

Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 23

Corriente de desplazamiento

Vimos que $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) = 0$

Pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = 0$ siempre ?

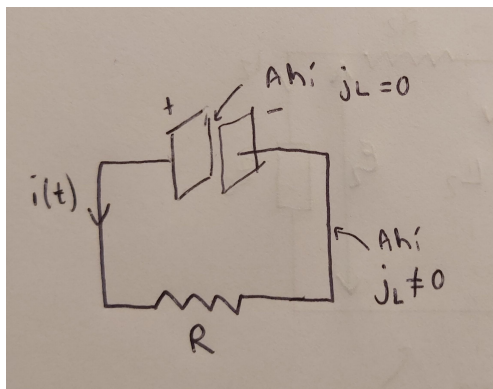
No, porque en general vale $\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = 0$

(conservación de la carga)

$$\oint_{S(V)} \vec{\mathbf{j}}_L \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_L dV = -\int_V \frac{\partial \rho_L}{\partial t} dV$$
$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = -\frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

Si $\frac{\partial \rho_L}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L \neq 0$

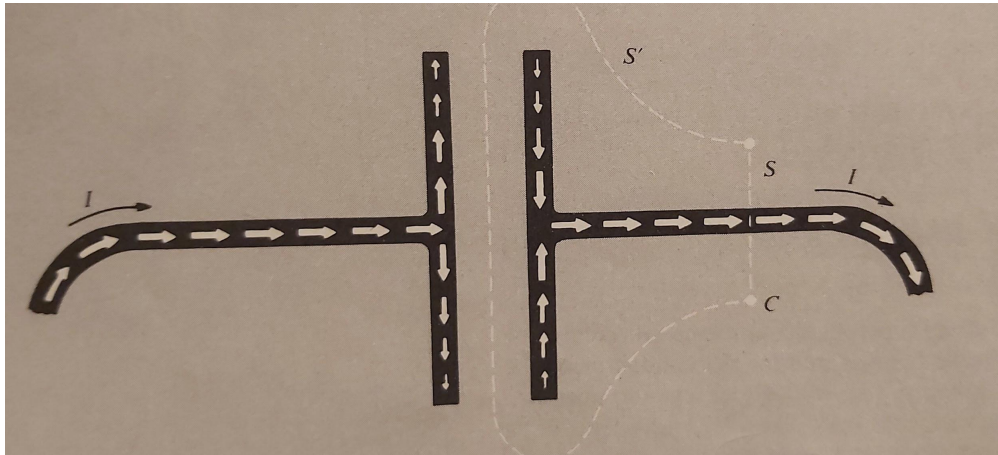
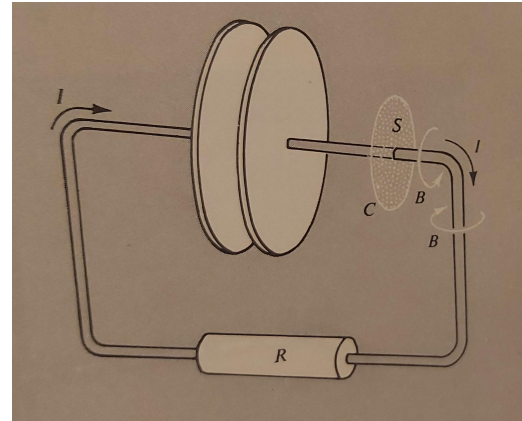
ejemplo:



→ las líneas de $\vec{\mathbf{j}}_L$ no se cierran siempre

Otra forma de ver el problema:

Si aplicamos Ampere en la curva C alrededor del cable, si tomamos la superficie S hay corriente concatenada, pero si tomamos la superficie S' no \rightarrow el campo B (que sale calculando la circulación en C) daría 0 con S' y distinto de 0 con S .



\rightarrow hay que corregir Ampere !

Maxwell (1865) propuso



$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{G}} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}_L = \frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

Pero sigue valiendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{U}}$$

Tiene unidades de densidad de corriente \rightarrow la llamamos *corriente de desplazamiento*

Elegimos $\vec{\mathbf{U}} = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{G}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$

$$\vec{\mathbf{j}}_D = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{j}}_D$$

Notar $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ implica generación de campo magnético cuando un campo eléctrico varía en el tiempo \rightarrow análogo a Faraday que nos dice que variación en el tiempo de campo magnético produce un campo eléctrico.

En el caso estático $\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = 0$ y recuperamos la ley de Ampere, $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L$

Notar $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{j}}_D) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}) = 0$ y por lo tanto las líneas de $\vec{\mathbf{j}}_L + \vec{\mathbf{j}}_D$ son cerradas

En general la corriente de desplazamiento es chica en un conductor y dominante en un aislante

$$\text{Sup. } \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos \omega t$$

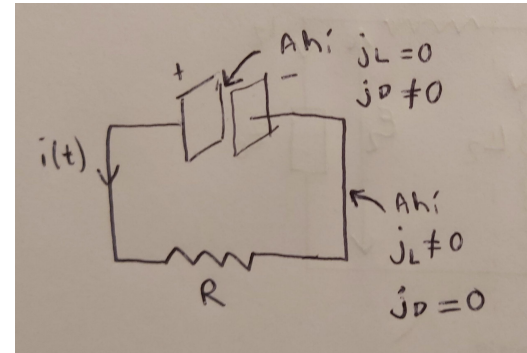
$$|\vec{\mathbf{j}}_L| = \sigma |\vec{\mathbf{E}}| = \sigma |\vec{\mathbf{E}}_0| |\cos \omega t|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{\mathbf{j}}_D|}{|\vec{\mathbf{j}}_L|} \sim \frac{\epsilon \omega}{\sigma}$$

$$|\vec{\mathbf{j}}_D| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \right| = \epsilon \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right| = \epsilon \omega |\vec{\mathbf{E}}_0| |\sin \omega t|$$

conductor $\rightarrow \sigma \approx 10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$, $\epsilon \approx 10^{-11} s \Omega^{-1} m^{-1} \rightarrow \epsilon/\sigma \approx 10^{-19} s \rightarrow j_D \ll j_L$ a menos que $\omega > 10^{18} Hz$

aislante $\rightarrow \sigma \approx 10^{-12} \Omega^{-1} m^{-1}$, $\epsilon \approx 10^{-10} s \Omega^{-1} m^{-1} \rightarrow \epsilon/\sigma \approx 10^2 s \rightarrow j_D \gg j_L$ para $\omega > 10^{-2} Hz$



Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L \quad (\text{Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

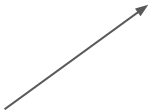
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (\text{Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (\text{Ampere - Maxwell})$$

Fuentes: ρ_L , $\vec{\mathbf{j}}_L$

En medios LIH,

Campos: $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{D}}$, $\vec{\mathbf{H}}$


$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} \quad , \quad \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$$

+ relaciones constitutivas entre los campos en los medios

En vacío, $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$ y las ecs. Maxwell quedan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

los campos eléctrico y magnético están **acoplados**

Si no hay dependencia temporal, los campos se desacoplan \rightarrow

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

Ondas electromagnéticas en vacío

Supongamos una región del espacio sin fuentes, $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ las ecs. Maxwell quedan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Las dos últimas ecuaciones nos dicen: un campo magnético variable en el tiempo nos genera un campo eléctrico, que a su vez, al variar en el tiempo nos genera un campo magnético, que a su vez al variar en el tiempo nos genera un campo eléctrico, que a su vez....

→ propagación ! → **ONDAS !!**

Veamos que nos dice la matemática...

$$\text{hacemos } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla} (\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$$

↑
siempre

usamos esto en la 3er ec. de Maxwell (Faraday) $\rightarrow -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$

y reemplazamos con la 4ta ec. de Maxwell $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}}$$

Esta es una ecuación de ondas (en tres dimensiones) para cada una de las componentes del campo !

Recordemos la ecuación de onda: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow$ soluciones $f = f(x \pm vt)$

y en tres dimensiones $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 f$

donde v es la **velocidad de propagación de la onda**.

En este caso, tenemos ecuaciones de onda para cada componente del campo,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_x \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_y \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_z$$

y la velocidad de propagación es $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ la **velocidad de la luz !!!!**

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\epsilon_0 = 8.8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

Llamamos $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Podemos obtener una ecuación idéntica para el campo magnético, tomando rotor

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{B}}$$

usando esto en la 4ta ec. de Maxwell \rightarrow $-\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

y reemplazando con la 3er ec. de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}}$$

Obtuvimos entonces:

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} \qquad \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{\mathbf{B}}$$

$$\text{con } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Son variaciones de los campos eléctrico y magnético en el tiempo y en el espacio que se propagan con velocidad c → las llamamos **ondas electromagnéticas = luz** → [Hertz \(1889\): ondas de radio \(experimentos\)](#)

Las ecuaciones de onda admiten soluciones de la forma:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$$
$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$$

que se llaman soluciones de onda plana

$\vec{\mathbf{k}}$ es el vector de onda y ω la frecuencia (angular) que deben satisfacer la relación

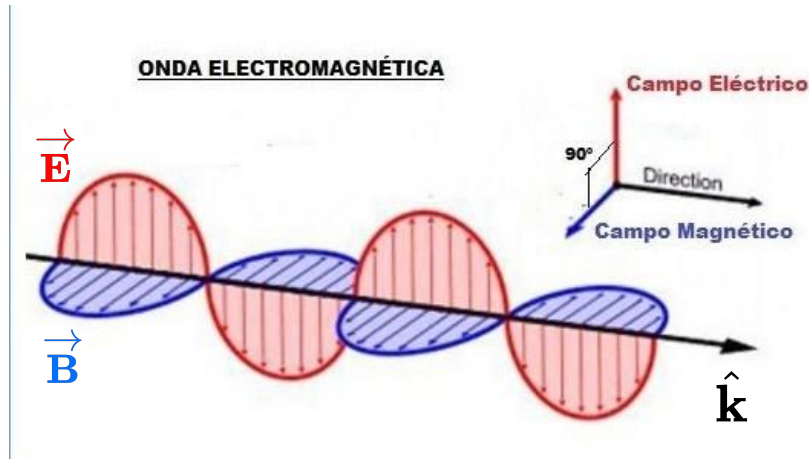
$$\omega^2 = |\vec{\mathbf{k}}|^2 c^2 = k^2 c^2$$

Se cumple además que $\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ sale de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 = j \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0 e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$

$\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ sale de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 = j \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}}_0 e^{j(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}$

$\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}}$ sale de $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \rightarrow j \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega \vec{\mathbf{B}}$

y también de aquí sale que $\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = c \vec{\mathbf{B}}$



Vector de Poynting

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_0| |\vec{\mathbf{B}}_0|}{\mu_0} \hat{\mathbf{k}}$$

indica la dirección de propagación de la energía electromagnética

$$u = \frac{\epsilon_0 |\vec{\mathbf{E}}|^2}{2} + \frac{|\vec{\mathbf{B}}|^2}{2\mu_0}$$