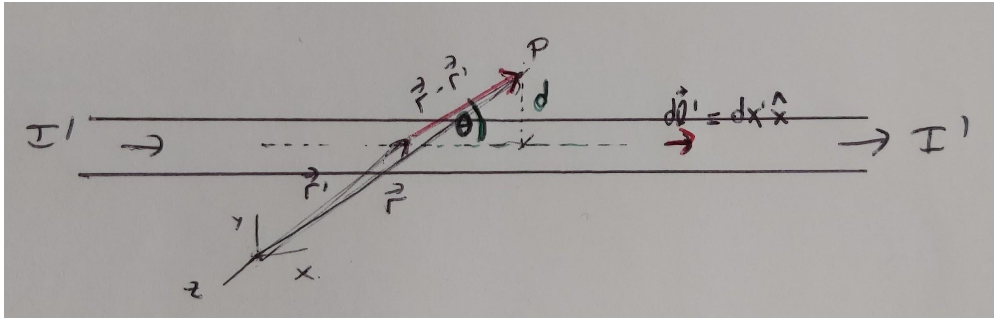
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 15

Campo magnético por integración directa

Supongamos un cable infinito con corriente I' . Calculemos el campo magnético en un punto genérico P a distancia d del cable.

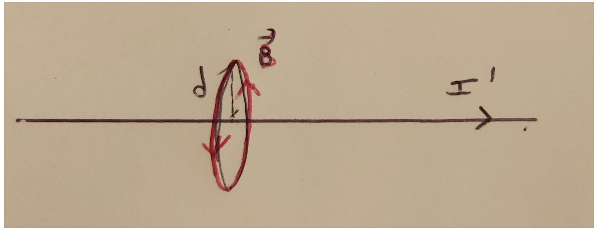


$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{C'} \kappa\, I'\, \overrightarrow{\mathbf{dl'}} \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl' |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'| \sin\theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl'\ d}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(d^2 + l'^2)^{3/2}} dl'\ \hat{\mathbf{z}}$$

$$\xi = l'/d \quad , \quad d\xi = dl'/d$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\kappa I'}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\kappa I'}{d} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I'}{d} \hat{\mathbf{z}}$$

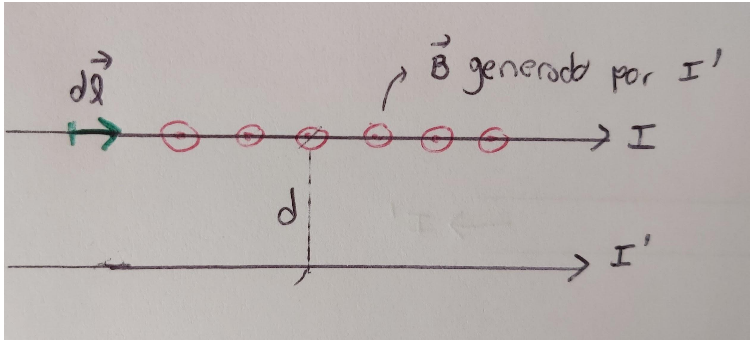
Por simetría vale lo mismo en cualquier punto P a lo largo del eje del cable y también alrededor del cable si estoy a la misma distancia d → queda un campo axial alrededor del cable



$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I'}{d}\hat{\varphi}$$

Notar que el campo decrece con la distancia al cable como 1/d

Supongamos tenemos dos cables paralelos, con corrientes $I\,,I'$



La fuerza que ejerce el campo de I' sobre el cable con I será

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \int_C I\,\overrightarrow{\mathbf{dl}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = -\int_C I\,\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I'}{d}dl\,\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,I'}{d}L\hat{\mathbf{y}}$$

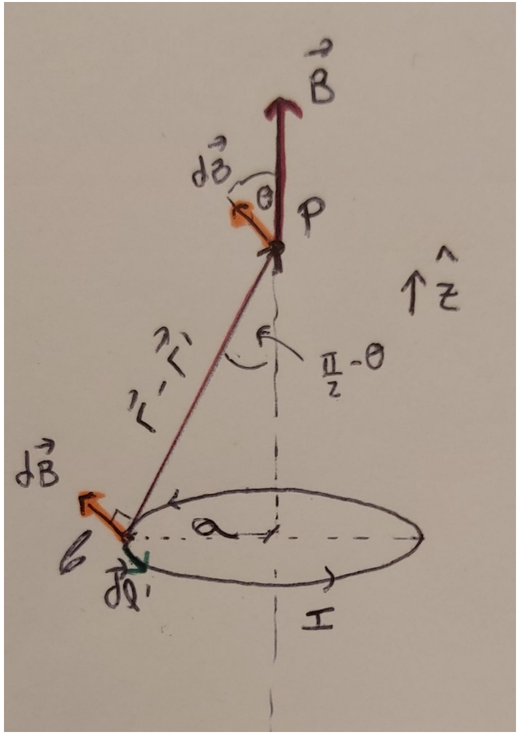
La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{F}}}{L} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,I'}{d}\hat{\mathbf{y}}$$

Esto nos da una fuerza atractiva para corrientes de igual signo y repulsiva para corr. de signo opuesto

Espira: conductor delgado cerrado por el que circula una corriente estacionaria I.

Vamos a calcular el campo magnético de una espira circular, en el eje de la espira.



$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_C \kappa\, I\, \vec{\mathbf{dl'}} \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|^3} = \kappa\, I\, \hat{\mathbf{z}} \int_C \frac{dl' \ \cos\theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2} = \kappa\, I\, \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\, d\varphi$$

aquí usamos que las componentes perpendiculares al eje z se compensan y además que:

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2 = a^2 + z^2 \quad , \quad dl' = a\, d\varphi \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje} = \frac{2\pi\, \kappa\, I\, a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \qquad \vec{\mathbf{B}}_{eje}(z=0) = \vec{\mathbf{B}}_{max} = \frac{2\pi\, \kappa\, I}{a}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje}(z \gg a) = \frac{2\pi\, \kappa\, I\, a^2}{|z|^3}\hat{\mathbf{z}} = \frac{2\, \kappa\, I\, S}{|z|^3}\hat{\mathbf{z}} \quad \text{con} \ \ S = \pi\, a^2$$

Si definimos la superficie (de la espira) orientada $\overrightarrow{\mathbf{S}} = \pi\, a^2\, \hat{\mathbf{z}}$ y llamamos

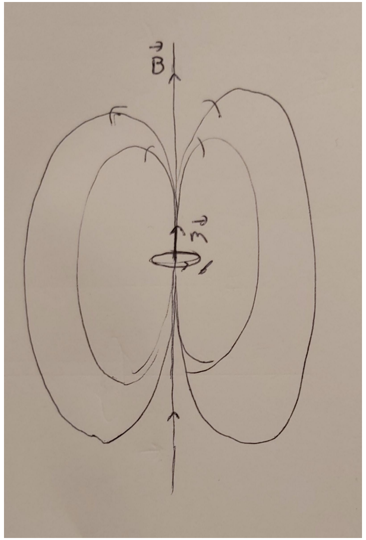
$\overrightarrow{\mathbf{m}} = I\, \overrightarrow{\mathbf{S}}$ al momento magnético de la espira,

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{B}}_{eje}(z \gg a) = \frac{2\,\kappa\, \overrightarrow{\mathbf{m}}}{|z|^3}$$

que es similar al campo de un dipolo eléctrico

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_{eje}(z) = \frac{2\,k\, \overrightarrow{\mathbf{p}}}{|z|^3}$$

si identificamos $k \to \kappa$, $\overrightarrow{\mathbf{p}} \to \overrightarrow{\mathbf{m}}$

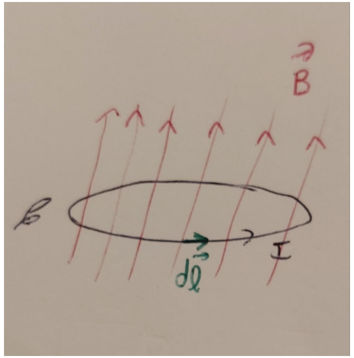


Idem al campo magnético terrestre o el de un imán

Experimento actual: momento magnético (anómalo) del muon:

https://www.investigacionyciencia.es/noticias/se-ha-roto-el-modelo-estandar-19741

Fuerza y torque sobre una espira (en campo magnético uniforme o espira pequeña)



$$d\vec{\mathbf{F}} = I\,\vec{\mathbf{dl}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \oint_{\mathcal{C}} I\,\vec{\mathbf{dl}} \times \vec{\mathbf{B}} = I\Big[\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{dl}}\Big] \times \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{ya que} \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{dl}} = 0$$

$$d\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times (I\vec{\mathbf{dl}} \times \vec{\mathbf{B}}) = I\,[\,\vec{\mathbf{dl}}\,(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{dl}})\,]$$

$$\vec{\tau} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{F}} = I \oint_{\mathcal{C}} [\,\vec{\mathbf{dl}}\,(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{dl}})\,]$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{dl}}\,(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \vec{\mathbf{dS}} \times \vec{\nabla}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \vec{\mathbf{dS}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{B}}\,(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{dl}}) = \vec{\mathbf{B}} \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \vec{\mathbf{B}} \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}} = 0 \quad \text{ya que} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{r}} = 0$$

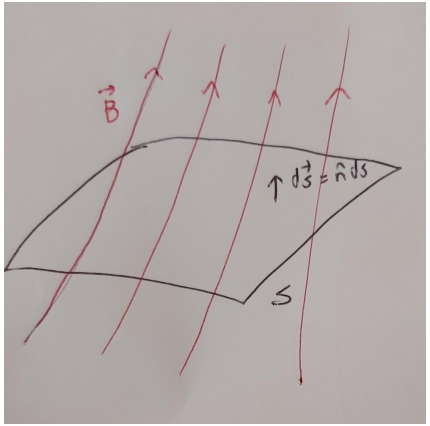
$\mathcal{S}(\mathcal{C})$ es una superficie apoyada en $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \vec{\mathbf{dS}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{m}} = I \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \vec{\mathbf{dS}}$$

El momento magnético de la espira

Propiedades del campo magnético



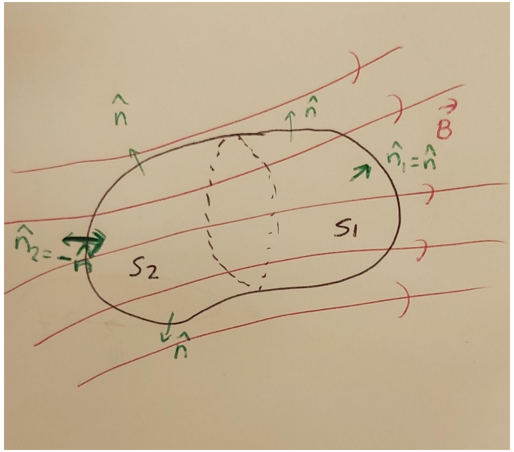
Definimos el flujo magnético a través de una superficie S

$$\Phi_B = \int_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

Propiedad (experimental): si la superficie S es cerrada, entonces el flujo es SIEMPRE cero

$$\Phi_B = \oint_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0$$

El equivalente de la Ley de Gauss para el campo magnético nos dice entonces que la “carga magnética encerrada (por S)” es siempre cero, o sea, NO HAY CARGAS MAGNETICAS AISLADAS $\rightarrow$ experimental

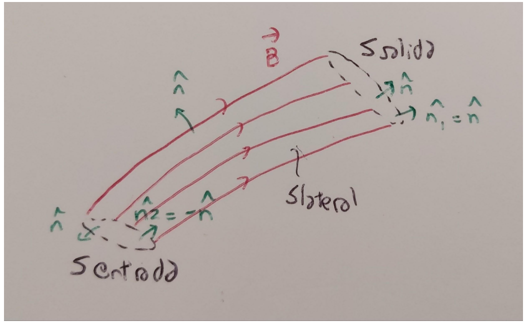


Si a una superficie cerrada S la dividimos en dos partes entonces podemos decir:

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \Phi_{saliente} - \Phi_{entrante}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{saliente} = \Phi_{entrante}$$

y se conserva el flujo magnético.



Dado un conjunto de líneas magnéticas podemos construir un tubo de flujo que conserva el flujo (saliente = entrante)

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{S_{sal}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{entr}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{lat}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_{sal}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \int_{S_{entr}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \Phi_{sal} - \Phi_{entr}$$

Por el teorema de la divergencia resulta:

$$0 = \oint_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}\, d\mathcal{V} \quad , \forall \mathcal{V}(\mathcal{S}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0}$$

esto nos dice también que las líneas del campo magnético no salen ni confluyen a ningún punto (como sí ocurre con las líneas de campo eléctrico que salen o confluyen a las cargas, según su signo) → las líneas de campo magnético siempre son cerradas (o siguen indefinidamente).

Propiedad matemática: si un campo tiene divergencia cero entonces se puede obtener como el rotor de otro campo → es el caso del campo magnético:

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{A}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{A}}$ se llama potencial vector y está definido a menos de un gradiente ya que si

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}' = \overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{A}}' = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{A}}$$

(se llama *libertad de gauge*)

Para el caso magnetostático podemos obtener (por Biot-Savart) el potencial vector, que para una corriente estacionaria en un cable (espira) es:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\kappa\, I'\, \overrightarrow{\mathbf{dl}}'}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|}$$

ya que:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I'\, \overrightarrow{\nabla} \times \Big[\frac{\overrightarrow{\mathbf{dl}}'}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|}\Big] = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I' \Big[\overrightarrow{\nabla}\Big(\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|}\Big)\Big] \times \overrightarrow{\mathbf{dl}}' = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I'\, \overrightarrow{\mathbf{dl}}' \times \frac{(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}')}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|^3} = \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$$

y con esto queda <u>demostrado</u> (para este caso) que $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$

Si las corrientes están distribuidas en volumen, entonces vale:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\kappa\, \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}')\, d\mathcal{V}'}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|} \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}} \kappa\, \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}')\, d\mathcal{V}' \times \frac{(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}')}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}'|^3}$$