere, $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}_{\mathbf{L}}}$

Notar $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{L}}} + \vec{\mathbf{j}_{\mathbf{D}}}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) = 0$ y por lo tanto las líneas de $\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{L}}} + \vec{\mathbf{j}_{\mathbf{D}}}$ son cerradas

En general la corriente de desplazamiento es chica en un conductor y dominante en un aislante



Sup. $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos \omega t$

$|\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{L}}}| = \sigma |\vec{\mathbf{E}}| = \sigma |\vec{\mathbf{E}}_0| \, |\cos \omega t|$

$|\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{D}}}| = |\dfrac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}| = \varepsilon |\dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}| = \varepsilon\, \omega\, |\vec{\mathbf{E}}_0| \, |\sin \omega t|$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{D}}}|}{|\vec{\mathbf{j}_{\mathbf{L}}}|} \sim \dfrac{\varepsilon\, \omega}{\sigma}$

conductor → $\sigma \approx 10^8\ \Omega^{-1} m^{-1}$, $\varepsilon \approx 10^{-11}\ s\, \Omega^{-1} m^{-1}$ $\rightarrow$ $\varepsilon/\sigma \approx 10^{-19} s$ $\rightarrow$ $j_D \ll j_L$ a menos que $\omega > 10^{18}\, Hz$

aislante → $\sigma \approx 10^{-12}\ \Omega^{-1} m^{-1}$, $\varepsilon \approx 10^{-10}\ s\, \Omega^{-1} m^{-1}$ $\rightarrow$ $\varepsilon/\sigma \approx 10^{2} s$ $\rightarrow$ $j_D \gg j_L$ para $\omega > 10^{-2}\, Hz$

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L \qquad \text{(Gauss)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \text{(Ampere} - \text{Maxwell)}$$

Fuentes: $\rho_L \ , \ \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{L}}$

Campos: $\vec{\mathbf{E}} \ , \ \vec{\mathbf{B}} \ , \ \vec{\mathbf{D}} \ , \ \vec{\mathbf{H}}$

En medios LIH,

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} \ , \ \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$$

\+ relaciones constitutivas entre los campos en los medios

En vacío, $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$ y las ecs. Maxwell quedan:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ &\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{aligned}}$$

los campos eléctrico y magnético están acoplados

Si no hay dependencia temporal, los campos se desacoplan →

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

Ondas electromagnéticas en vacío

Supongamos una región del espacio sin fuentes, $\rho = 0$, $\overrightarrow{\mathbf{j}} = 0$ las ecs. Maxwell quedan:

$$\boxed{\begin{aligned} &\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} = 0 \\ &\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0 \\ &\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ &\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0\, \varepsilon_0\, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Las dos últimas ecuaciones nos dicen: un campo magnético variable en el tiempo nos genera un campo eléctrico, que a su vez, al variar en el tiempo nos genera un campo magnético, que a su vez al variar en el tiempo nos genera un campo eléctrico, que a su vez….

→ propagación ! → ONDAS !!

Veamos que nos dice la matemática...

hacemos $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$

siempre

usamos esto en la 3er ec. de Maxwell (Faraday) → $-\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$

y reemplazamos con la 4ta ec. de Maxwell → $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}}$$

Esta es una ecuación de ondas (en tres dimensiones) para cada una de las componentes del campo !

Recordemos la ecuación de onda: $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ $\rightarrow$ soluciones $f = f(x \pm vt)$

y en tres dimensiones $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 f$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda.

En este caso, tenemos ecuaciones de onda para cada componente del campo,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 E_x \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 E_y \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 E_z$$

y la velocidad de propagación es $$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

la velocidad de la luz !!!!

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ T\ m\ A^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299792458\ m/s \approx 3\ 10^8 m/s$$

$$\varepsilon_0 = 8.8541878176\ 10^{-12}\ C^2\ N^{-1} m^{-2}$$

Llamamos $$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Podemos obtener una ecuación idéntica para el campo magnético, tomando rotor

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}) = \overrightarrow{\nabla}(\cancel{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}}) - \nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{B}} = -\nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

usando esto en la 4ta ec. de Maxwell → $$-\nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

y reemplazando con la 3er ec. de Maxwell $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t^2}}$$

Obtuvimos entonces: $\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = c^2\ \nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$ $\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = c^2\ \nabla^2 \vec{\mathbf{B}}$

$$\text{con}\quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3\ 10^8\ m/s$$

Son variaciones de los campos eléctrico y magnético en el tiempo y en el espacio que se propagan con velocidad c → las llamamos ondas electromagnéticas = luz → Hertz (1889): ondas de radio (experimentos)

Las ecuaciones de onda admiten soluciones de la forma:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0\ e^{j(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0\ e^{j(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$$

que se llaman soluciones de onda plana

$\vec{\mathbf{k}}$ es el vector de onda y ω la frecuencia (angular) que deben satisfacer la relación

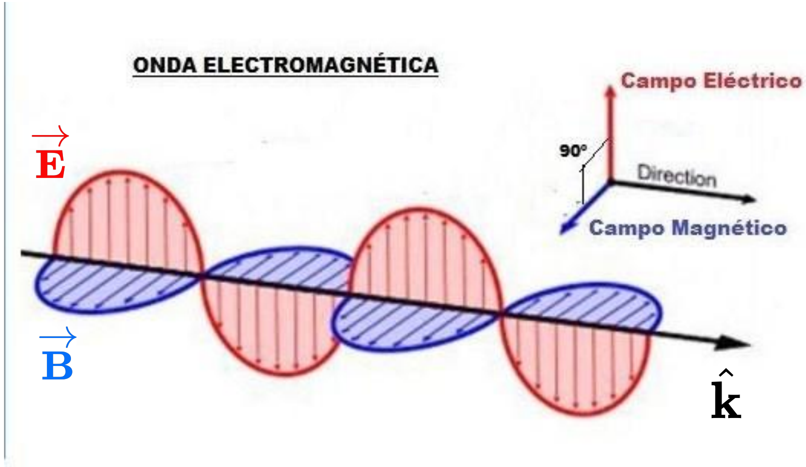
$$\omega^2 = |\vec{\mathbf{k}}|^2 c^2 = k^2 c^2$$

Se cumple además que $\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ sale de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 = j\,\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0 \, e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$

$\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ sale de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 = j\,\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}}_0 \, e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$

$\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}}$ sale de $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \rightarrow j\,\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\,\vec{\mathbf{B}}$

y también de aquí sale que $\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = c\,\vec{\mathbf{B}}$



Vector de Poynting

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_0||\vec{\mathbf{B}}_0|}{\mu_0}\hat{\mathbf{k}}$$

indica la dirección de propagación de la energía electromagnética

$$u = \frac{\varepsilon_0 |\vec{\mathbf{E}}|^2}{2} + \frac{|\vec{\mathbf{B}}|^2}{2\mu_0}$$