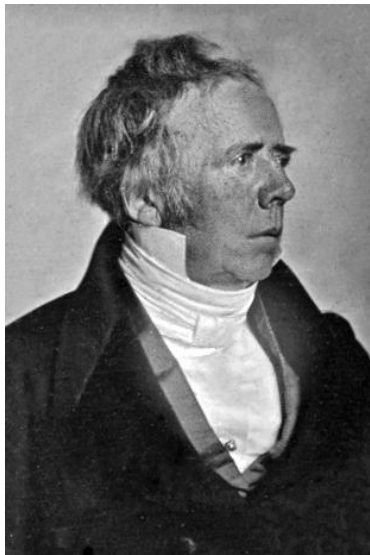


Física 3

Guía 4-Clase 1
Andrea Buccino

Las cargas tienen movimiento...

El concepto de magnetismo se manejaba desde el SXVIII, pero fue Hans Oersted en 1820 quien asoció las cargas en movimiento con el magnetismo.



EXPERIMENTA CIRCA EFFECTUM, etc. *Expériences sur l'effet du conflict électrique sur l'aiguille aimantée.*

PAR M^r J. CHR. OERSTED,

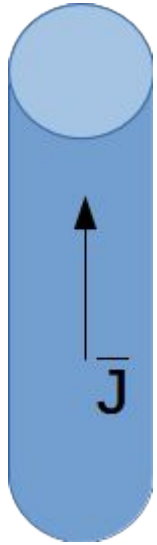
Professeur de physique dans l'Université de Copenhague.

(Traduction.) (1)

Les premières expériences sur l'objet que j'entreprends d'éclaircir ont été faites dans les leçons que j'ai données, l'hiver dernier, sur l'électricité et le magnétisme. Elles ont montré en général que l'aiguille aimantée changeait de direction par l'influence de l'appareil voltaïque; et que cet effet avait lieu lorsque le circuit était formé, et

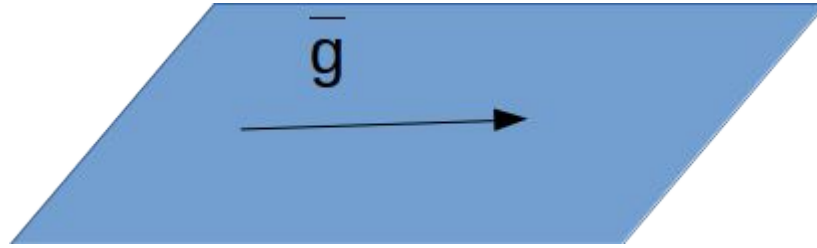
(1) Cet article, qui doit paraître dans le prochain Cahier de la *Bibliothèque universelle*, m'avait été communiqué, à Genève, par M. Pictet; depuis, plusieurs savans de Paris l'ont aussi reçu directement de l'auteur. Les lecteurs des *Annales* auront remarqué que nous n'accueillons pas, en général, trop à la légère, les annonces des découvertes extraordinaires, et jusqu'ici nous n'avons eu qu'à nous applaudir de cette réserve; mais à l'égard du Mémoire de M. Oersted, les résultats qu'il renferme, quelque singuliers qu'ils puissent paraître, sont accompagnés de trop de détails pour donner lieu à aucun soupçon d'erreur. J'ajouterai d'ailleurs que M. le professeur de La Rive, de Genève, qui a découvert lui-même des phénomènes extrêmement curieux avec les puissantes piles voltaïques qu'il possède, ayant bien voulu me permettre d'assister à la vérification qu'il a faite des expériences de M. Oersted devant MM. Prévost, Pictet,

Corrientes eléctricas



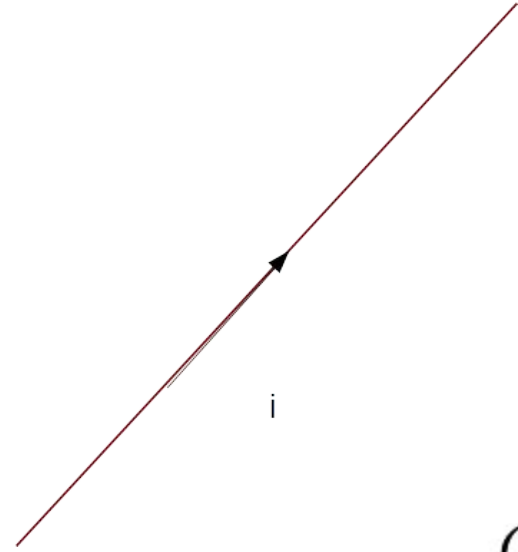
$$[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$$

En volumen



En Superficie

$$[\vec{g}] = \frac{A}{m}$$



Lineal

$$[i] = A = \frac{C}{s}$$

Fuerza de Lorentz

Acción del campo eléctrico y magnético sobre una carga en movimiento está dado por esta expresión:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si la partícula no estuviese en movimiento, no hay acción del campo magnético sobre la carga. $\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{F}_B = 0$

Si la carga se mueve de manera paralela $\vec{v} // \vec{B} \rightarrow \vec{F}_B = 0$

Problema 4.1

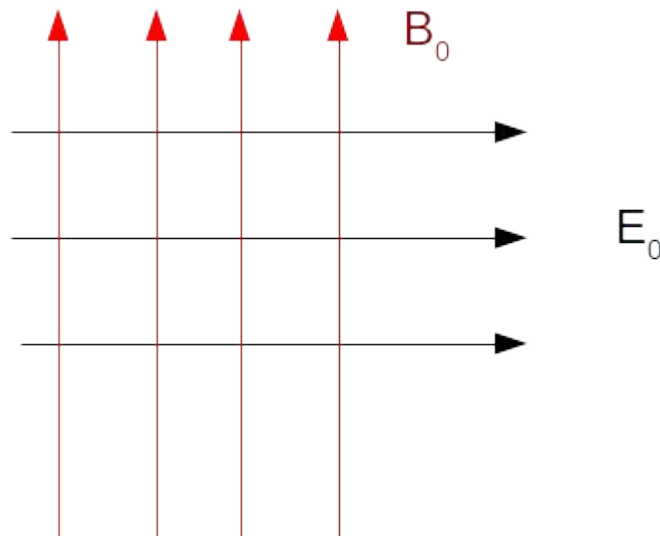
1. Estudie la trayectoria de una partícula de carga q y masa m que entra en una región donde existen campos magnético y eléctrico uniformes y perpendiculares entre sí. Discuta en particular los siguientes puntos:
 - a) los casos en que $\vec{E} = 0$ ó $\vec{B} = 0$
 - b) la necesidad de considerar ecuaciones de movimiento relativistas
 - c) muestre que si los campos eléctrico y magnético son diferentes de cero existe una única velocidad inicial para la cual la trayectoria de la partícula es una línea recta (este es el principio de funcionamiento de un filtro de velocidades).
 - d) estime el tiempo que tarda en recorrer una órbita circular un grano de polvo interestelar que se mueve con velocidad no relativista en el campo magnético de la galaxia (Datos: $\vec{B} = 10^{-10}T$. $m = 10^{-13}a$. $a = 10^{-18}C$).

Problema 4.1

Para estudiar la dinámica de una partícula de carga q y masa m :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Problema 4.1

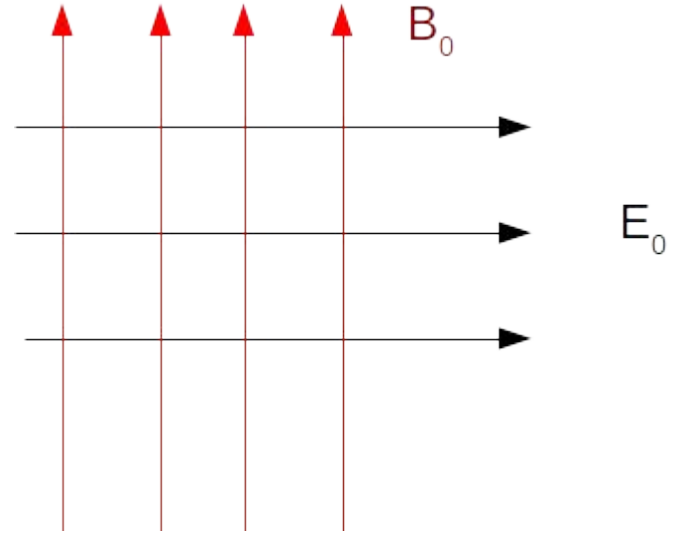
Suponemos:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x}$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{y}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Problema 4.1

Suponemos:

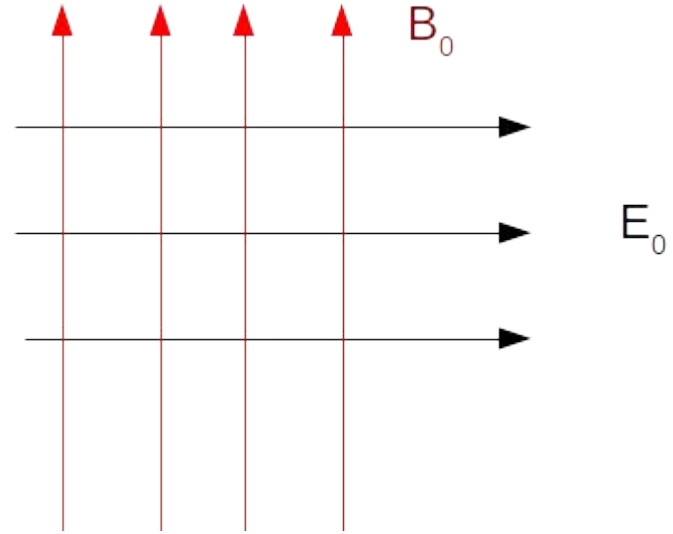
$$\vec{E} = E_0 \hat{x}$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{y}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

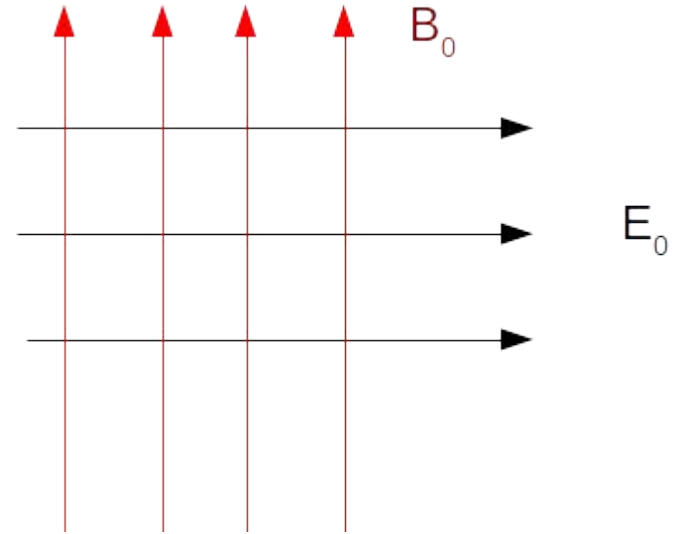
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



Problema 4.1

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$



Calculen las componentes de las fuerzas...y volvemos...

$$\vec{F} = q(E_0\hat{x} + (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \times B_0\hat{y})$$

Problema 4.1

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = q(E_0 \hat{x} + (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}) \times B_0 \hat{y})$$

$$x) \quad m\ddot{x} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

$$y) \quad m\ddot{y} = 0$$

$$z) \quad m\ddot{z} = q\dot{x}B_0$$

Problema 4.1

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = q(E_0 \hat{x} + (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}) \times B_0 \hat{y})$$

$$x) \quad m\ddot{x} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

$$y) \quad m\ddot{y} = 0$$

$$z) \quad m\ddot{z} = q\dot{x}B_0$$

Problema 4.1

$$x) m\ddot{x} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

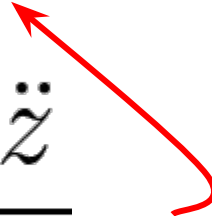
$$y) m\ddot{y} = 0 \longrightarrow y = y_0 + v_{0y}t$$

$$z) m\ddot{z} = q\dot{x}B_0$$

Acopladas

Problema 4.1

$$x) m\ddot{x} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

$$z) m\ddot{z} = q\dot{x}B_0 \rightarrow \dot{x} = \frac{m\ddot{z}}{qB_0}$$


Problema 4.1

$$x) m\ddot{x} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

$$z) m\ddot{z} = q\dot{x}B_0 \rightarrow \dot{x} = \frac{m\ddot{z}}{qB_0}$$

$$x) m\ddot{x} = \frac{m^2\ddot{z}}{qB_0} = qE_0 - q\dot{z}B_0$$

$$\dot{z} = v_z$$

$$x) \frac{m^2\dot{v}_z}{qB_0} = qE_0 - qv_zB_0$$

Problema 4.1

$$\frac{m^2 \ddot{v}_z}{qB_0} = qE_0 - qv_z B_0 \rightarrow v_z = v_{zH} + v_{zP}$$

$$\frac{m^2 \ddot{v}_{zH}}{qB_0} + qv_{zH} B_0 = 0$$

$$qv_{zP} B_0 = qE_0$$

Problema 4.1

$$\frac{m^2 \ddot{v}_z}{qB_0} = qE_0 - qv_z B_0 \rightarrow v_z = v_{zH} + v_{zP}$$

$$\frac{m^2 \ddot{v}_{zH}}{qB_0} + qv_{zH} B_0 = 0 \text{ HACER}$$

$$qv_{zP} B_0 = qE_0 \rightarrow v_{zP} = \frac{E_0}{B_0}$$

Problema 4.1

$$\frac{m^2 \ddot{v}_z}{qB_0} = qE_0 - qv_z B_0 \rightarrow v_z = v_{zH} + v_{zP}$$

$$\frac{m^2 \ddot{v}_{zH}}{qB_0} + qv_{zH} B_0 = 0 \text{ HACER}$$

$$qv_{zP} B_0 = qE_0 \rightarrow v_{zP} = \frac{E_0}{B_0}$$

Problema 4.1

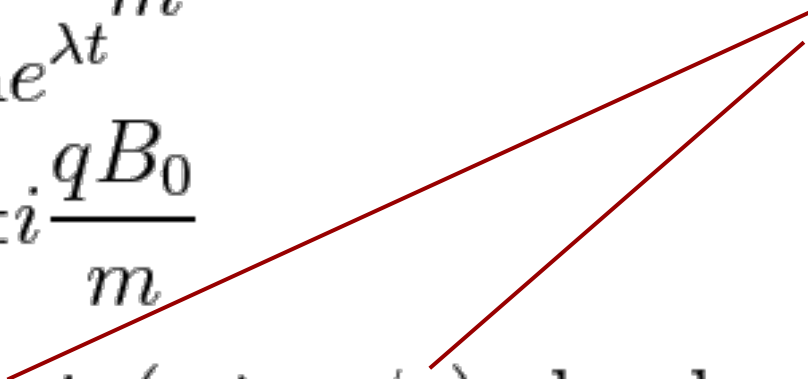
$$\ddot{v}_{zH} + \frac{q^2 B_0^2}{m^2} v_{zH} = 0$$

$$v_{zH} = Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{qB_0}{m}$$

$$v_{zH} = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{donde } \omega = \frac{qB_0}{m}$$

Depende de condiciones
iniciales



Problema 4.1

$$v_z = A \sin(\omega t + \phi_0) + \frac{E_0}{B_0}$$

$$v_x = \frac{m \dot{v}_z}{q B_0} = \frac{m A \omega}{q B_0} \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v_y = v_{0y}$$

Problema 4.1

Integrando...

$$z(t) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{E_0}{B_0} t + z_0$$

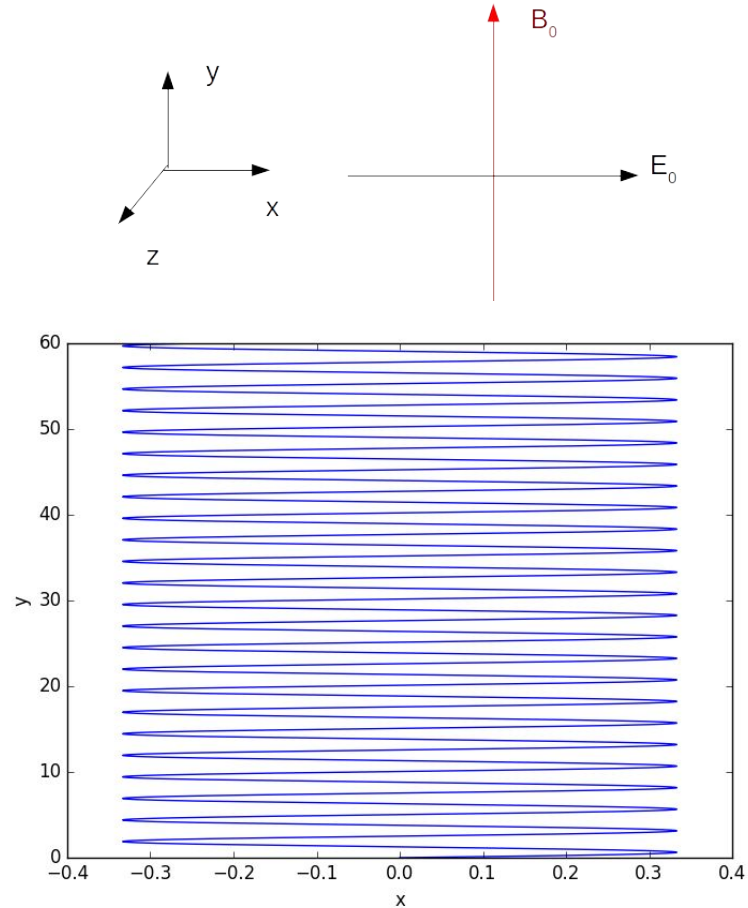
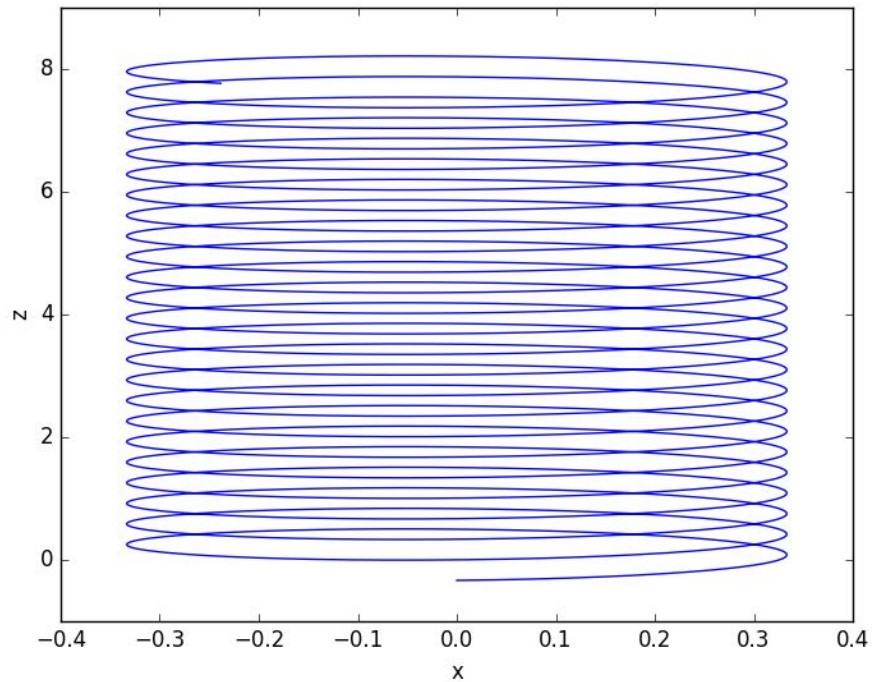
$$x(t) = \frac{mA}{qB_0} \sin(\omega t + \phi_0) + x_0$$

$$y(t) = v_{0y} t + y_0$$

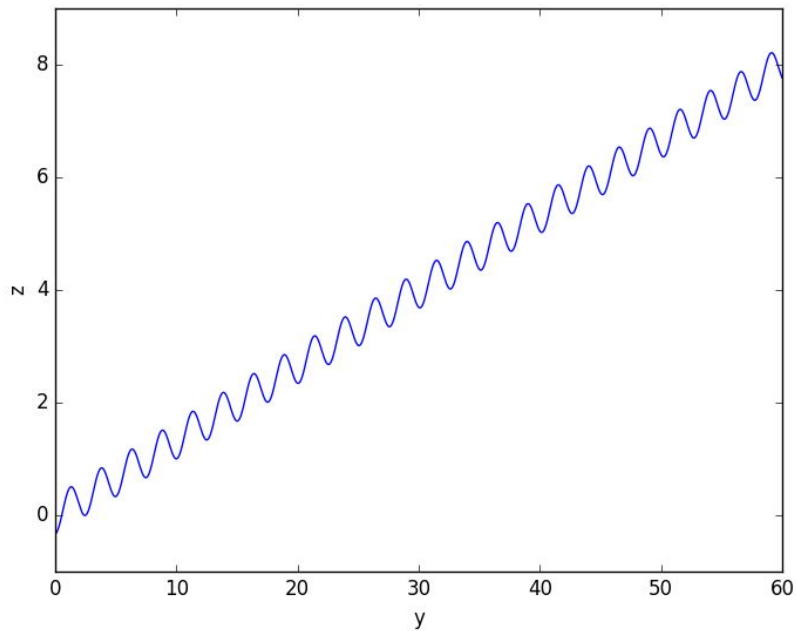
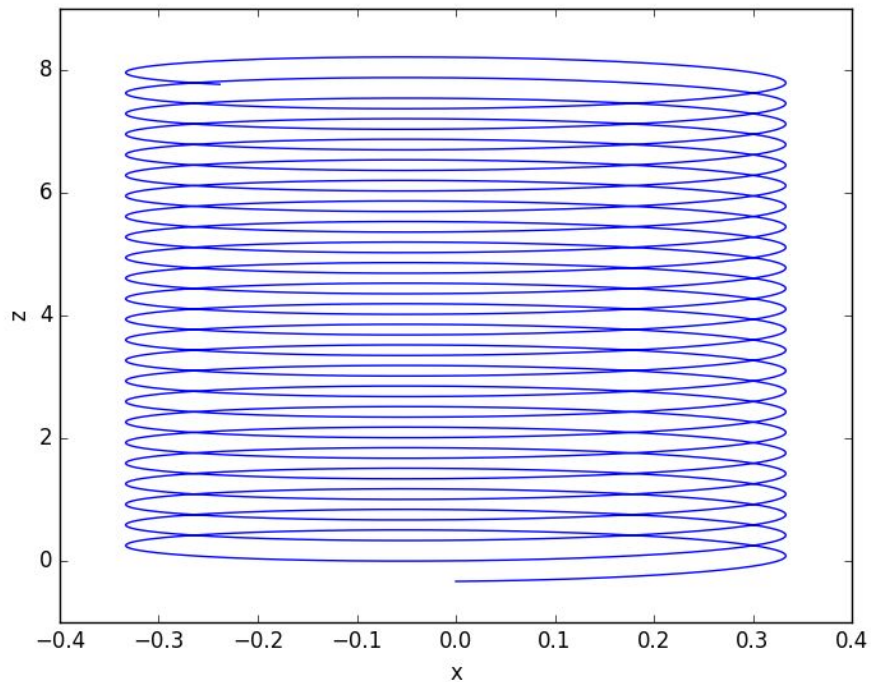
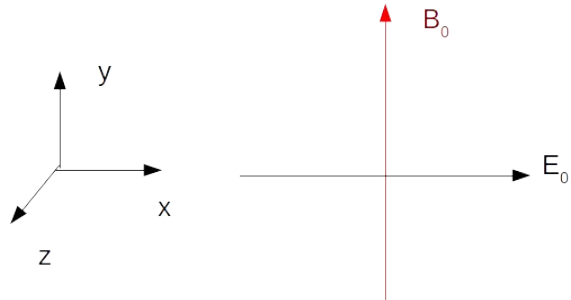
Una circunferencia en el plano x-z que avanza con velocidad

Constante en z y en y

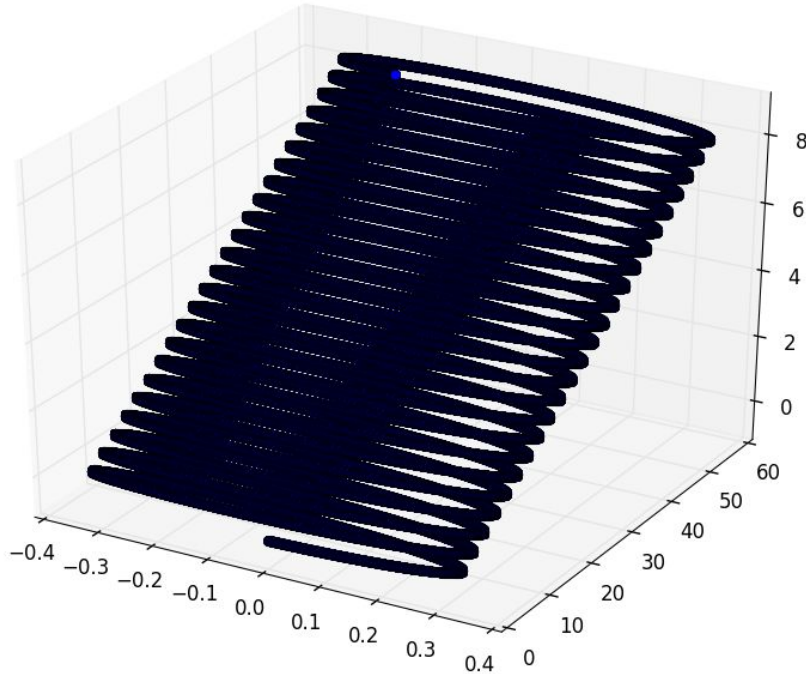
Problema 4.1



Problema 4.1



Problema 4.1



```
# modulos para graficar
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
A=5.
bo=5.
q=3.
m=1.
eo=4.
om=q*bo/m
#parametro
t=linspace(0,10, 100000)

#defino variables
x=A/om*sin(om*t)
y=6.*t
z=-A/om*cos(om*t)+(eo/bo*t)
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

#graficar los datos x, y, z como líneas en 3D
ax.plot(x, y, z, marker='o', color='b' )

#mostrar la gráfica
plt.show()
```

Problema 4.1

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

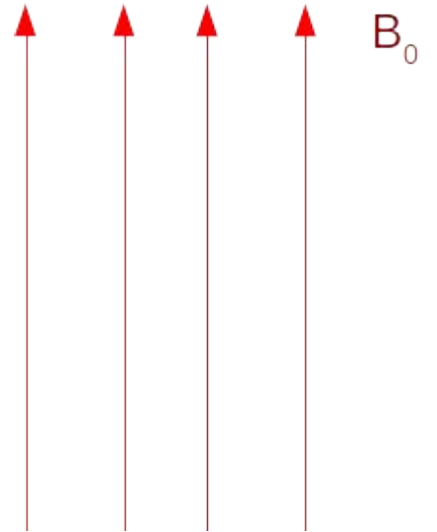
si $\vec{E} = 0$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \times B_0\hat{y}$$

$$x) m\ddot{x} = -qB_0\dot{z}$$

$$y) m\ddot{y} = 0$$


$$z) m\ddot{z} = qB_0\dot{x}$$



Problema 4.1

$$x) m\ddot{x} = -qB_0\dot{z}$$

$$y) m\ddot{y} = 0 \rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t$$


$$z) m\ddot{z} = qB_0\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{m\ddot{z}}{qB_0}$$


Problema 4.1

$$x) m\ddot{x} = -qB_0\dot{z}$$

$$y) m\ddot{y} = 0 \rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t$$

$$z) m\ddot{z} = qB_0\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{m\ddot{z}}{qB_0}$$


$$\frac{m^2\ddot{\dot{z}}}{qB_0} = -qB_0\dot{z}$$
$$\dot{z} = v_z$$
$$\frac{m^2\ddot{v}_z}{qB_0} = -qB_0v_z$$

Problema 4.1

$$\frac{m^2 \ddot{z}}{qB_0} = -qB_0 \dot{z}$$

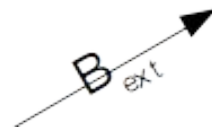
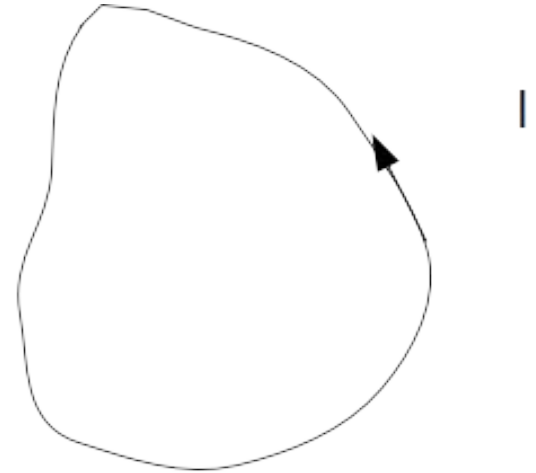
$$\dot{z} = v_z$$

$$\frac{m^2 \ddot{v}_z}{qB_0} = -qB_0 v_z$$

Fuerza de Lorentz sobre una distribución continua

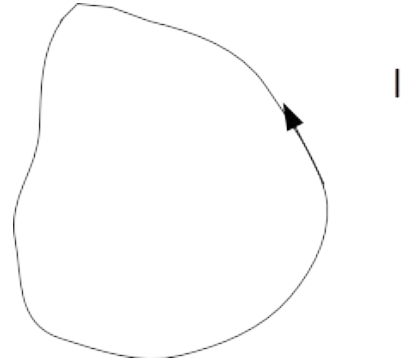
$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

$$\text{si } \vec{B}_{ext} = B_0 \hat{z} \rightarrow \vec{F} = 0$$

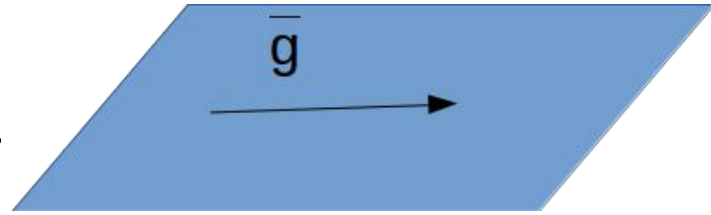


Ley de Biot Savart

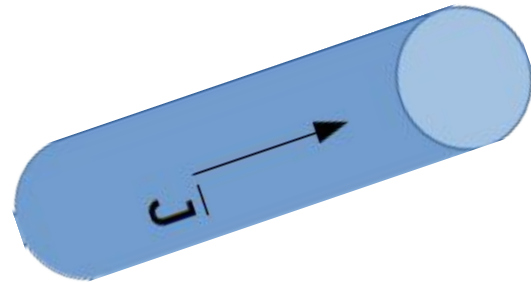
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_S \frac{\vec{g} \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

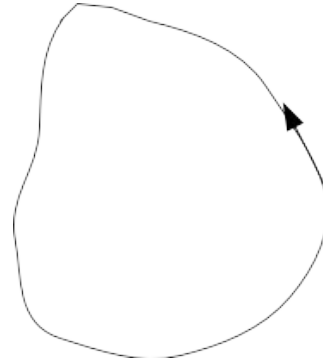


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



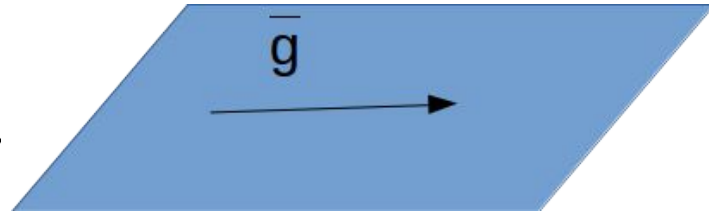
Ley de Biot Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

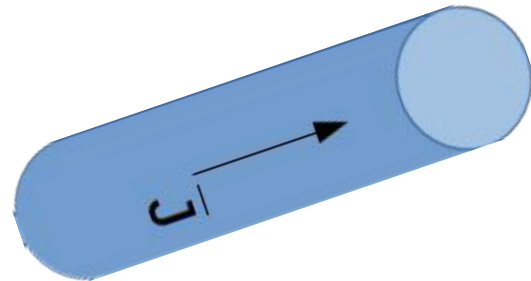


$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$
$$[\vec{B}] = T(\text{Tesla})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_S \frac{\vec{g} \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

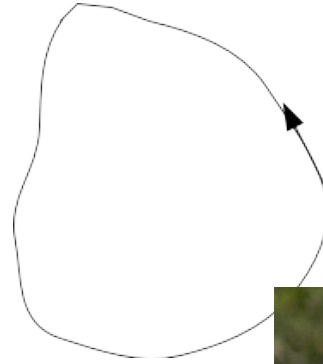


Ley de Biot Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_S \frac{\vec{g} \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



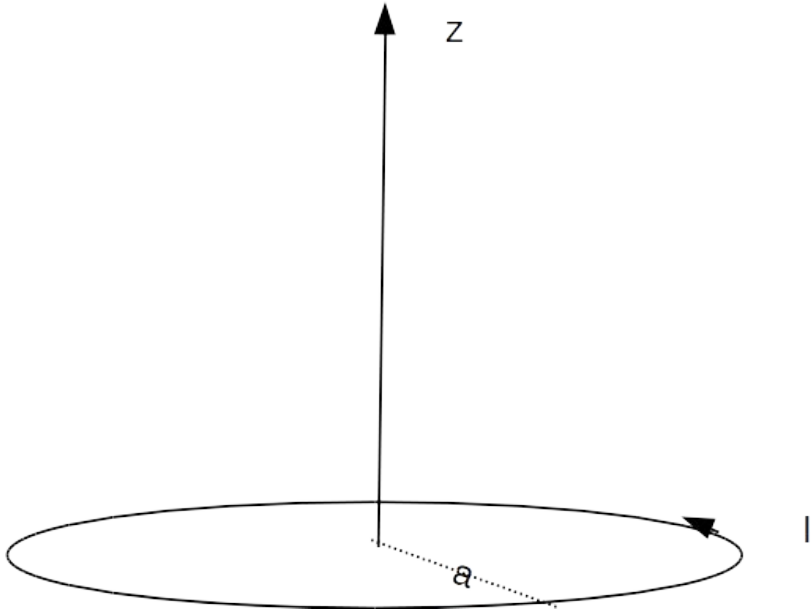
$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

$[\vec{B}] = T(\text{Tesla})$



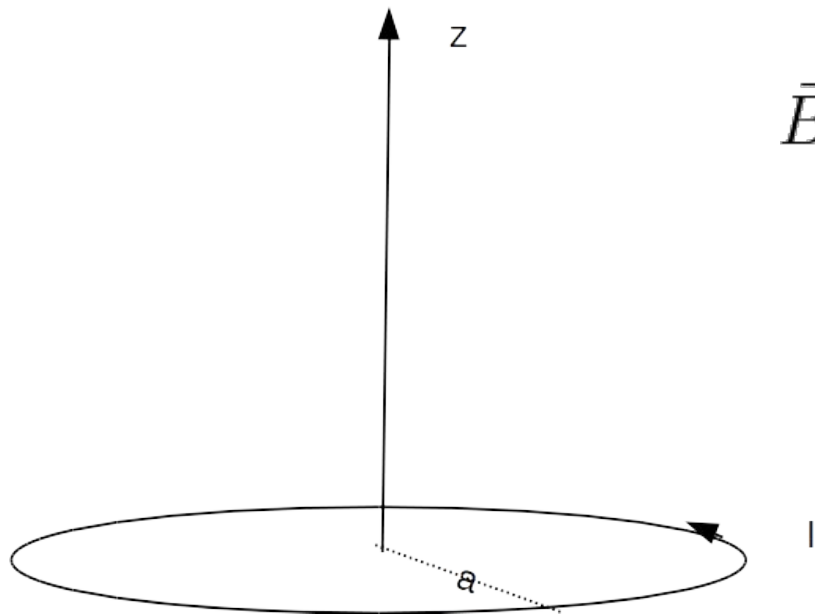
Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .



Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .

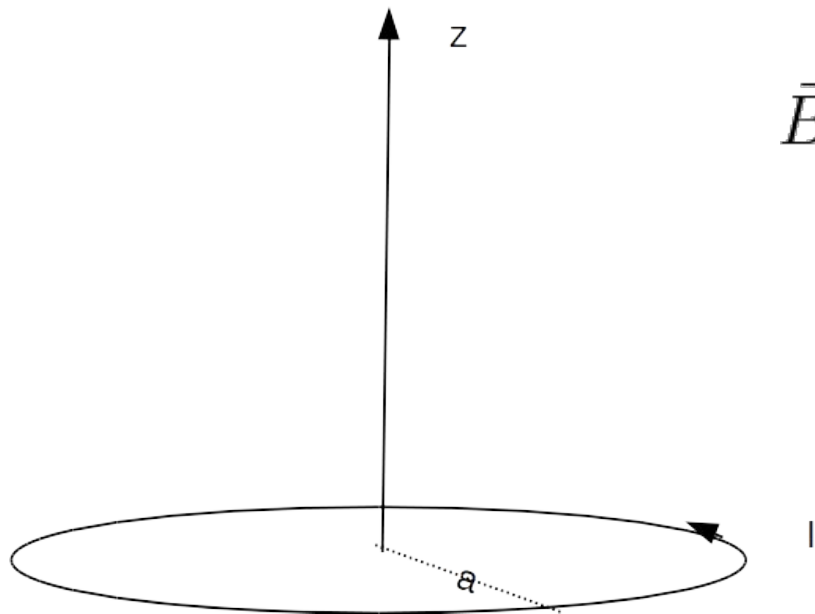


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Identidad vectorial que conviene encarar en coordenadas cilíndricas.

Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

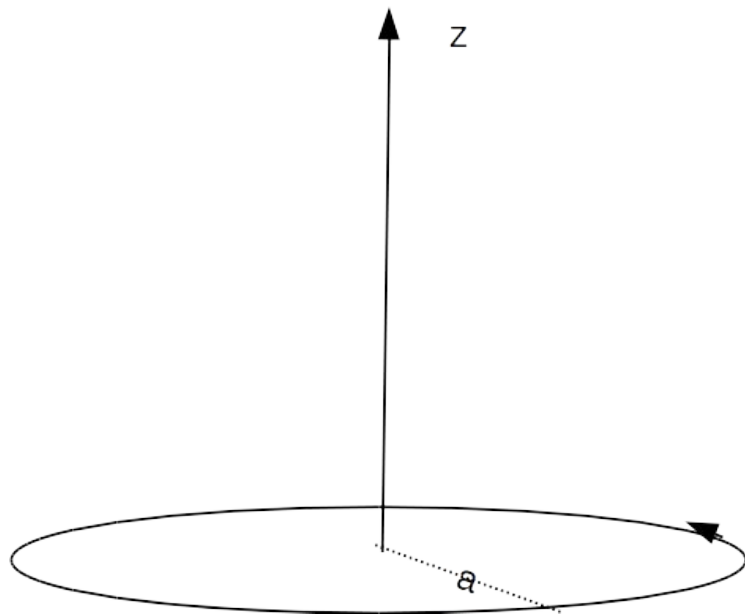
$$d\vec{l} = a d\phi \hat{\phi}$$

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a \hat{r}$$

Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .



$$d\vec{l} = a d\phi \hat{\phi}'$$

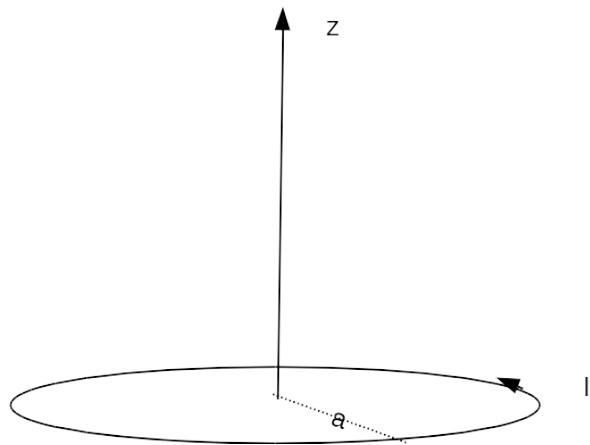
$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a \hat{r}'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi \hat{\phi}' \times (z \hat{z} - a \hat{r}')}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' \hat{\phi}' \times (z \hat{z} - a \hat{r}')}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' (z \hat{r}' + a \hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$B_z = + \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a^2 d\phi'}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

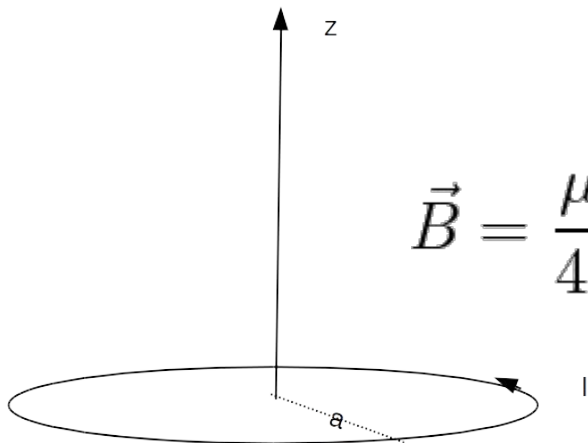
$$B_{\perp z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' z (\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 0$$

Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' \hat{\phi}' \times (z \hat{z} - a \hat{r}')}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' (z \hat{r}' + a \hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2} \frac{I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



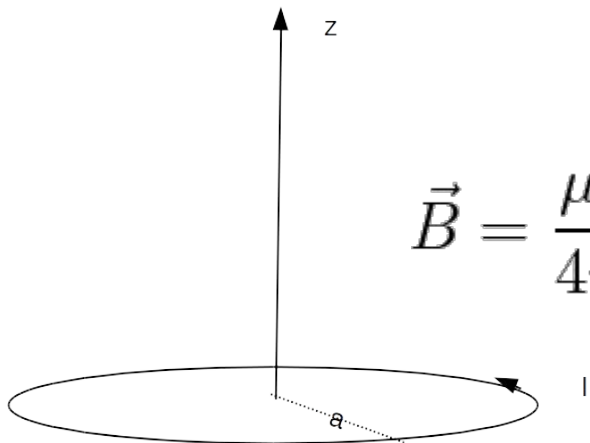
Problema 4.6

6. Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi \hat{\phi} \times (z \hat{z} - a \hat{r}')}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

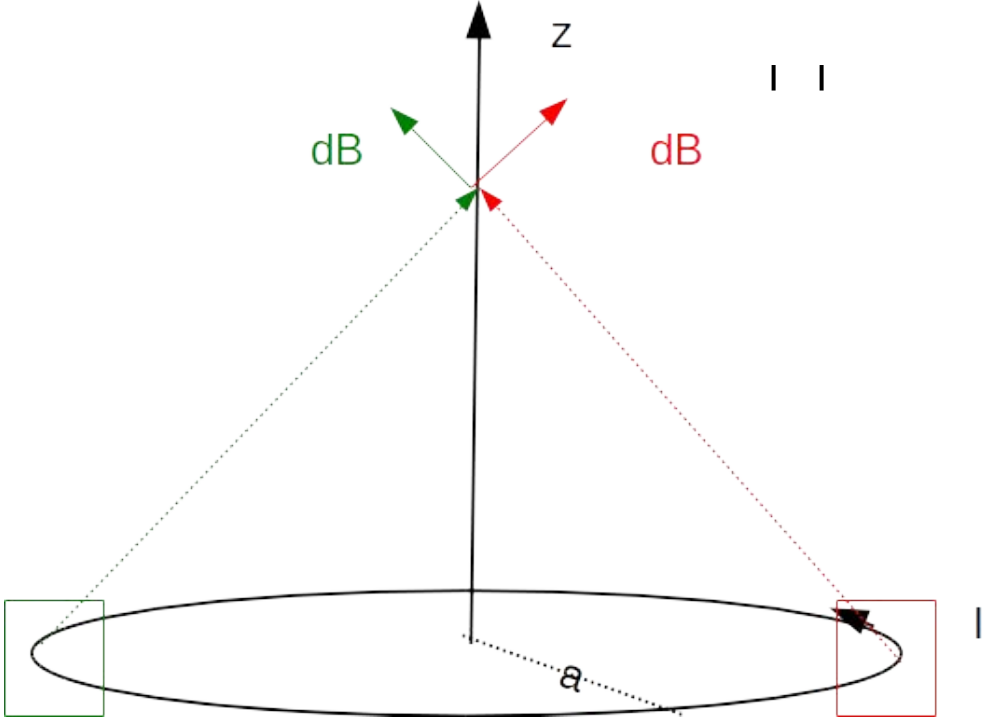
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' (z \hat{r}' - a \hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2} \frac{\boxed{I a^2}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Momento magnético de la espira



Problema 4.6 - Interpretación

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi' (z\hat{r}' - a\hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2} \frac{I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

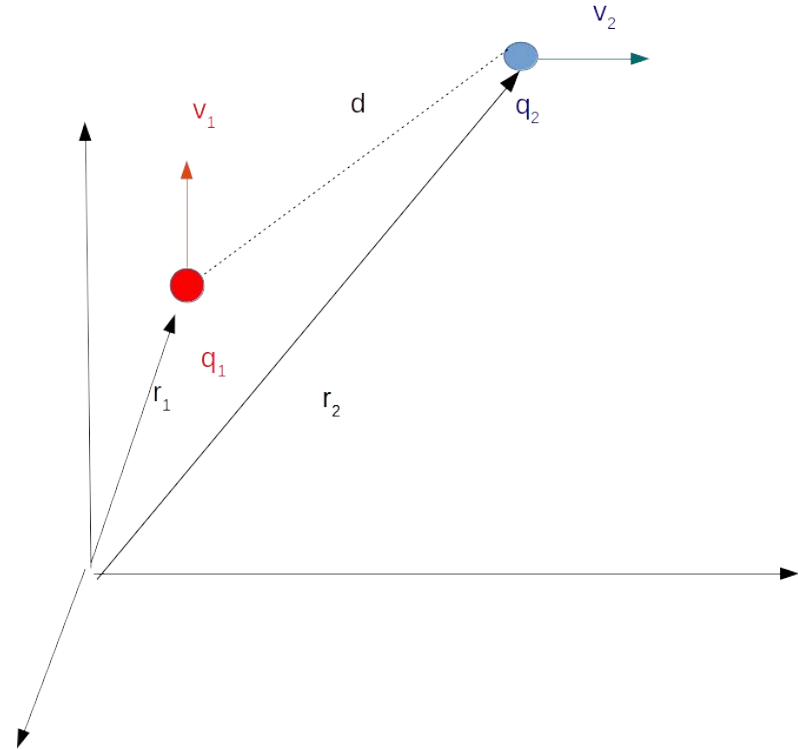


Para Problema 4.2

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

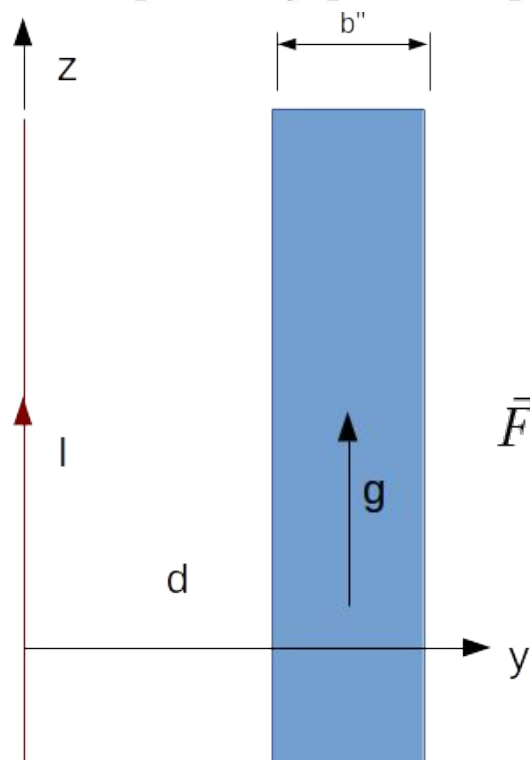
$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \vec{v}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = q_1 \vec{v}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \vec{v}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right)$$



Comentarios del Problema 4.5

5. Calcule la fuerza por unidad de longitud entre una cinta infinita de ancho b por la que circula una densidad superficial de corriente \vec{g} uniforme, y un cable infinito coplanar y paralelo por el que circula una corriente I de igual sentido que \vec{g} .

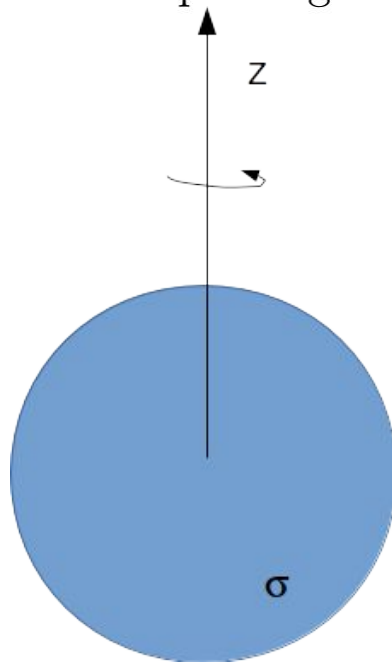


$$\vec{F} = \int \int_S \vec{g} dS' \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I dz' \hat{z} \times (z'' \hat{z} + y'' \hat{y} - z' \hat{z})}{((z'' - z')^2 + y'')^{3/2}}$$

$$\vec{F} = \int_{-L_2}^{L_2} \int_d^{d+b} g \hat{z} dz'' dy'' \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I dz' \hat{z} \times (z'' \hat{z} + y'' \hat{y} - z' \hat{z})}{((z'' - z')^2 + y'')^{3/2}}$$

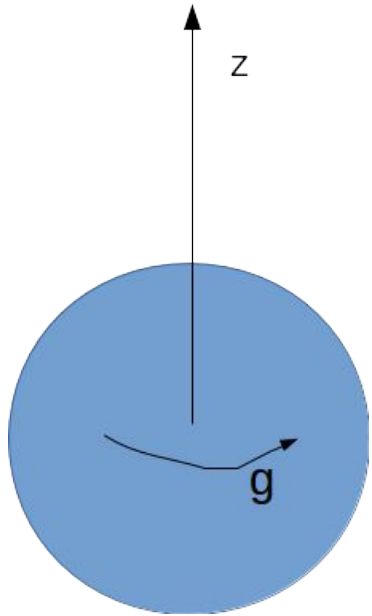
Comentarios del Problema 4.7

7. Una esfera de radio R , cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular w . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.



Comentarios del Problema 4.7

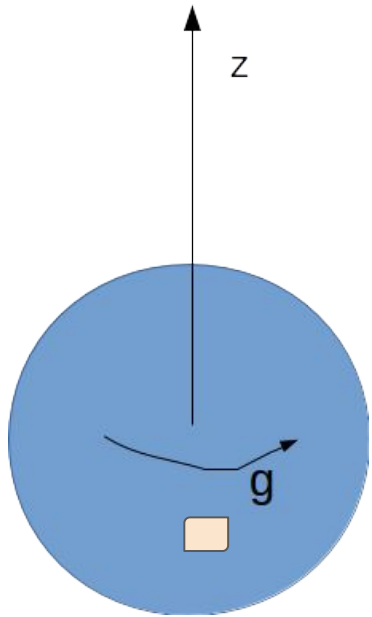
7. Una esfera de radio R , cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular ω . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.



$$[\vec{g}] = A/m$$
$$\vec{g} = \frac{\Delta Q}{\delta t \delta l} \hat{\phi}$$
$$\delta l = R d\theta$$
$$\omega = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$$

Comentarios del Problema 4.7

7. Una esfera de radio R , cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular w . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.



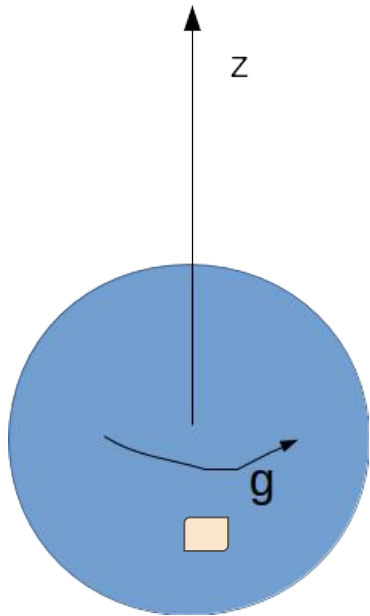
$$\vec{g} = \frac{\Delta Q}{\delta t \delta l} \hat{\phi}$$

$$\delta l = R d\theta$$

$$\Delta Q = \sigma R^2 \sin\theta d\phi d\theta$$

Comentarios del Problema 4.7

7. Una esfera de radio R , cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular w . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.



$$\vec{g} = \frac{\Delta Q}{\delta t \delta l} \hat{\phi} = \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\phi d\theta}{\delta t R d\theta} \hat{\phi}$$
$$\vec{g} = \sigma R \sin\theta \dot{\phi} \hat{\phi}$$

Puedo calcular el campo magnético con la expresión

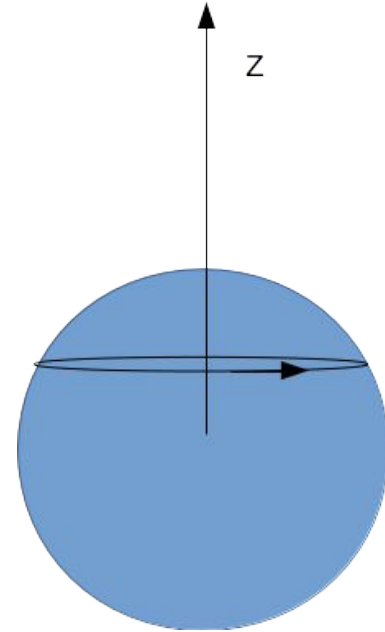
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_S \frac{\vec{g} \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Comentarios del Problema 4.7

7. Una esfera de radio R , cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular w . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.

Se puede pensar que tengo una sucesión de espiras centradas a diferentes z y de diferentes radio

$$r = R \sin \theta$$
$$z' = R \cos \theta$$
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\phi d\theta}{\Delta t} = \sigma R^2 \sin \theta \omega d\theta$$



Comentarios del Problema 4.7

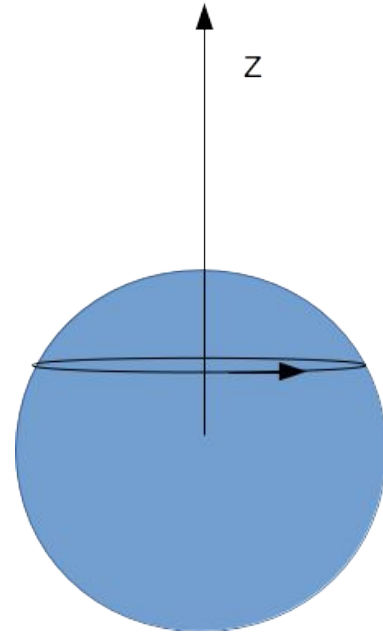
Del problema de la espira...

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\phi \hat{\phi} \times (z\hat{z} - ar'\hat{r}')}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$r = R \sin\theta$$

$$z' = R \cos\theta$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\phi d\theta}{\Delta t} = \sigma R^2 \sin\theta \omega d\theta$$



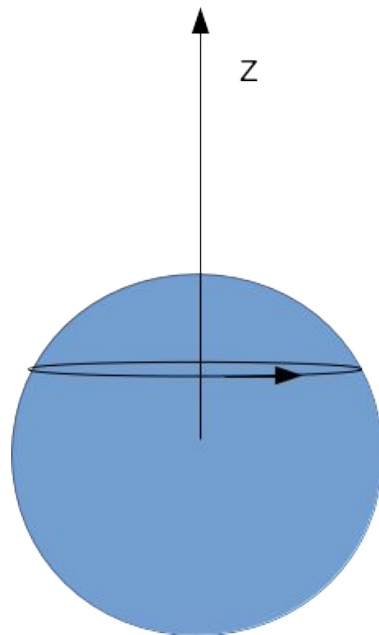
Comentarios del Problema 4.7

Del problema de la espira...

$$r = R \sin \theta$$

$$z' = R \cos \theta$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\phi d\theta}{\Delta t} = \sigma R^2 \sin \theta \omega d\theta$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma R^2 \sin \theta \omega R \sin \theta d\phi \hat{\phi} \times ((z - R \cos \theta) \hat{z} - R \sin \theta r_{cil} \hat{e}_{cil})}{|(z - R \cos \theta) \hat{z} - R \sin \theta r_{cil} \hat{e}_{cil}|^{3/2}} d\theta$$

$$\vec{B} = \int_0^\pi d\vec{B}$$

