Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 1
Clase 4
Facundo Pugliese

Potencial electrostático: Construcción

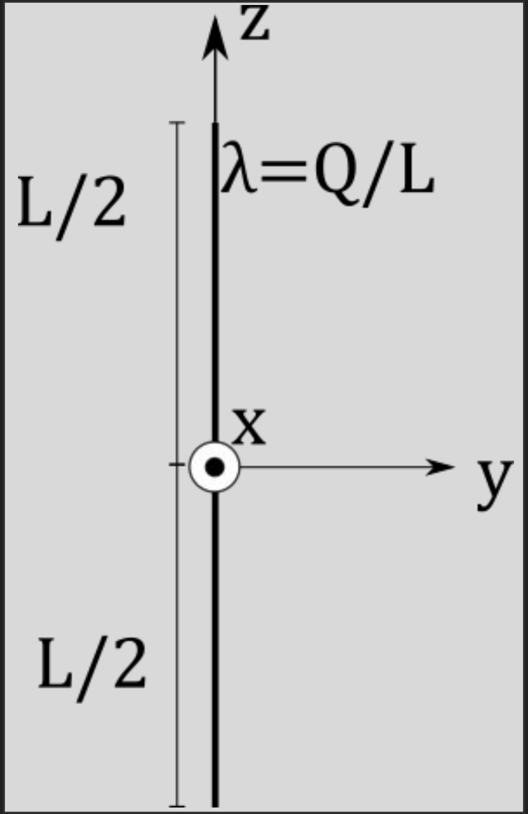
Aprovechando que $$\nabla\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right) = -\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

y que la integral que define E es en la variable r'

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}) = k\int \rho(\bar{r}')\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}d^3r' &= -k\int \rho(\bar{r}')\nabla\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)d^3r' \\ &= -\nabla\left(k\int \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d^3r'\right) \equiv -\nabla\phi(\bar{r})\end{aligned}$$

Ventaja: *Pasamos de 3 integrales (una por dimensión) a solo 1*

Ejercicio 9: Potencial de un hilo finito



9. Calcule el potencial electrostático para la situación descripta en el Problema 5. Verifique que su gradiente es $-E$. ¿Qué ocurre cuando la longitud del hilo se hace infinita?

5. Un hilo muy fino de longitud L está cargado uniformemente con una carga total Q. Calcular el campo eléctrico en todo punto del espacio.

$$\bar{r} = (x, y, z)$$
$$\bar{r}' = (0, 0, z) \qquad -L/2 \leq z \leq L/2$$
$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$$

Surge la coordenada radial de cilíndricas $r^2 = x^2 + y^2$

$$\phi(\bar{r}) = k \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz'$$

Ejercicio 9: Potencial de un hilo finito

$$\phi(\bar{r}) = k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z-z'}{r}\right)^2}} \frac{dz'}{r} = -k\lambda \int_{u\left(-\frac{L}{2}\right)}^{u\left(\frac{L}{2}\right)} \frac{\cosh(u)}{\sqrt{1+\sinh^2(u)}} du$$

$$\frac{z-z'}{r} = \sinh(u)$$

$$-\frac{dz'}{r} = \cosh(u)du$$

$$= k\lambda \left[u\left(-\frac{L}{2}\right) - u\left(\frac{L}{2}\right)\right]$$

$$= k\lambda \left[\operatorname{asinh}\left(\frac{z+L/2}{r}\right) - \operatorname{asinh}\left(\frac{z-L/2}{r}\right)\right]$$

$$\phi(\bar{r}) = k\lambda \left[\operatorname{asinh}\left(\frac{L/2-z}{r}\right) + \operatorname{asinh}\left(\frac{L/2+z}{r}\right)\right] \xrightarrow[\text{ó } r\to\infty]{z\to\infty} 0$$

¿Pero qué significa $r\to\infty$? ¿∞cm ó ∞km? ¿Llego más rápido a ∞ en cm ó en km?

Lo que se va a ∞ no puede tener unidades (un adimensional): acá z/L o r/L

Ejercicio 9: Campo de un hilo finito

Tomamos el gradiente de $\phi(\bar{r}) = k\lambda \left[\operatorname{asinh}\left(\frac{L/2 - z}{r}\right) + \operatorname{asinh}\left(\frac{L/2 + z}{r}\right) \right]$

En cilíndricas: $\nabla\phi(r,\varphi,z) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$ y usando $\frac{d}{dx}\operatorname{asinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\bar{E}(\bar{r}) = k\lambda \left[\left(\frac{L/2 - z}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2-z}{r}\right)^2}} + \frac{L/2 + z}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2+z}{r}\right)^2}} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2-z}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2+z}{r}\right)^2}} \right) \hat{z} \right]$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = k\lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{L/2 - z}{\sqrt{r^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{r^2 + (L/2 + z)^2}} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2-z}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2+z}{r}\right)^2}} \right) \hat{z} \right]$$

Ejercicio 9: Campo de un hilo **IN**finito

Tomamos el límite $L \to \infty$ (osea, $L \gg r, z$): $L/2 \pm z \approx L/2$ y $\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + (L/2 \pm z)^2}} \approx \dfrac{2}{L}$

$$\bar{E}(\bar{r}) = k\lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{L/2 - z}{\sqrt{r^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{r^2 + (L/2 + z)^2}} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2 - z}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L/2 + z}{r}\right)^2}} \right) \hat{z} \right]$$

$$\bar{E}(\bar{r}) \approx k\lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{L}{2}\frac{2}{L} + \frac{L}{2}\frac{2}{L} \right) \hat{r} + \left(\frac{2}{L} - \frac{2}{L} \right) \hat{z} \right] = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$$

Integrando tenemos $\phi(r) = -2k\lambda \ln(r) + \phi_o \cancel{\xrightarrow[\text{ó } r \to \infty]{z \to \infty}} 0$ ¿Qué pasó?

¡Para ningún ϕ_o!

Ejercicio 9: Potencial de un hilo **IN**finito

Si hacemos con cuidado el límite $L \to \infty$ para ϕ

$$\phi(r) = k\lambda\left[\operatorname{asinh}\left(\frac{L}{2r}\left(1+\frac{2z}{L}\right)\right) + \operatorname{asinh}\left(\frac{L}{2r}\left(1-\frac{2z}{L}\right)\right)\right]$$

$$\approx 2k\lambda \operatorname{asinh}\left(\frac{L}{2r}\right) \approx 2k\lambda\ln\left(\frac{L}{r}\right)$$

$$\phi(r) = -2k\lambda\ln(r) + 2k\lambda\ln(L) \xrightarrow{L\to\infty} \infty$$

donde usamos para x grande

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2} \implies x \approx \ln(2\sinh(x)) \implies \operatorname{asinh}(x) \approx \ln(2x)$$

Distribuciones infinitas

Entonces ϕ está definida a menos de una divergencia, **la integral no converge.**

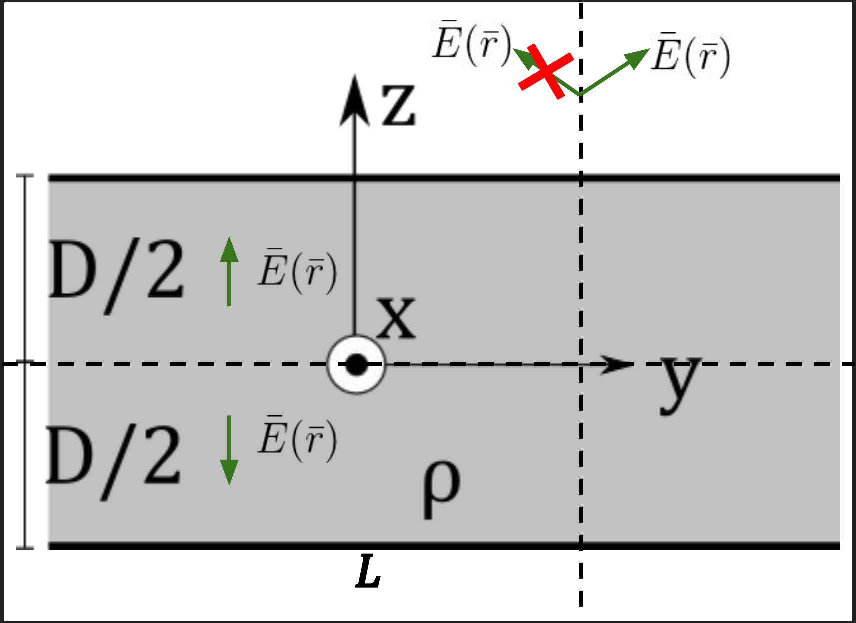
Aún ignorando la parte divergente (es una “constante”), $\boldsymbol{\phi}$ **no se anula en el** $\boldsymbol{\infty}$**.**

En general, **cualquier distribución de cargas no acotada** (i.e. plano infinito, cilindro infinito) **tendrá este problema**. Aún así $\boldsymbol{E}$ siempre converge, aunque puede no anularse en el ∞ (i.e. plano infinito).

¿Por qué? A *grosso modo*, podemos decir que **para un sistema infinito nunca se puede estar suficientemente lejos** (por más lejos que me vaya, lo sigo viendo “igual”, infinito). Con 1 dimensión infinita (hilo, cilindro infinitos), solo ϕ no se anula en el ∞. Con 2, tampoco E se anula en el ∞.

Ejercicio 10: Plano con espesor

Ya que estamos trabajando con límites, profundicemos la noción de “densidad superficial”. ¿Cómo podemos tener carga (o masa) que carezca de volumen?



Dado que el sistema tiene simetría de traslación en x e y, el campo no puede depender de esas coordenadas.

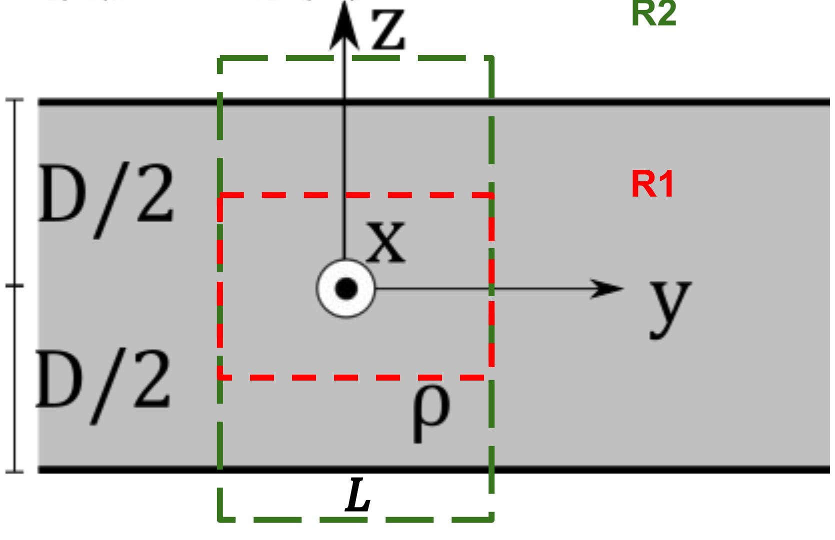
Usando la simetría de reflexión en los planos x-z e y-z (para todo punto), anulamos las componentes E_x y E_y.

Usando la simetría de reflexión en x-y, tenemos que $E_z(-z) = -E_z(z)$

Ejercicio 10: Plano con espesor

Tomamos un prisma de base cuadrada (lado L) y altura $2z$ centrado en $z=0$.
Como E solo tiene componente en z, solo las tapas contribuyen al flujo ($dS_{lat} \perp z$)

$$\bar{E}(\bar{r}) = E_z(z)\hat{z}$$



$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \oint_{S_{\text{sup}}} \bar{E}\cdot d\bar{S}_{\text{sup}} + \oint_{S_{\text{inf}}} \bar{E}\cdot d\bar{S}_{\text{inf}}$$
$$= \oint_{S_{\text{sup}}} E(z)\hat{z}\cdot\hat{z}dS_{\text{sup}} + \oint_{S_{\text{inf}}} E(-z)\hat{z}\cdot(-\hat{z})dS_{\text{inf}}$$
$$= A(S)\left[E(z) - E(-z)\right] = 2L^2E(z)$$

Para calcular la carga encerrada, tenemos que separar en 2 casos (o regiones)

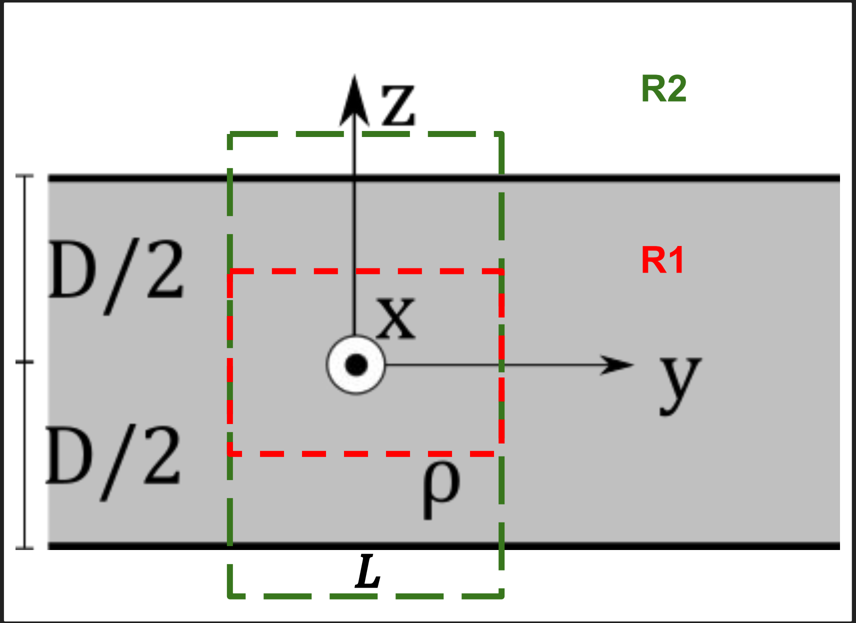
R1: $z \le D/2$

R2: $z \ge D/2$

Ejercicio 10: Plano con espesor

En R1 ($z \leq D/2$): Tenemos carga en todo el volumen encerrado

$$Q_{\text{enc}} = \int_{-z}^{z}\int_0^L\int_0^L \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = L^2 2z\rho$$



En R2 ($z \geq D/2$): Solo hay carga hasta $D/2$

$$Q_{\text{enc}} = \int_{-D/2}^{D/2}\int_0^L\int_0^L \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = L^2 D\rho$$

Luego, para $z \geq 0$ tenemos

$$2L^2 E(z) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} = \begin{cases} L^2 2z\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \leq D/2 \\ L^2 D\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \geq D/2 \end{cases}$$

$$E(z) = \begin{cases} z\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \leq D/2 \\ \frac{D}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \geq D/2 \end{cases}$$

Continuo

Ejercicio 10: Plano con espesor

Usando que $E_z(-z) = -E_z(z)$

$$E(z) = \begin{cases} -\frac{D}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \leq -D/2 \\ z\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \frac{D}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } z \geq D/2 \end{cases} = \begin{cases} z\frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \underbrace{\frac{D}{2}\mathrm{sg}(z)\frac{\rho}{\varepsilon_o}} & \text{si } |z| \geq D/2 \end{cases}$$

Similar al plano infinito

El potencial se obtiene integrando $E = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{D}{2}z\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \alpha & \text{si } z \leq -D/2 \\ -\frac{1}{2}z^2\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \beta & \text{si } |z| \leq D/2 \\ -\frac{D}{2}z\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \gamma & \text{si } z \geq D/2 \end{cases}$$

Con ***α***, ***β***, ***γ*** constantes de integración que salen pidiendo continuidad (o casi...)

$$\phi\left(-\frac{D}{2}^{-}\right) = \phi\left(-\frac{D}{2}^{+}\right)$$

$$-\frac{D}{2}\frac{D}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \alpha = -\frac{1}{2}\left(-\frac{D}{2}\right)^2\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \beta$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \beta$$

¿Como obtenemos ***β***? Idealmente, usamos la condición $\phi(z\to\infty)=0$ pero es imposible pues $|\phi| \sim |z|$ (sist. infinito)

$$\phi\left(\frac{D}{2}^{-}\right) = \phi\left(\frac{D}{2}^{+}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \beta = -\frac{D}{2}\frac{D}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \gamma$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \beta = \gamma$$

Ejercicio 10: Plano ~~con~~ sin espesor

Nos conformamos con $\boldsymbol{\beta}$=0 ($\phi(z=0)=0$) y aprovechamos que $\gamma = \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

Así queda

$$\phi(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2} z^2 \frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \frac{D}{2}\left(\frac{D}{4} - |z|\right) \frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \geq D/2 \end{cases}$$

$$E(z) = \begin{cases} z \frac{\rho}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \text{sg}(z) \frac{\rho}{\varepsilon_o} \frac{D}{2} & \text{si } |z| \geq D/2 \end{cases}$$

Ahora queremos volver la placa infinitamente delgada (D→ 0) pero manteniendo la carga en toda sección ΔxΔy: $Q = \Delta x \Delta y D\rho \Longrightarrow D\rho = Q/\Delta x \Delta y \equiv \sigma = \text{cte}$

En términos de esta densidad superficial

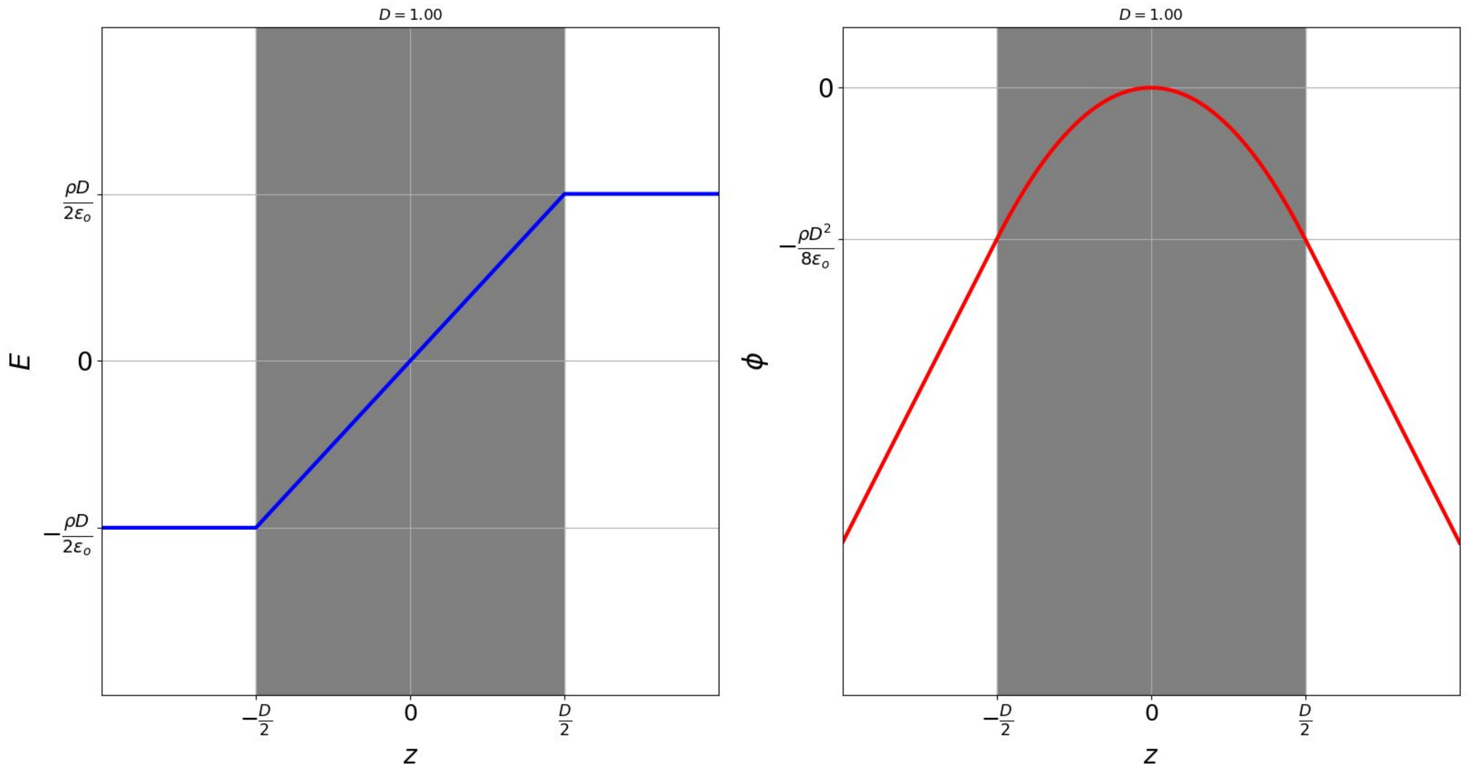
$$\phi(z) = \begin{cases} -\frac{z^2}{D} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \left(\frac{D}{4} - |z|\right) \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} & \text{si } |z| \geq D/2 \end{cases}$$

$$E(z) = \begin{cases} \frac{z}{D} \frac{\sigma}{\varepsilon_o} & \text{si } |z| \leq D/2 \\ \text{sg}(z) \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} & \text{si } |z| \geq D/2 \end{cases}$$

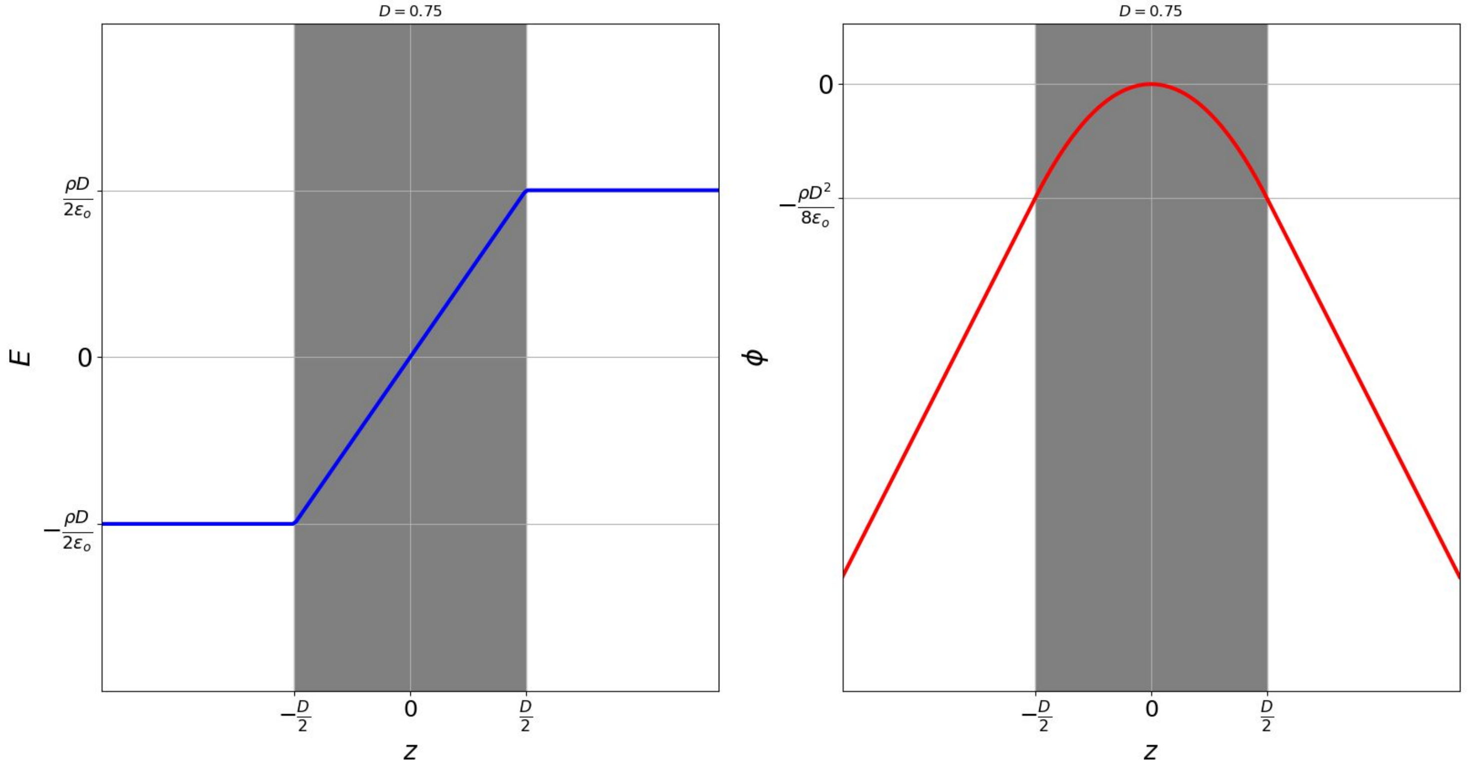
$$\phi\left(|z| = \frac{D}{2}\right) = \frac{\sigma}{8\varepsilon_o} D$$

$$E\left(|z| = \frac{D}{2}\right) = sg(z) \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

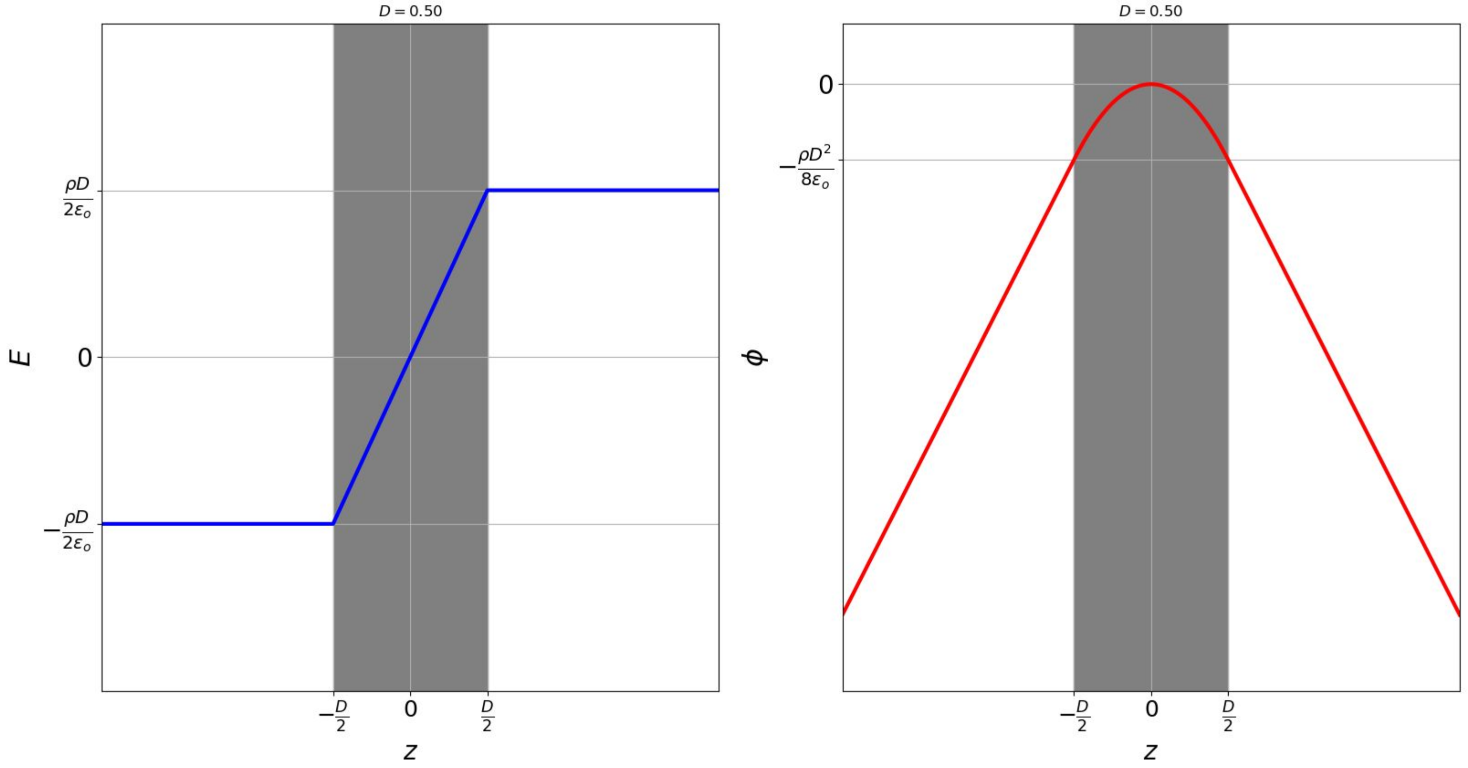
Ejercicio 10: Gráficos



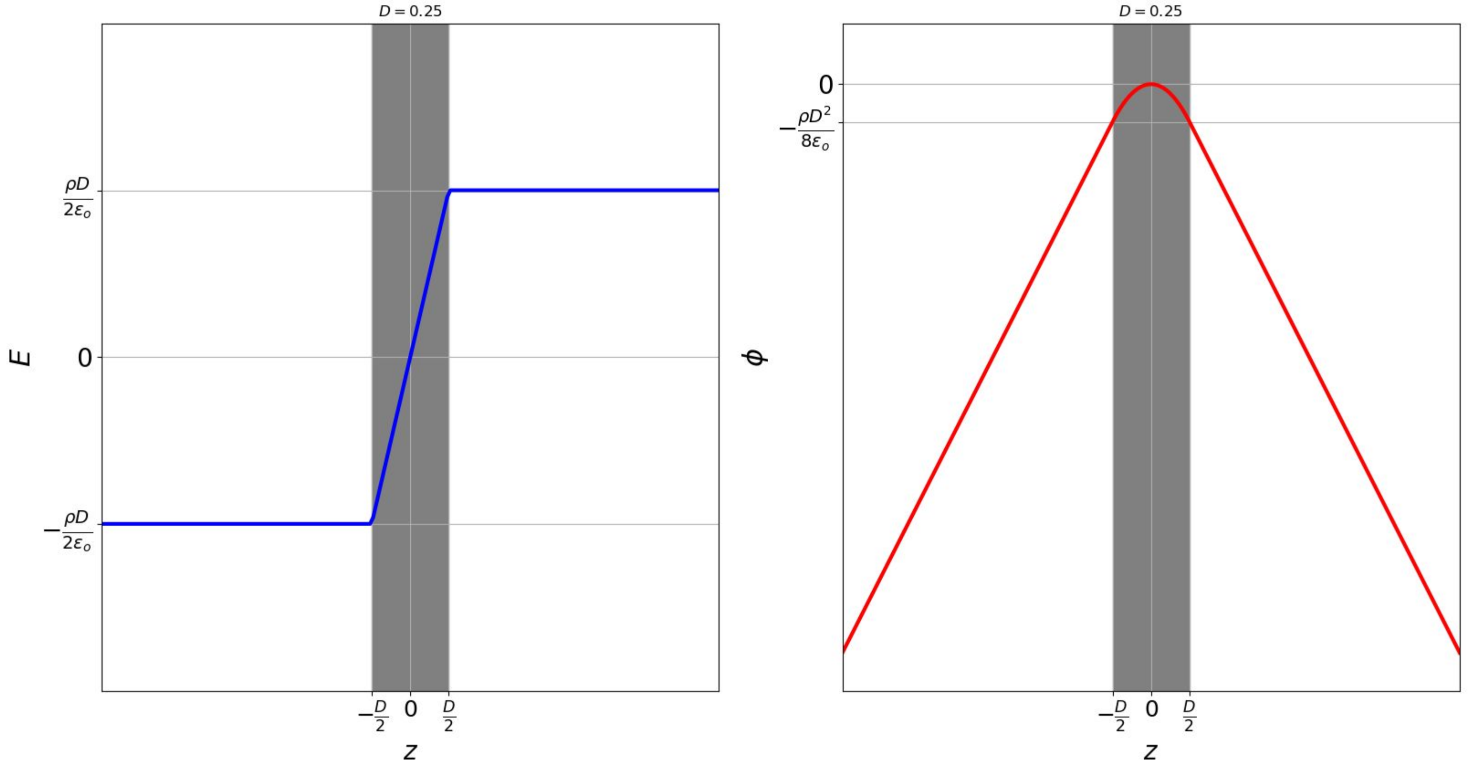
Ejercicio 10: Gráficos



Ejercicio 10: Gráficos



Ejercicio 10: Gráficos



Ejercicio 10: Gráficos