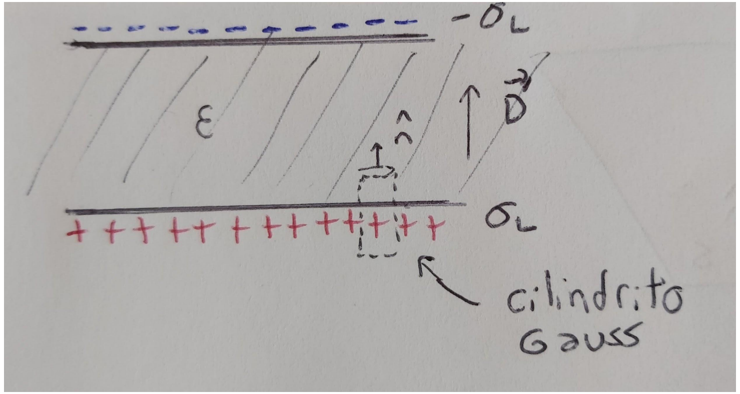
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 10

Ejemplo de problema con dieléctricos:



El medio tiene permitividad ϵ

Lo hacemos primero a través del vector desplazamiento:

Usamos Gauss en medios $\oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = Q_L(S)$

Tomamos un cilindrito de Gauss, con una tapa en el medio y la otra en la placa,

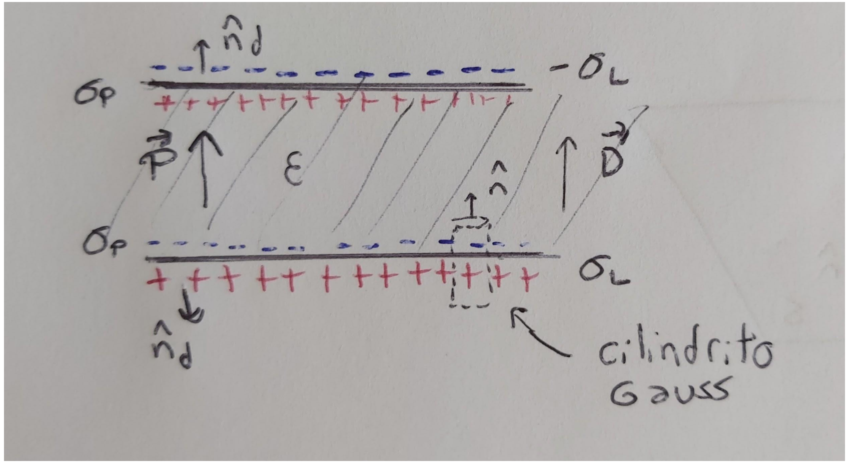
$$D\,\delta S = \sigma_L\,\delta S \;\;\rightarrow\;\; D = \sigma_L$$

$$D = \epsilon\,E \;\;\rightarrow\;\; E = \sigma_L/\epsilon$$

Si queremos también podemos calcular la polarización,

$$D = \epsilon_0 E + P \;\;\rightarrow\;\; P = (\epsilon - \epsilon_0)E = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon}\sigma_L = \Big(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\Big)\sigma_L$$

Otra forma de hacerlo, con la densidad de polarización,



Como el campo eléctrico es uniforme entre las placas, y el medio es LIH, la polarización también es uniforme y tenemos,

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} = 0$$

En la tapa superior, $\sigma_P = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n_d}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = P$

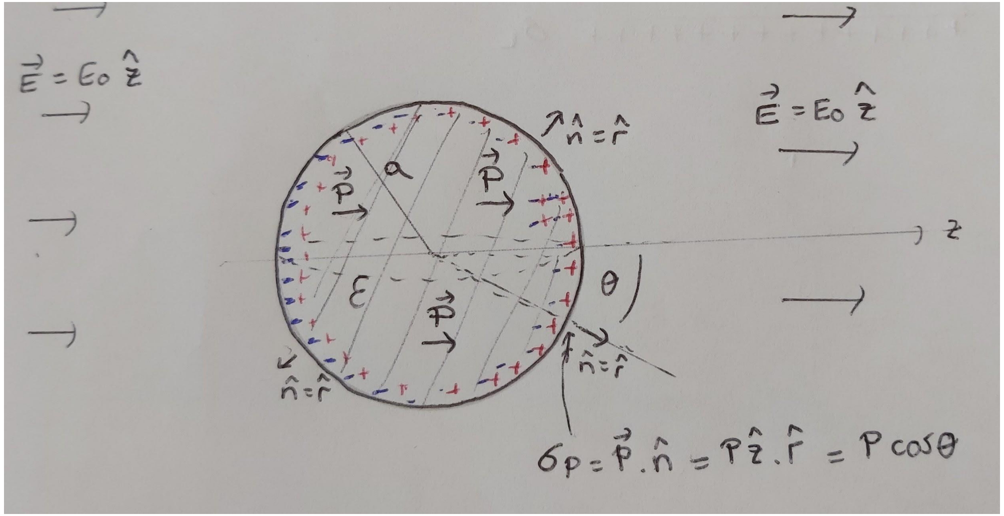
En la tapa inferior, $\sigma_P = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n_d}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) = -P$

Ahora, consideramos un problema (por superposición) con densidad de carga $\sigma_L - P$ en la tapa inferior y densidad de carga $-\sigma_L + P$ en la tapa superior,

$\rightarrow E = \dfrac{\sigma_L - P}{\epsilon_0}$ y como $P = \chi\, \epsilon_0\, E$ con $\epsilon_0(1+\chi) = \epsilon \rightarrow \chi = \epsilon/\epsilon_0 - 1\,,\ P = (\epsilon - \epsilon_0)E$

$\rightarrow P = \sigma_L - \epsilon_0 E = (\epsilon - \epsilon_0)E \rightarrow E = \sigma_L/\epsilon$ y si queremos $D = \epsilon E = \sigma_L$

Otro ejemplo: esfera dieléctrica en campo uniforme



Lo hacemos con densidad de carga de polarización: como el medio en la esfera es LIH responde al campo eléctrico uniforme con una polarización uniforme. La densidad de carga de polarización en el interior de la esfera será 0, mientras que en la superficie tenemos

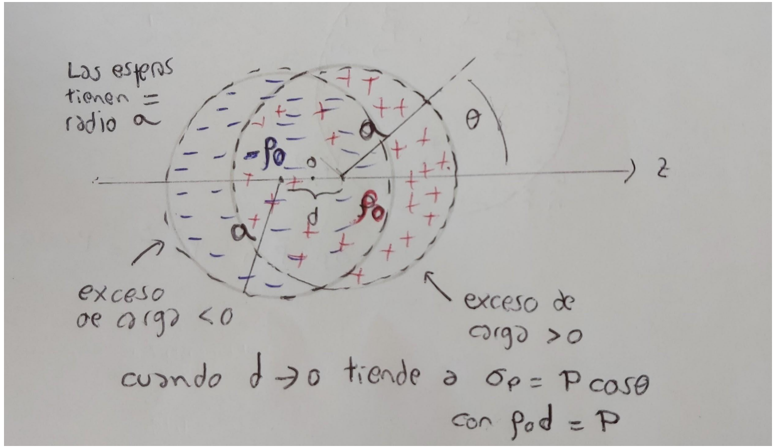
$$\sigma_P = \overrightarrow{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P\cos\theta$$

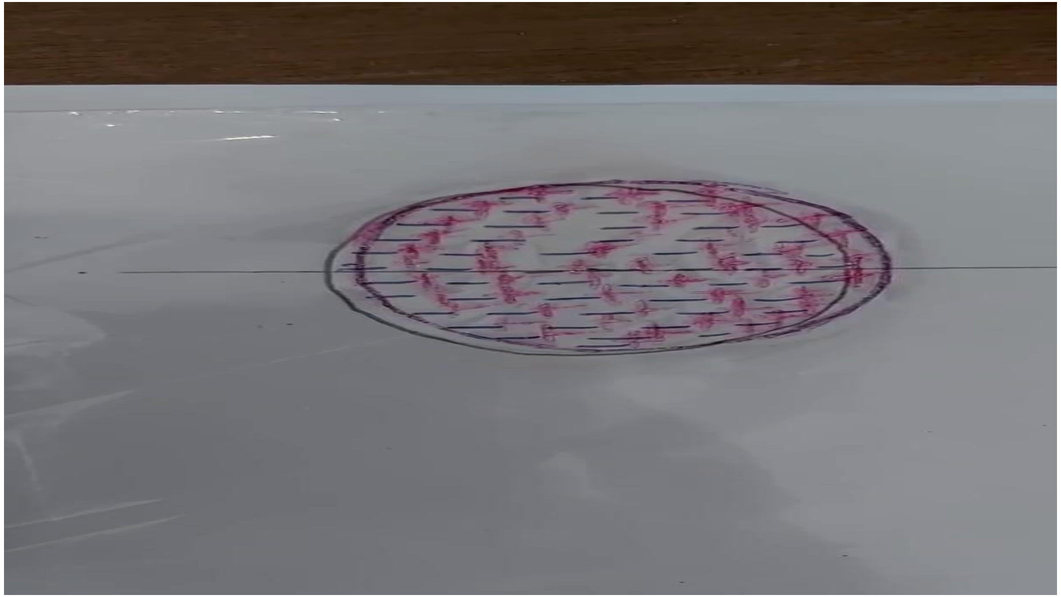
Notemos que va a ser positiva del hemisferio derecho y negativa del izquierdo

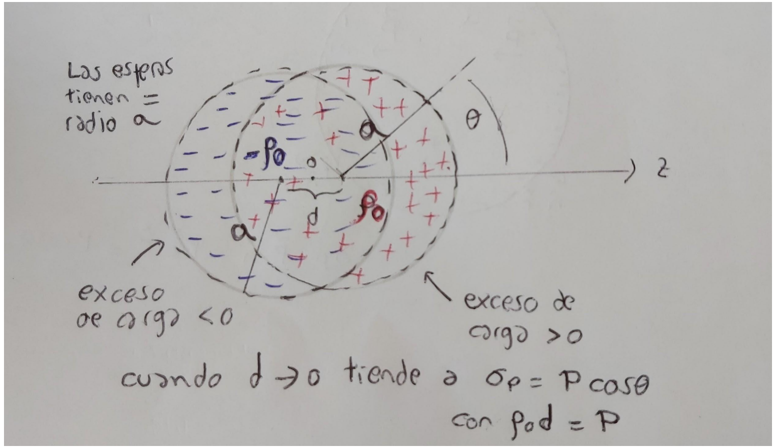
<u>El problema entonces lo podemos pensar como el de una distribución de carga en una superficie esférica</u>, con esa densidad (aunque P=cte es una incógnita que se despeja a posteriori) superpuesto a un campo eléctrico uniforme → sale por integración directa, aunque son bastantes cuentas.

En lugar de hacerlo por integración directa vamos a usar otra forma, con resultados que ya conocíamos.

Lo vamos a pensar como la superposición de dos esferas cargadas en volumen, una con densidad de carga positiva ρ_0, corrida levemente hacia la derecha en $z = d/2$ y otra con densidad de carga negativa $-\rho_0$ corrida levemente hacia la izquierda en $z = -d/2$, como si fuesen las cargas de un dipolo, y hacemos $\rho_0 \, d = P$.







Recordemos el campo eléctrico de una esfera de radio a, centrada en el origen, y con densidad ρ_0 es

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \rightarrow V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0}$$, para $r < a$

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \rightarrow V(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r}$$, para $r > a$

Si tenemos la esfera desplazada a la derecha en $z = d/2$,

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = -\frac{\rho_0 |\overrightarrow{\mathbf{r}} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}|^2}{6\epsilon_0} \simeq -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 z\, d}{6\epsilon_0}\,, \quad \text{si } r < a$$

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 |\overrightarrow{\mathbf{r}} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}|} \simeq \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{z\, d}{r^3 2}\right], \quad \text{si } r > a$$

Por otro lado, la esfera con densidad de carga opuesta en $z = -d/2$,

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0 |\overrightarrow{\mathbf{r}} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}|^2}{6\epsilon_0} \simeq \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 z\, d}{6\epsilon_0}\,, \quad \text{si } r < a$$

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 |\overrightarrow{\mathbf{r}} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}|} \simeq -\frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{z\, d}{r^3 2}\right], \quad \text{si } r > a$$

Sumamos los potenciales de las dos esferas y obtenemos,

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0 d\, z}{3\epsilon_0} = \frac{P\, z}{3\epsilon_0}\ , \ \text{si}\ r < a$$

$$V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{a^3}{3\epsilon_0}\frac{\rho_0 d\, z}{r^3} = \frac{a^3}{3\epsilon_0}\frac{P\, z}{r^3}\ , \ \text{si}\ r > a$$

Notemos que esto nos da un campo eléctrico uniforme $-\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ adentro de la esfera dieléctrica y el campo de un dipolo de valor $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{4}{3}\pi a^3 P\, \hat{\mathbf{z}}$ afuera de la esfera dieléctrica.

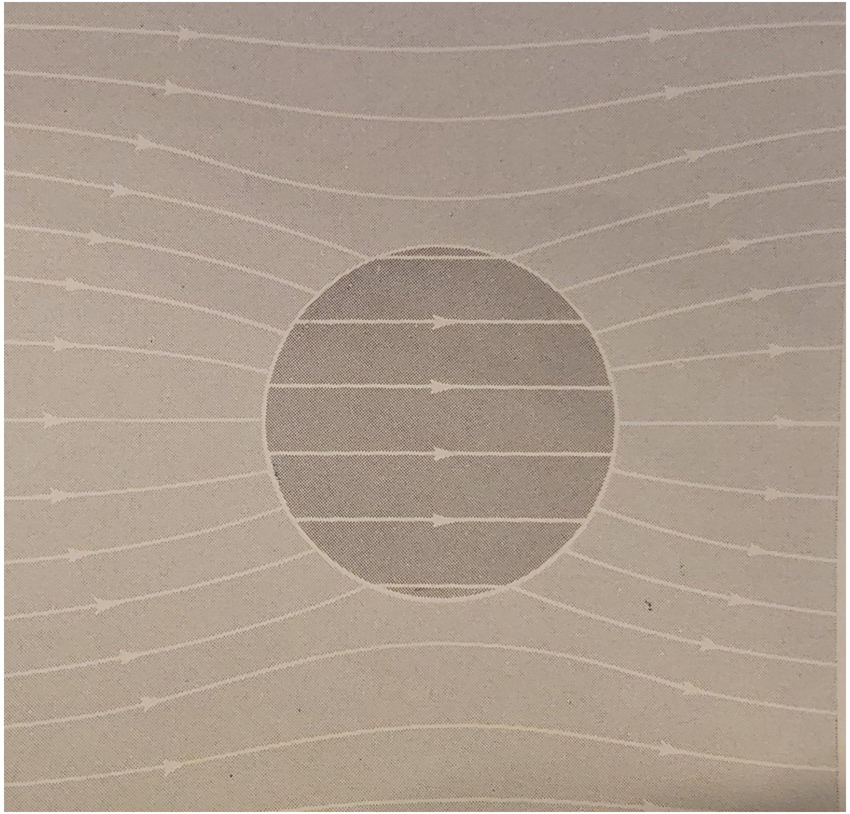
Ojo: falta sumarle el campo eléctrico uniforme $E_0\ \hat{\mathbf{z}}$

Adentro de la esfera dieléctrica entonces el campo total es $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \left(E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0}\right)\hat{\mathbf{z}}$

y de $\overrightarrow{\mathbf{P}} = (\epsilon - \epsilon_0)\overrightarrow{\mathbf{E}}$ despejamos $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \hat{\mathbf{z}}}$ en el interior y $\overrightarrow{\mathbf{P}} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \hat{\mathbf{z}}$

Notemos que el módulo del campo en el interior de la esfera es menor que el campo uniforme inicial.

Afuera de la esfera tenemos el campo de un dipolo de valor $\vec{\mathbf{p}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \hat{\mathbf{z}}$ sumado a un campo uniforme $E_0 \hat{\mathbf{z}}$



← Las líneas de campo eléctrico quedan así

Notar que el campo uniforme adentro de la esfera es más chico que el campo uniforme lejos de la esfera.

Notar que las líneas de campo no entran perpendiculares a la esfera → no es un conductor !

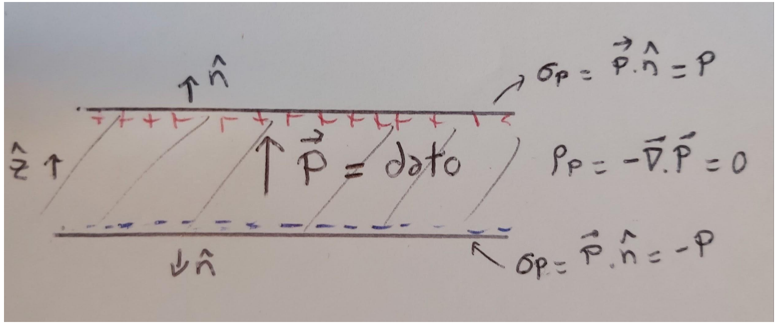
Resulta que si hacemos $\epsilon \to \infty$ el resultado tiende a ser el del caso de la esfera conductora.
Las líneas de campo entran perpendiculares a la esfera y el campo eléctrico en el interior de la esfera se anula (esto último se ve fácilmente del valor del campo en el interior para $\epsilon \to \infty$).

Electretes (o electretos)

Son medios con polarización permanente, que existe aún en ausencia de campo eléctrico: ejemplos de electretes → cuarzo, polímeros (se usan en micrófonos, fotocopiadoras)

Para resolver los problemas me tienen que dar la polarización como dato y se calculan entonces las densidades de polarización y se resuelve un problema con cargas como siempre → listo !

Ejemplo: electrete con polarización P=cte entre dos placas



El campo eléctrico es el que generan dos sup. cargadas con P y -P

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{P}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Notemos que $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = 0$!

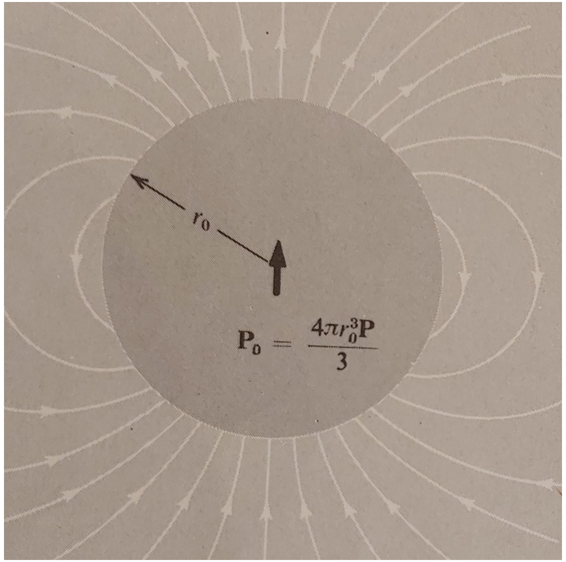
Claramente no es un medio LIH, ni vale $D = \epsilon E$

Si las placas tuvieran además carga libre se resuelve agregando el campo debido a esas cargas.

Esfera electrete con polarización permanente $\vec{\mathbf{P}}$ uniforme: calculamos la densidad de carga de polarización y nos da solamente densidad de carga en la superficie de la esfera con $\sigma_P = P\cos\theta$

→ Ya sabemos lo que da esa distribución de carga ! Es el campo de un dipolo afuera de la esfera y un campo uniforme adentro de la esfera de valor $-\dfrac{\vec{\mathbf{P}}}{3\epsilon_0}$

campo afuera -->



campo afuera y adentro →

(es análogo al campo magnético de un imán, que vamos a ver más adelante)