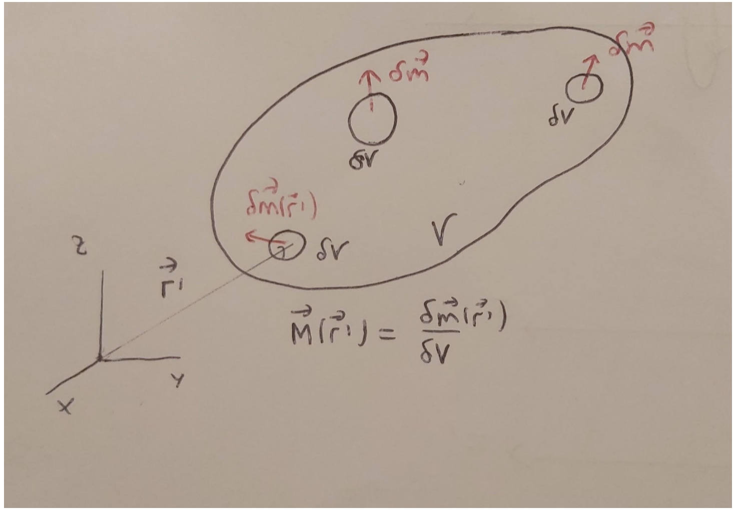
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 18

Campo magnético en medios materiales

Suponemos que a un volumen de material, lo dividimos en pequeños volúmenes $\delta\mathcal{V}$, y en cada uno de ellos hay un momento magnético dipolar $\delta\overrightarrow{\mathbf{m}}$ $\rightarrow$ el origen de este momento magnético lo podemos atribuir a los momentos magnéticos en los átomos producto del movimiento de los electrones que actúan como pequeñas espiras con corriente



Definimos la magnetización como el momento magnético por unidad de volumen:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}') = \frac{\delta\overrightarrow{\mathbf{m}}}{\delta\mathcal{V}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}')$$

Vimos que el potencial vector asociado a un momento magnético $\vec{\mathbf{m}}$ es $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$

y si el dipolo magnético está ubicado en una posición $\vec{\mathbf{r}}'$ entonces $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{m}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$

Si aplicamos esto a un volumen material, $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa \int_{\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{\delta \mathbf{m}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \kappa \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} d\mathcal{V}'$

Usamos $\frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right)$ y la identidad $\vec{\nabla} \times (f\, \vec{\mathbf{M}}) = f\, \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} - \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\nabla} f$

$$\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} - \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right)$$

$$f = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} \kappa \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}'$$

La segunda integral la convertimos a integral de superficie,

$$-\int_{\mathcal{V}} \kappa \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\right) d\mathcal{V}' = -\oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa\, \vec{\mathbf{dS}}' \times \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \vec{\mathbf{dS}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{S}'$$

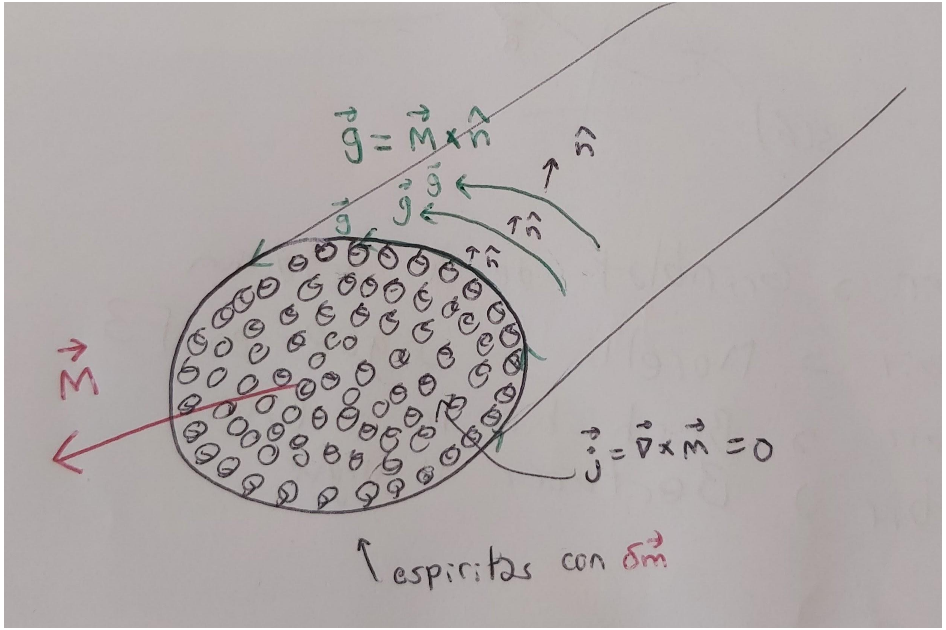
$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{V}' + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{S}'$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{V}' + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{S}'$$

con $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') = \vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')$ la densidad de corriente de magnetización (en volumen)

y $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}') = \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}$ la densidad de corriente de magnetización (en superficie)

Interpretación de las corrientes de magnetización



Un cilindro con magnetización **M** uniforme en la dirección de su eje tiene una corriente de magnetización **g** en su cara lateral en la dirección azimutal, que podemos interpretar como la superposición de las corrientes de muchas espiritas con momento magnético en la dirección del eje del cilindro.

Supongamos ahora tenemos corrientes “libres” y corrientes “de magnetización”

$$\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{j}}_M$$

Usamos Ampere, $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} = \mu_0 \left(\vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{j}}_M \right)$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{j}}_M = \vec{\mathbf{j}}_L \;, \quad \vec{\mathbf{j}}_M = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} \;\; \longrightarrow \;\; \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{M}} \right) = \vec{\mathbf{j}}_L$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L \quad \text{con} \quad \vec{\mathbf{H}} = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{M}}$$

un campo vectorial auxiliar que se conoce como “intensidad” o “excitación magnética”

La ecuación $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L \quad \rightarrow \quad \oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = I_L$

expresa la ley de Ampere en medios materiales y nos indica que <u>*las fuentes del campo H son las corrientes libres.*</u>

Medios lineales, isótropos y homogéneos (LIH): $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \chi_m \overrightarrow{\mathbf{H}}$

con χ_m la susceptibilidad magnética

$$\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\mathbf{M}} \quad , \quad \overrightarrow{\mathbf{M}} = \chi_m \overrightarrow{\mathbf{H}} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \chi_m \overrightarrow{\mathbf{H}} \quad \rightarrow \quad (1+\chi_m)\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0}$$

$$\rightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0(1+\chi_m)\overrightarrow{\mathbf{H}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{H}} \quad \text{con} \quad \mu = \mu_0(1+\chi_m)$$

la permeabilidad magnética

(en vacío $\chi_m = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \mu_0$)

Podemos hacer la identificación

$$\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}_{vacio}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{M}} = \frac{\chi_m}{\mu_0}\overrightarrow{\mathbf{B}}_{vacio} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\mathbf{B}}_{material} = \frac{\mu}{\mu_0}\overrightarrow{\mathbf{B}}_{vacio} = (1+\chi_m)\,\overrightarrow{\mathbf{B}}_{vacio}$$

En general χ_m es pequeña y *los campos en los materiales difieren muy poco de los campos en vacío*.

Tabla de susceptibilidades magnéticas χ_m a T ambiente y a una presión de 1 atmósfera			
Paramagnéticos (+)		**Diamagnéticos (-)**	
Oxígeno	1.9×10 -6	Hidrógeno	-2.08×10^{-9}
Sodio	8.4×10 -6	Nitrógeno	-6.7×10^{-9}
Magnesio	1.2×10^{-5}	CO2	-1.19×10^{-8}
Aluminio	2.1×10^{-5}	Alcohol	-0.75×10^{-5}
Tungsteno	7.6×10^{-5}	Agua	-0.91×10^{-5}
Titanio	1.8×10^{-4}	Cobre	-0.98×10^{-5}
Platino	2.9×10^{-4}	Plata	-2.64×10^{-5}
Uranio	4.0×10^{-4}	Oro	-3.5×10^{-5}

$\chi_m > 0$ → material paramagnético

$\chi_m < 0$ → material diamagnético

→ difieren en que M sea paralelo o anti-paralelo al campo

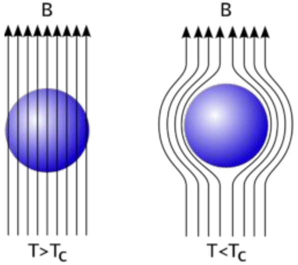
$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{\chi_M}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}}_{vacio}$$

Según sea paramagnético o diamagnético el campo en el material será leventemente superior o levemente inferior al campo en vacío

$$\vec{\mathbf{B}}_{material} = (1+\chi_m)\,\vec{\mathbf{B}}_{vacio}$$

La explicación última de por qué los medios materiales se comportan como paramagnéticos o diamagnéticos requiere física cuántica y aquí lo vamos a tomar como un hecho empírico.

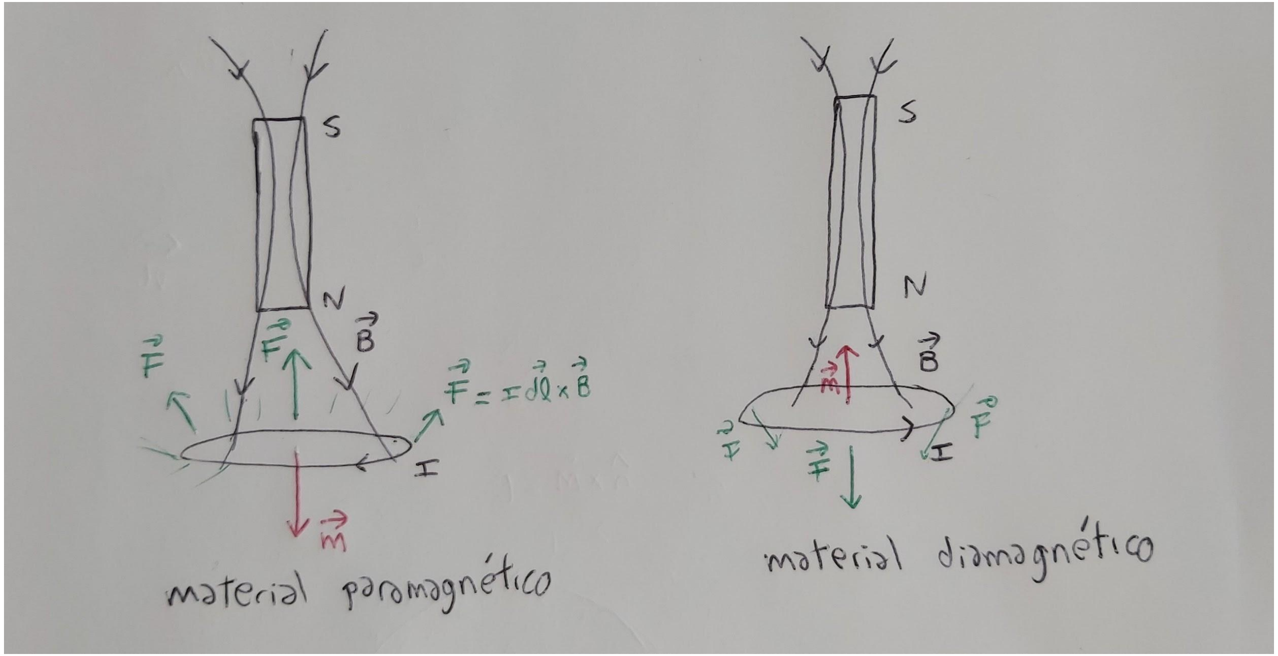
Superconductividad → diamagnetismo perfecto → $\chi_m \approx -1$ → efecto Meissner (B=0)



Las partículas elementales cargadas tienen momento magnético asociado

→ experimento momento magnético muón

El signo de la susceptibilidad magnética de un material influye también en cómo se comporta ante un campo magnético no-uniforme $\rightarrow$ *los materiales paramagnéticos son atraídos hacia las regiones de campo magnético más intenso, mientras que los materiales diamagnéticos son repelidos de las regiones de campo más intenso*.



$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (\overrightarrow{\mathbf{m}} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\mathbf{B}}$ es clave que el campo sea no-uniforme, si no la fuerza sería nula

Fuerza de levitación magnética

$$\vec{\mathbf{F}}_m = (\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{\mathbf{B}} \quad \text{vs} \quad \vec{\mathbf{F}}_g = m_\rho\, g$$

$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{M}}\, \mathcal{V} = \chi_m \vec{\mathbf{H}}\, \mathcal{V} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}}\, \mathcal{V} \quad , \quad m_\rho = \rho \mathcal{V}$$

$$\Rightarrow \quad F_m = \frac{\chi_m}{\mu_0} B\, \mathcal{V}\, \nabla B = \frac{\chi_m}{2\mu_0}\, \mathcal{V}\, \nabla B^2$$

$$\Rightarrow \quad F_m > F_g \text{ si } \frac{\chi_m}{2\mu_0}\, \nabla B^2 > \rho\, g \quad \Rightarrow \quad \nabla B^2 > \frac{2\mu_0\, \rho\, g}{\chi_m}$$

$$\text{si } \chi_m \sim 10^{-5} \quad , \rho \sim 1\, g/cm^3 \quad \Rightarrow \quad \nabla B^2 \sim 1000 \;\; T^2/m \quad \Rightarrow \quad \text{si } \; L \sim 10\; cm \quad \Rightarrow \quad B \sim 10\, T$$

$$\nabla B^2 \sim B^2/L$$

→ la rana levitadora otra vez !

Charla divertida del investigador Germán Dima del DF sobre levitación en medios diamagnéticos→ El poder de Magneto

Medios ferromagnéticos : tienen susceptibilidad magnética $\chi_m \gg 1$ $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$

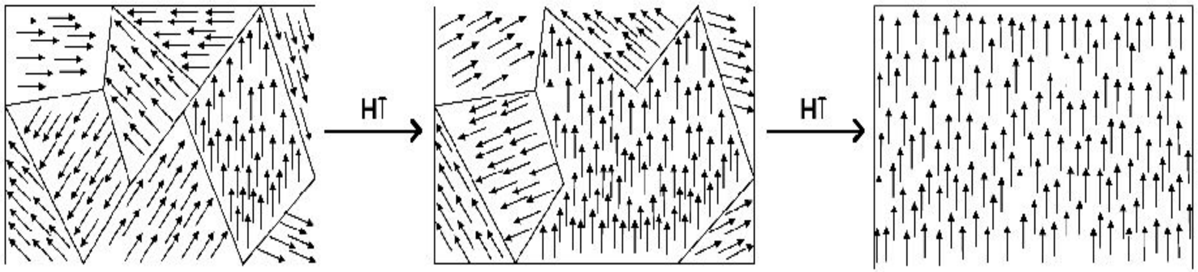
Ferromagnéticas	Permeabilidad relativa (μ_r)
Polvo de Permalloy (2-81), 2 Mo-8l Ni de composición porcentual y el resto Fe e impurezas	130
Cobalto	250
Níquel	600
Ferroxcube 3 (.Perrito Mn-Zn)	1.500
Acero dulce (0,2 C)	2.000
Hierro con Impurezas (O,2 C)	5000
Hierro silicio utilizados e n transformadores (4 Si)	7.000 o menor
Permalloy 78 (78,5 Ni)	100.000
Hierro purificado	200.000
Superpermalloy (5 Mo-79 Ni)	1.000.000

Esto hace que el campo magnético en el material sea mucho más intenso que el campo en vacío.

$$\vec{\mathbf{B}}_{material} = (1 + \chi_m)\,\vec{\mathbf{B}}_{vacio}$$

Y también que el momento magnético que adquieren sea grande $\vec{\mathbf{M}} = \dfrac{\chi_m}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}}_{vacio}$

y se vean mucho más atraídos hacia las regiones de campo magnético (no-uniforme) más intensas $\vec{\mathbf{F}} = (\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{B}}$



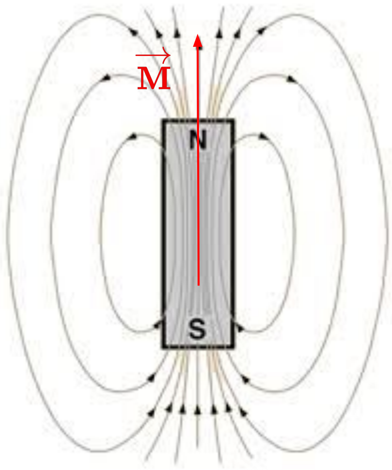
El fenómeno del ferromagnetismo se origina en la formación de ***dominios magnéticos***

Los materiales ferromagnéticos se usan para incrementar el campo magnético en un solenoide:

→ *solenoide con núcleo de hierro*

y sometidos a cambios en su temperatura y corriente pueden alcanzar una saturación de su magnetización → se crea un material con <u>magnetización permanente</u>

→ IMAN



En un imán nos dan la magnetización como dato y podemos calcular el campo magnético usando las corrientes de magnetización