

Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 16

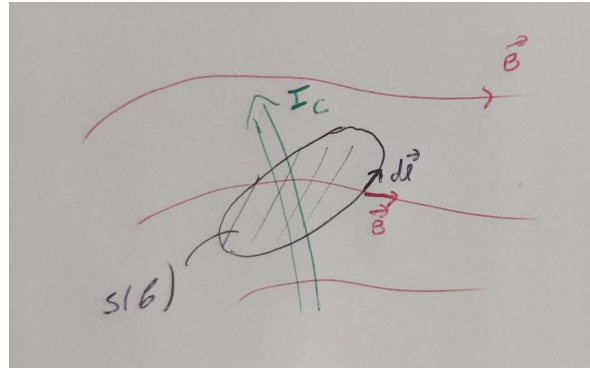
Teorema circuital de Ampere

Supongamos una región del espacio con campo magnético \vec{B} y consideremos una curva cerrada C

Entonces,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$$

donde I_c es la corriente concatenada neta que atraviesa una superficie $S(C)$ apoyada en C



Este teorema es válido solamente para corrientes estacionarias y se puede demostrar a partir de la ley de Biot-Savart para el campo magnético (usando geometría) .

Veamos su forma local o diferencial:

por el teorema de Stokes,
$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

por otro lado, $I_c = \int_{S(C)} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ entonces de Ampere,
$$\int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad \forall S(C)$$

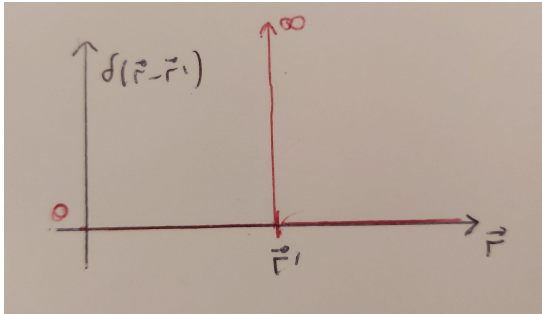
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

Esto se puede obtener usando el potencial vector,

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V \frac{\kappa \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') dV'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \quad \text{y la expresión} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\int_{\mathcal{V}} \kappa \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}' = \kappa 4\pi \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}) = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

donde hicimos uso de la propiedad $\int_{\mathcal{V}} f(\vec{\mathbf{r}}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}' = -\int_{\mathcal{V}} f(\vec{\mathbf{r}}') 4\pi \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}') d\mathcal{V}' = -4\pi f(\vec{\mathbf{r}})$



con $\delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')$ la función (densidad) [delta de Dirac](#)

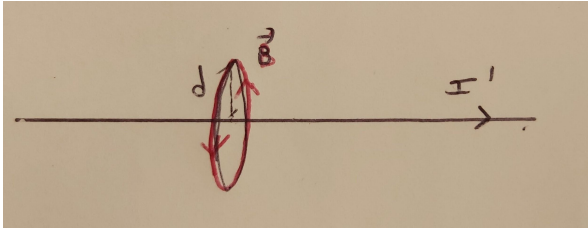
se puede ver recordando que el potencial de una carga puntual es: $V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{kq}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$

y la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \left(\frac{kq}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')$$

Ejemplo: cable infinito con corriente I'

Por simetría + Biot-Savart podemos anticipar que $\vec{\mathbf{B}}$ es axial, $\vec{\mathbf{B}} = B(d)\hat{\varphi}$



Tomemos una curva C que sea una circunferencia alrededor del cable, de radio d .

Aplicando Ampere,

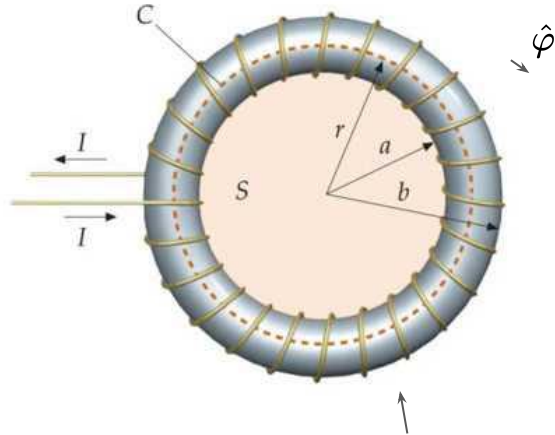
$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \mu_0 I_c \Rightarrow \int_0^{2\pi} B(d)\hat{\varphi} \cdot d \hat{\varphi} d\varphi = \mu_0 I_c \Rightarrow 2\pi d B(d) = \mu_0 I' \Rightarrow B(d) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi d}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi d} \hat{\varphi}$$

Ejemplo: toroide (bobina toroidal)



B en el interior y exterior de un toroide



N vueltas de cable

Por simetría + Biot-Savart + campo espira,

$$\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$$

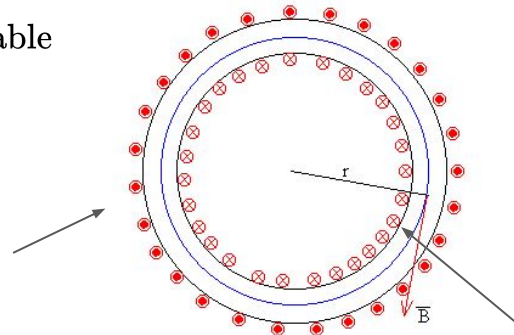
Tomemos una curva C como la punteada en la figura, recorriendo el toroide por dentro, de radio r

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi} \cdot r\hat{\phi} d\phi = 2\pi r B(r)$$

$$\mu_0 I_c = \mu_0 NI$$

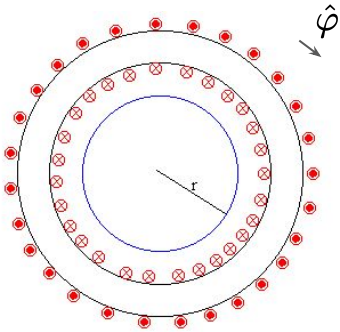
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} \quad \text{para } a < r < b$$

corriente saliente



corriente entrante

Si tomamos una circunferencia C de radio $r < a$



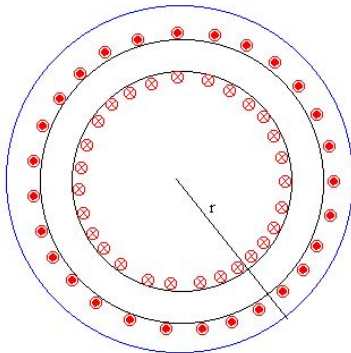
La parte de la integral queda igual

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_0^{2\pi} B(r) \hat{\varphi} \cdot r \hat{\varphi} d\varphi = 2\pi r B(r)$$

lo que cambia es la corriente concatenada, que en una superficie apoyada en C es nula $\rightarrow I_c = 0$

$$\Rightarrow B(r) = 0 \quad \text{para } r < a$$

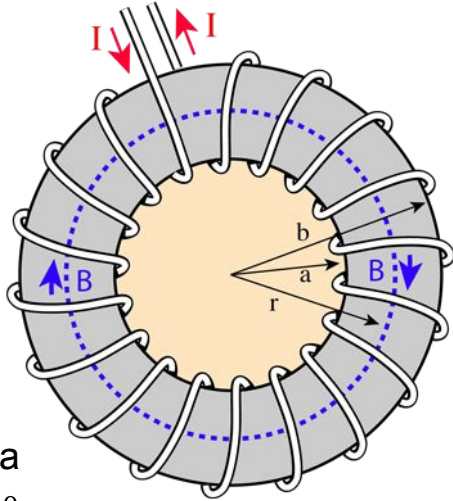
Si tomamos una circunferencia C de radio $r > b$



La integral queda igual y la corriente concatenada neta es cero !
(corrientes salientes = corrientes entrantes)

$$\Rightarrow B(r) = 0 \quad \text{para } r > b$$

Podemos resumir (y aproximar) que el campo magnético de un toroide es solamente distinto de 0 en el interior del toroide ($a < r < b$) y, si R = radio medio del toroide, entonces



afuera
 $B = 0$

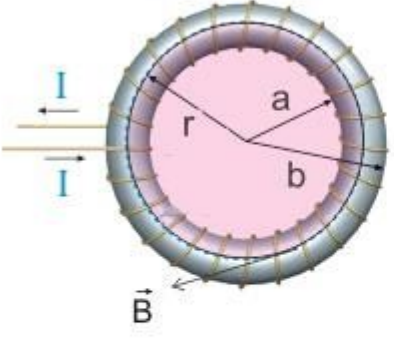
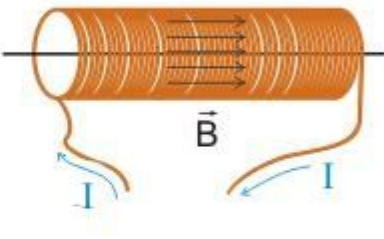
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{R} \hat{\phi}$$

Si $L = 2\pi R$ es el perímetro del toroide

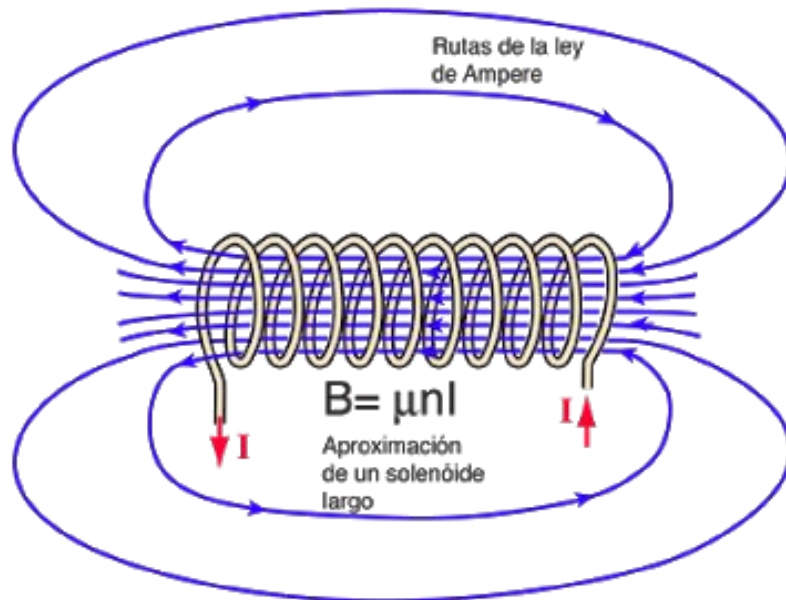
y $n = N/L$ la densidad de vueltas del cable

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I$$

Si *enderezamos* el toroide (o hacemos $R \rightarrow$ infinito), nos queda un **solenoides (bobina)**:

Toroide circular	Solenoides ideal*
	
$r < a \text{ y } r > b \Rightarrow B = 0$ $a < r < b \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$	$B = \mu_0 n I$

El campo que vimos es una buena aproximación para un solenoide largo,



El campo magnético está concentrado en casi un campo uniforme en el centro de un solenoide largo. El campo afuera es más débil y las líneas que representan el campo magnético están más separadas

Hasta aquí (electrostática y magnetostática):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

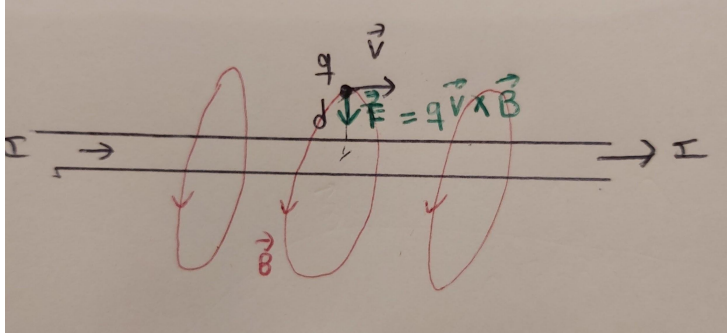
y los fenómenos eléctricos y magnéticos están desacoplados (si bien vimos que las corrientes eléctricas dan campo magnético → exp de Oersted).

Vamos a ver después que cuando permitamos variación temporal los campos magnéticos y eléctrico se vinculan directamente.

pero también existe una vinculación cuando miramos las cosas desde distintos sistemas de referencia → **relatividad** !

Una paradoja (no relativista)...

supongamos una carga q moviéndose con velocidad \vec{v} paralela a un cable a una distancia d , por el que circula una corriente I .



Como la corriente en el cable genera un campo magnético, sobre la carga en movimiento actúa la fuerza magnética de Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, que hace que la carga se desvíe y se acerque al cable.

Ahora, qué pasa si nos paramos en un sistema de referencia que se traslade con velocidad \vec{v} ?

Allí la carga está quieta, entonces, la fuerza magnética sería 0, y la carga no se desviaría !

(recordemos que la corriente I no implica carga neta en el cable, por lo tanto, eso no produciría campo \vec{E})

O sea que la acción que ejerce el campo magnético, depende del sistema de referencia ?

La resolución de esta *paradoja del cable* requiere introducir *relatividad especial* : esta y otras inconsistencias fueron las que condujeron a **Einstein** a reformular las leyes de transformación entre sistemas de referencia inerciales y a formular la Teoría de la Relatividad Especial, bajo la firme convicción de que las leyes del electromagnetismo (Maxwell) eran válidas.

De hecho, el trabajo célebre de Einstein de 1905 donde formula su teoría se llamó “*Acerca de la electrodinámica de los cuerpos móviles*”.

Para la resolución de la paradoja del cable con relatividad especial consultar el [Feynmann, Vol. II, Cap. 13](#)