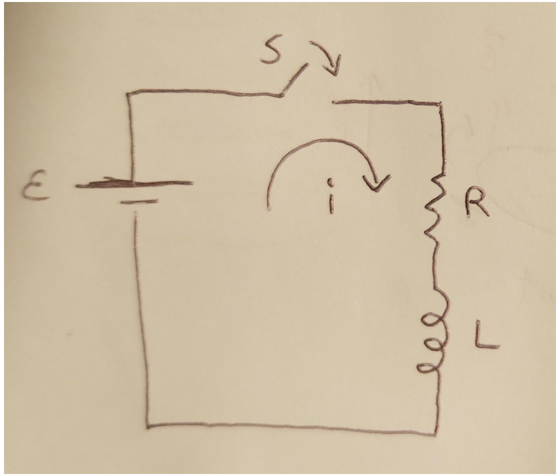
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 20

Vamos a ver ahora *circuitos* en su etapa *transitoria*, es decir, desde el instante en que cerramos alguna llave que activa el circuito, hasta que llegue (o no…) al estacionario.

Circuito RL serie:



Tenemos,

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind} = i\,R \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon - L\frac{di}{dt} = i\,R$$

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + R\,i$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria que debemos resolver para obtener $i = i(t)$ con la

condición inicial $i(t=0) = 0$ donde suponemos que en t=0 se cierra la llave S.

La resolvemos con la técnica de separar la solución general en una *solución del problema homogéneo* y una *solución particular*:

$$i = i_h + i_p$$

donde $0 = L\dfrac{di_h}{dt} + R\, i_h$ y $\varepsilon = L\dfrac{di_p}{dt} + R\, i_p$

normalmente podemos buscar la solución particular *constante* entonces $\dfrac{di_p}{dt} = 0$ y $\varepsilon = R\, i_p$

$$\Rightarrow \quad i_p = \varepsilon / R$$

que sería la solución si no hubiera inductancia

Para la solución del homogéneo proponemos una exponencial en el tiempo, $i_h(t) = A\, e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{di_h}{dt} = \lambda\, A\, e^{\lambda t}$$

polinomio característico

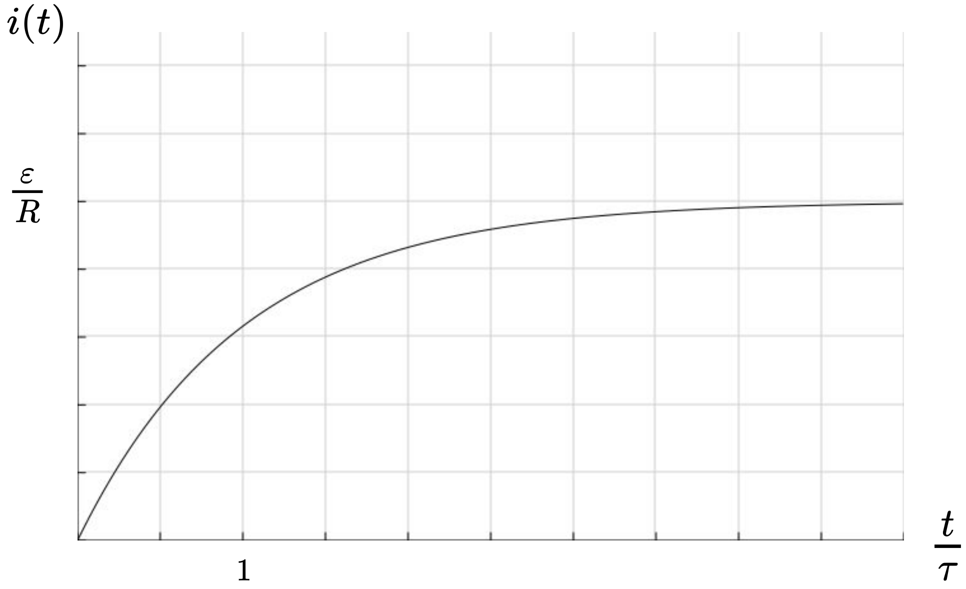
y reemplazando en la ecuación dif. homogénea,

$$0 = L\,\lambda\, A\, e^{\lambda t} + R\, A\, e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad 0 = L\,\lambda + R \quad \Rightarrow \quad \lambda = -R/L$$

Reemplazando, $i_h(t) = A\, e^{-R\,t/L}$ y $i(t) = A\, e^{-R\,t/L} + \varepsilon/R$

La constante A la determinamos mediante la condición inicial,

$$i(t=0) = 0 = A + \varepsilon/R \quad \Rightarrow \quad A = -\varepsilon/R \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$



Llamamos $\tau = L/R$ *tiempo característico*

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

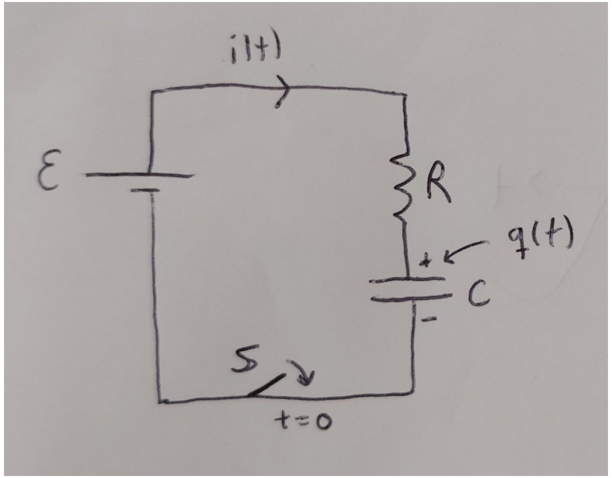
unidades $[\tau] = [L]/[R] \quad \rightarrow \quad s = Hy/\Omega$

$$[L][I]/[t] = [V] \quad , \quad [I][R] = [V]$$

$$[L][I]/[t] = [I][R] \quad \rightarrow \quad [L]/[R] = [t]$$

La corriente satura al valor estacionario ε/R y allí $di/dt = 0$ y la f.e.m. inducida tiende a 0

Circuito RC serie:



Recorriendo el circuito,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon = V_R + V_C = R\,i + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

queda una ecuación diferencial ordinaria para $q = q(t)$

$$\varepsilon = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

con condición inicial $q(t=0) = q_0$ la carga inicial en el capacitor

Resolvemos buscando la solución del homogéneo y una solución particular constante, $q = q_h + q_p$

$$\frac{dq_p}{dt} = 0 \quad , \quad \varepsilon = \frac{1}{C}q_p \quad \rightarrow \quad q_p = \varepsilon\, C$$

$$0 = R\frac{dq_h}{dt} + \frac{1}{C}q_h \quad \rightarrow \quad q_h(t) = A\,e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad R\lambda\, A\,e^{\lambda t} + \frac{1}{C}\,A\,e^{\lambda t} = 0 \quad \rightarrow \quad R\,\lambda + \frac{1}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$$

polinomio característico

$$q(t) = A\, e^{-t/(RC)} + \varepsilon C \qquad q(t=0) = q_0 \;\rightarrow\; q_0 = A + \varepsilon C \;\rightarrow\; A = q_0 - \varepsilon C$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = (q_0 - \varepsilon C)\, e^{-t/(RC)} + \varepsilon C$$

$\tau = RC$ tiempo característico $\rightarrow$ unidades: $[\tau] = [R][C] \;\rightarrow\; s = \Omega\, F$

$[V] = [I][R] \;,\; [V] = [Q]/[C]$

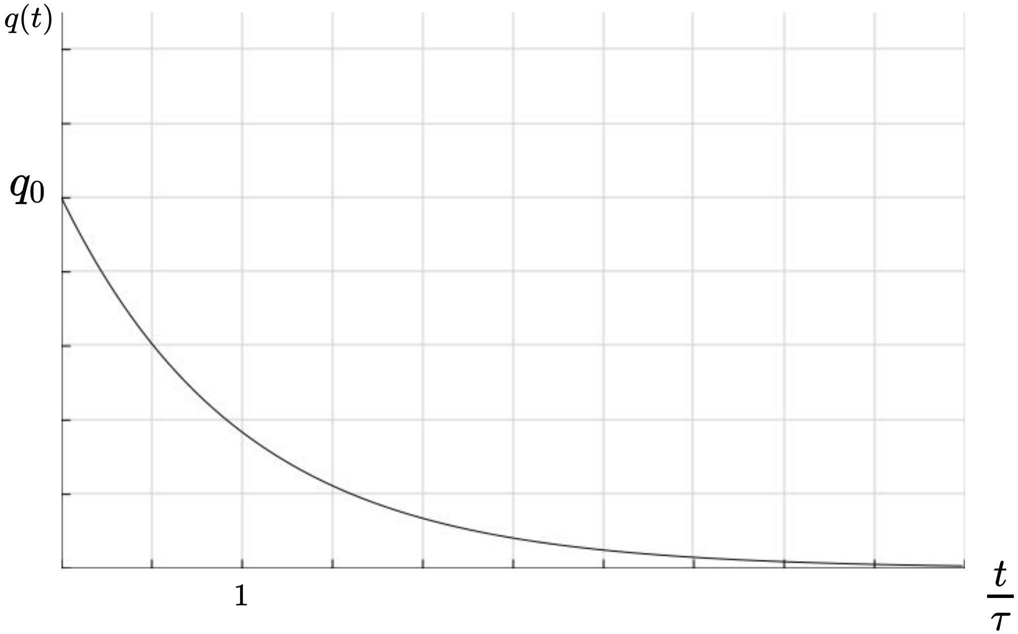
$[I][R] = [Q]/[C] \;\rightarrow\; [R][C] = [Q]/[I] = C/A = s$

Consideramos dos casos típicos:

a) Descarga del capacitor

$$\varepsilon = 0 \;,\; q_0 \neq 0$$

$$q(t) = q_0\, e^{-t/\tau}$$



La corriente es (derivando)

$$i(t) = -\frac{q_0}{\tau}\, e^{-t/\tau}$$

corriente de descarga

Podemos analizar el balance de energía.

$$\text{A} \quad t = 0 \ , \ U_C = \frac{C\,V_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}$$

es la energía almacenada en el capacitor

al establecerse la corriente de descarga se disipa energía en R con potencia $P_R = R\,i^2(t)$

la energía total disipada en la descarga es entonces

$$\tau = R\,C$$

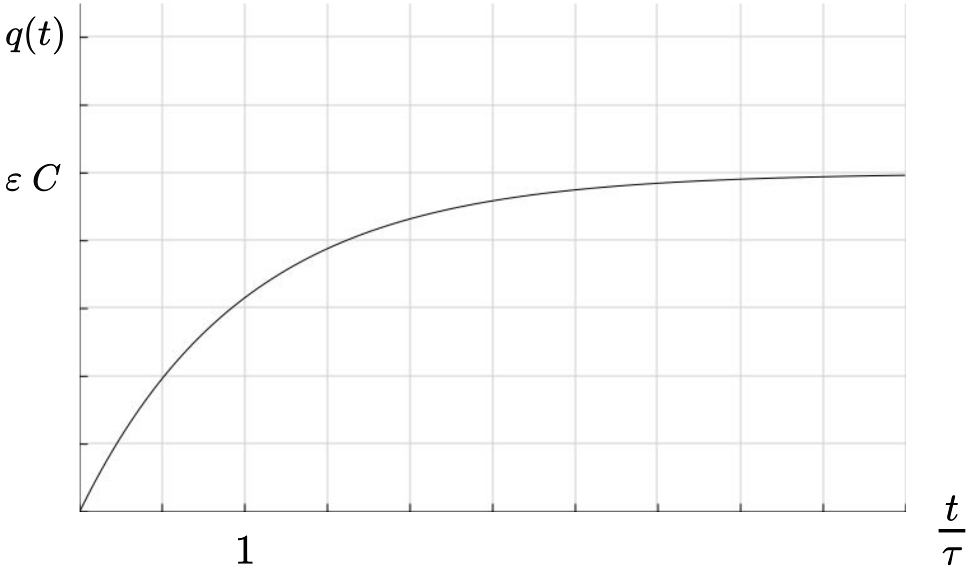
$$\int_0^\infty R\,i^2(t)\,dt = \int_0^\infty R\,\frac{q_0^2}{\tau^2}\,e^{-2t/\tau}\,dt = R\,\frac{q_0^2}{\tau^2}\,\frac{\tau}{2} = R\,\frac{q_0^2}{2\tau} = \frac{q_0^2}{2C}$$

$$i(t) = -\frac{q_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

que coincide con la energía almacenada inicialmente en C

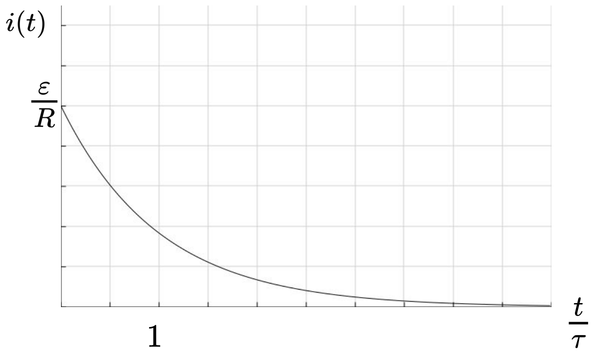
b) Carga del capacitor

$$q_0 = 0 \quad , \quad \varepsilon \neq 0 \qquad q(t) = \varepsilon\, C\,(1 - e^{-t/\tau})$$



La corriente es

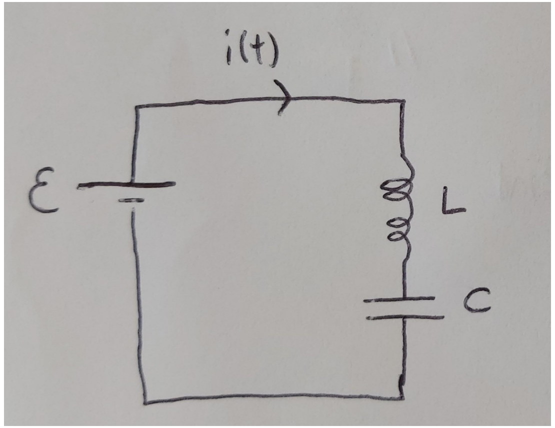
$$i(t) = \frac{\varepsilon\, C}{\tau}\; e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R}\; e^{-t/\tau}$$



Se puede ver que la energía entregada por la fuente se disipa parte en R y parte se almacena en C,

$$U = \int_0^\infty \varepsilon\, i(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}\, e^{-t/\tau}\, dt = \varepsilon^2 C = U_C + \int_0^\infty R\, i^2(t)\, dt = \frac{q_\infty^2}{2C} + \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}\, e^{-2t/\tau}\, dt = \frac{\varepsilon^2 C}{2} + \frac{\varepsilon^2 C}{2}$$

Circuito LC serie:



Recorriendo el circuito,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad , \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q = L\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C}q$$

queda una ecuación diferencial ordinaria (de 2do orden) para $q = q(t)$

Necesitamos dos cond. iniciales,

$$q(t=0) = q_0 \quad , \frac{dq}{dt}(t=0) = i(t=0) = i_0$$

Buscamos $\quad q = q_h + q_p \quad , \quad q_p = cte \quad \rightarrow \quad q_p = \varepsilon\, C$

$$0 = L\frac{d^2 q_h}{dt^2} + \frac{1}{C}q_h \quad \rightarrow \quad q_h(t) = A\, e^{\lambda t}$$

número complejo j

$$0 = L\,\lambda^2 + \frac{1}{C} \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{j}{\sqrt{LC}} \quad \text{con} \quad j^2 = -1$$

exponencial compleja

Llamamos $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$q(t) = \varepsilon C + A_1\, e^{j\, w_c t} + A_2\, e^{-j\, w_c t}$$

$$e^{j\, w_c t} = \cos(w_c t) + j\, \sin(w_c t)$$

Utilizamos las condiciones iniciales para obtener las constantes de integración,

$$q(t) = \varepsilon C + (q_0 - \varepsilon C)\cos(\omega_c t) + \frac{i_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

→ solución oscilatoria (en torno al valor εC) con frecuencia ω_c

$$i(t) = -\omega_c(q_0 - \varepsilon C)\sin(\omega_c t) + i_0\cos(\omega_c t)$$

→ solución oscilatoria en torno a 0

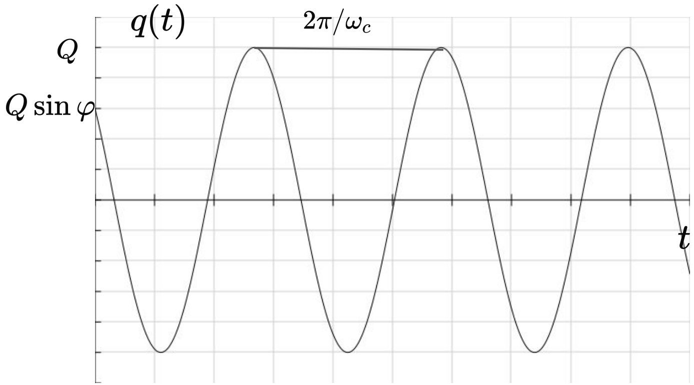
En general si

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = F\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con } F = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ y } \varphi = arctan(B/A)$$

En este caso entonces, $q(t) = \varepsilon C + Q\ \sin(\omega_c t + \varphi)$ $\quad i(t) = \omega_c Q\cos(\omega_c t + \varphi)$

$$Q = \sqrt{(q_0 - \varepsilon C)^2 + i_0^2/\omega_c^2}$$



si $\varepsilon = 0$, $q(t) = Q\sin(\omega_c t + \varphi)$, $i(t) = \omega_c Q\cos(\omega_c t + \varphi)$

$$Q = \sqrt{q_0^2 + i_0^2/\omega_c^2}$$

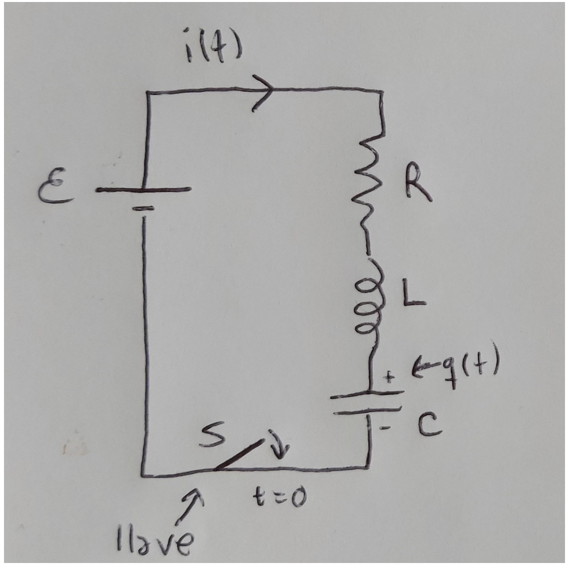
Para el caso sin batería si calculamos la energía almacenada en la inductancia y en el capacitor a cada instante obtenemos:

reemplazamos con las soluciones obtenidas

$$U_L + U_C = L\frac{i^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C} = L\frac{i_0^2}{2} + \frac{q_0^2}{2C} = cte$$

es decir la energía total es constante, la inductancia y el capacitor se reparten la energía que va oscilando de una al otro

Circuito RLC serie:



Tenemos,

$$\varepsilon = R\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon = R\,\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q \quad \rightarrow \text{ ec. dif. 2do orden}$$

Es análoga a la ecuación de movimiento de una masa en un resorte con amortiguamiento proporcional a la velocidad

$$q(t=0) = q_0 \quad , \quad i(t=0) = \frac{dq}{dt}(t=0) = 0$$

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - \mu\,\dot{x} \quad \rightarrow \quad 0 = \mu\,\dot{x} + m\,\ddot{x} + k\,x$$

$$\mu \rightarrow R \;,\; m \rightarrow L \;,\; k \rightarrow 1/C$$

$$q = q_h + q_p$$

$$q_p = \varepsilon\,C$$

$$q_h = A\,e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad 0 = R\,\lambda + L\,\lambda^2 + \frac{1}{C} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Llamamos $\quad \alpha = \dfrac{R}{2L} \;,\; \omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \;,\; \beta^2 = \alpha^2 - \omega_c^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

Según sea $\alpha > \omega_c$ o $\alpha = \omega_c$ o $\alpha < \omega_c$ va a haber 3 soluciones posibles

a) Caso sobreamortiguado:

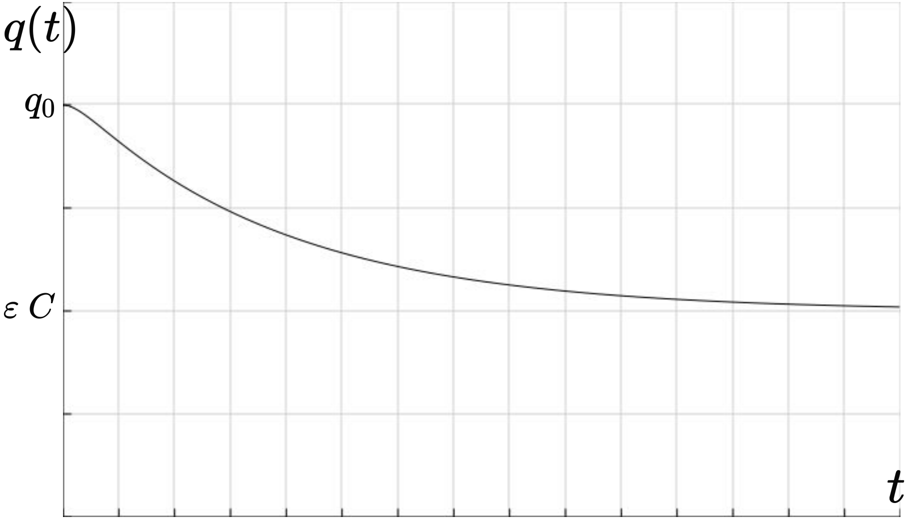
$$\alpha > \omega_c \quad \to \quad R > 2\sqrt{L/C}$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta \quad , \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_c^2} \in \mathbb{R}$$

$$q_h = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

$$q(t) = \varepsilon\, C + e^{-\alpha t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

$$i(t) = e^{-\alpha t}\Big[(\beta - \alpha) A_1 e^{\beta t} - (\beta + \alpha) A_2 e^{-\beta t})\Big]$$

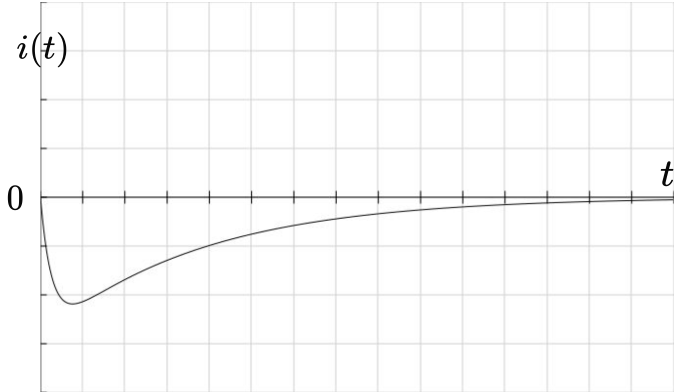


$$q(t = 0) = q_0 \quad , \quad i(t = 0) = \frac{dq}{dt}(t = 0) = 0$$

De las cond. iniciales obtenemos las constantes que nos faltan y resulta:

$$q(t) = Q\, e^{-\alpha t}\left[\cosh(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sinh(\beta t)\right] + \varepsilon\, C$$

$$i(t) = -\frac{\omega_c^2}{\beta}\, Q\, e^{-\alpha t}\ \sinh(\beta t) \qquad Q = q_0 - \varepsilon\, C$$



b) caso crítico $\alpha = \omega_c \quad \rightarrow \quad R = 2\sqrt{L/C}$

$$\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \ \rightarrow \text{raíz doble}$$

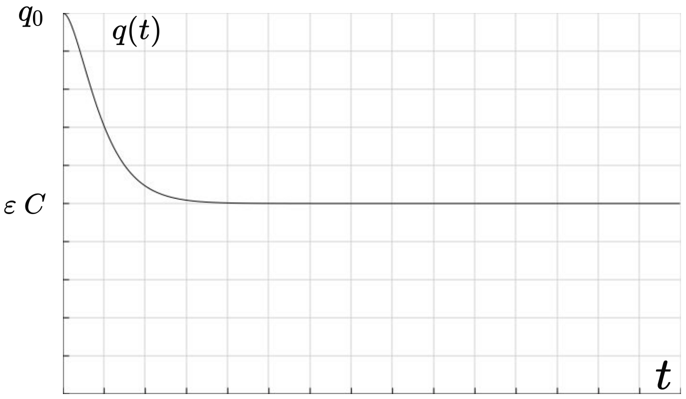
$e^{\lambda t} = e^{-\alpha t}$ y $t\, e^{\lambda t} = t\, e^{-\alpha t}$ son las soluciones fundamentales

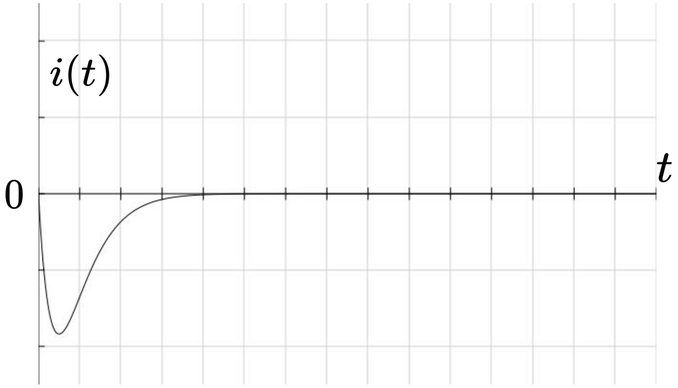
$$\rightarrow \quad q(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\alpha t} + \varepsilon\, C$$

$$i(t) = (B_2 - \alpha\, B_1 - \alpha\, B_2\, t)e^{-\alpha t}$$

ajustamos con las cond. iniciales

$$q(t) = Q(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + \varepsilon\, C \qquad Q = q_0 - \varepsilon\, C \qquad i(t) = -\alpha^2\, Q\, t\, e^{-\alpha t}$$





c) Caso sub-amortiguado $\alpha < \omega_c \quad \rightarrow \quad R < 2\sqrt{L/C} \quad \rightarrow \quad \beta = \sqrt{\omega_c^2 - \alpha^2}\, j \quad , j^2 = -1$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_c^2 - \alpha^2} \quad \in \mathbb{R}$$

Las sol. fundamentales son

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(-\alpha + j\omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(-\alpha - j\omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

y ajustando con las cond. iniciales se obtiene

frecuencia de oscilación

$$q(t) = Q\, e^{-\alpha t}(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) + \varepsilon\, C \qquad Q = q_0 - \varepsilon\, C \qquad i(t) = \frac{\omega_c^2}{\omega}\, Q\, e^{-\alpha t} \sin \omega t$$