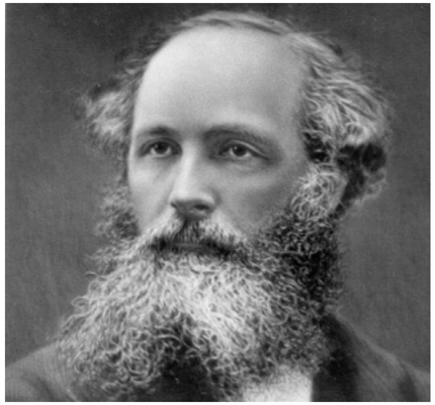
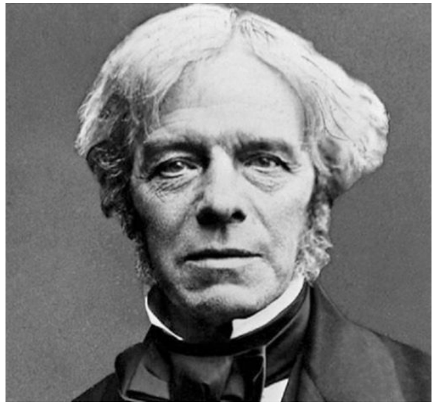
El electromagnetismo, la primera teoría de campos

- La teoría clásica del campo electromagnético surgió en forma más o menos completa en 1873 en el Tratado sobre electricidad y magnetismo de James Clerk Maxwell.
- Maxwell basó su teoría en gran parte en las ideas intuitivas de Michael Faraday.
- La amplia aceptación de la teoría de Maxwell ha provocado un cambio fundamental en nuestra comprensión de la realidad física.
- En esta teoría, los campos electromagnéticos son los mediadores de la interacción entre objetos materiales.



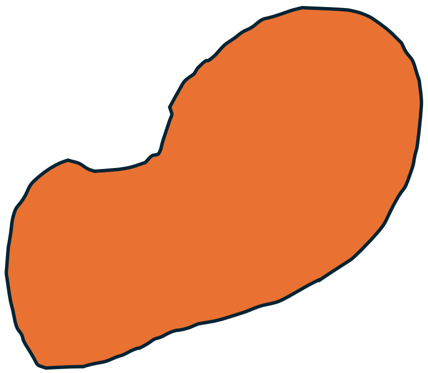
James Clerk Maxwell



Michael Faraday

¿Qué es una teoría de campos?

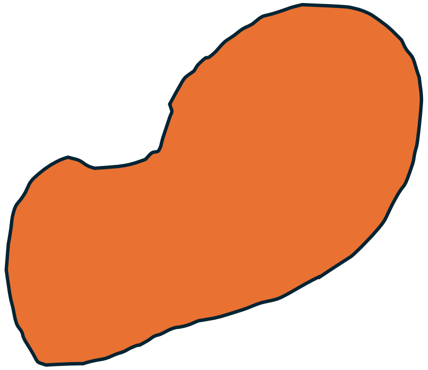
1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos 'campo'.



CAMPO

¿Qué es una teoría de campos?

1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende de la carga del cuerpo y cuán lejos está de este.



CAMPO

¿Qué es una teoría de campos?

1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende del cuerpo que lo genera y cuán lejos está de este.
3. La presencia de un segundo cuerpo (azul) en el espacio ocupado por el campo del primero genera una fuerza en el segundo que es producto de la interacción de este con el campo generado por el primero

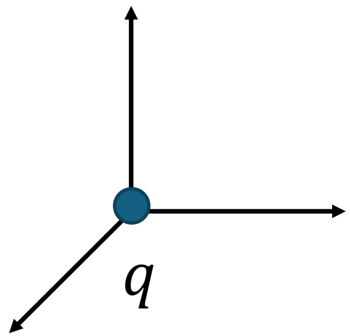
¿Qué es una teoría de campos?

1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos 'campo'.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende del cuerpo que lo genera y cuán lejos está de este.
3. La presencia de un segundo cuerpo (azul) en el espacio ocupado por el campo del primero genera una fuerza en el segundo que es producto de la interacción de este con el campo generado por el primero

4. En una teoría de campos, las fuerzas son resultantes de la interacción de un cuerpo (en este caso el azul) con el campo generado en todo el espacio por el naranja.

El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

- El campo eléctrico es el medio a través del cual podemos calcular la fuerza de Coulomb
- ¿Cómo definimos el campo eléctrico?
- Veamos un caso simple, el de una sola carga eléctrica q.
- Para mayor comodidad, colocamos el origen del sistema de coordenadas sobre ella.



El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

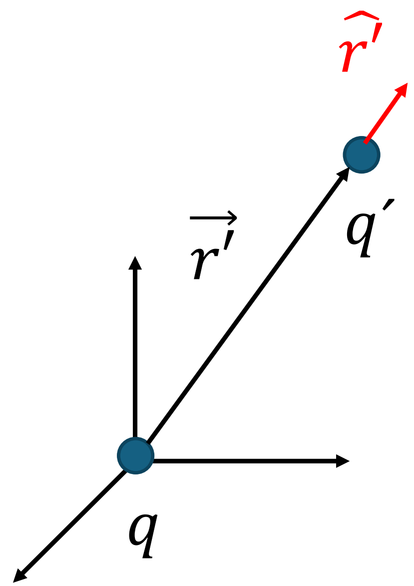
- Imaginemos ahora una segunda carga hipotética 'de prueba' $q' > 0$ en una posición arbitraria que llamaremos $\overrightarrow{r'}$.
- La fuerza que sufre q' por la presencia de q es

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r'^2}\widehat{r'}$$

- Ahora bien, el vector

$$\vec{E}\left(\overrightarrow{r'}\right) = \frac{\overrightarrow{F'}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}\widehat{r'}$$

No depende de q' pero sí de la posición $\overrightarrow{r'}$.



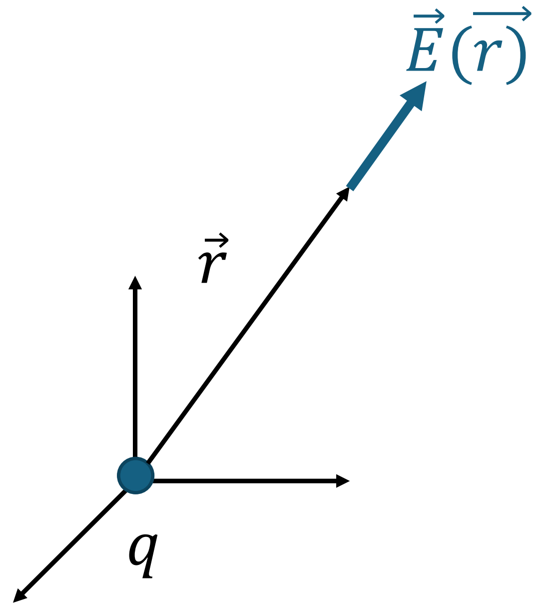
El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

- Como el punto $\overrightarrow{r'}$ es un punto cualquiera, la expresión anterior puede escribirse como un vector dependiente de la posición $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

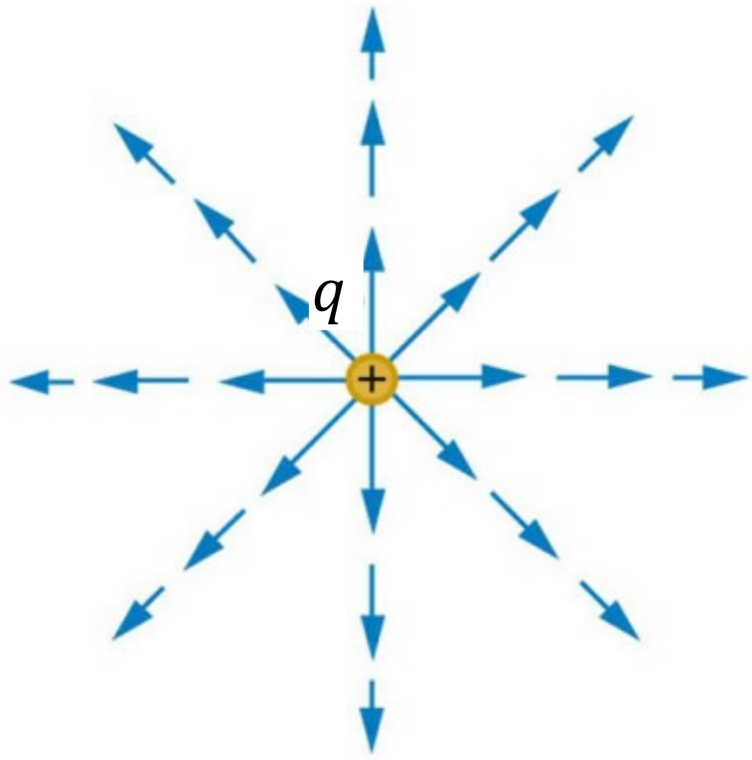
- **Este es el campo eléctrico creado por la carga puntual q en el punto $\vec{r}$**

- Es un vector dibujado en el extremo del vector posición $\vec{r}$



El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

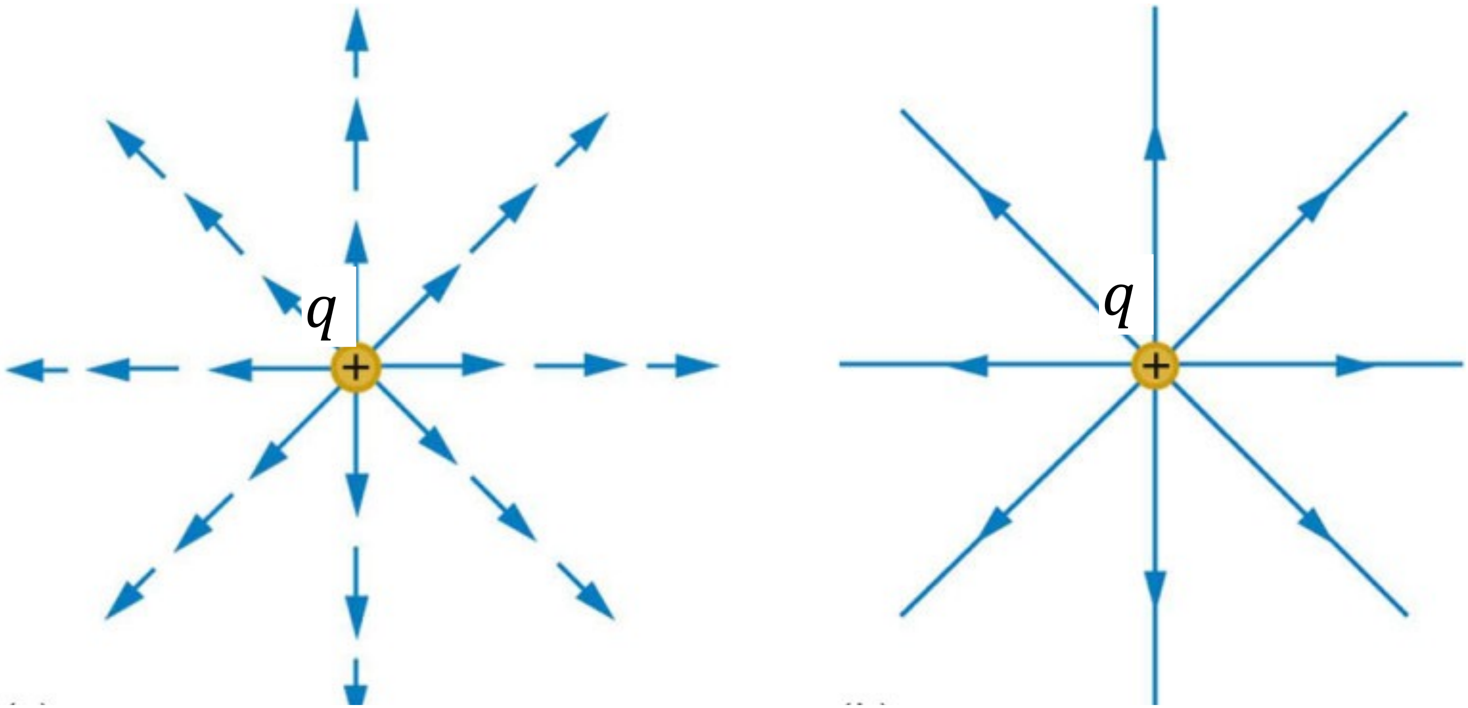
- Es un vector $\vec{E}$ definido en cada punto del espacio. A cada posición $\vec{r}$ le asignamos una flecha $\vec{E}(\vec{r})$ (vector).
- El vector $\vec{E}(\vec{r})$ apunta hacia afuera si $q > 0$ y hacia adentro si $q < 0$
- La intensidad dependerá de la posición.
- Su intensidad se mide en N/C o como veremos más adelante en Volt /m



$q > 0$

Líneas de campo de una carga q

- Son líneas que tienen al campo $\vec{E}$ como vectores tangentes.
- Densidad de líneas indica intensidad.



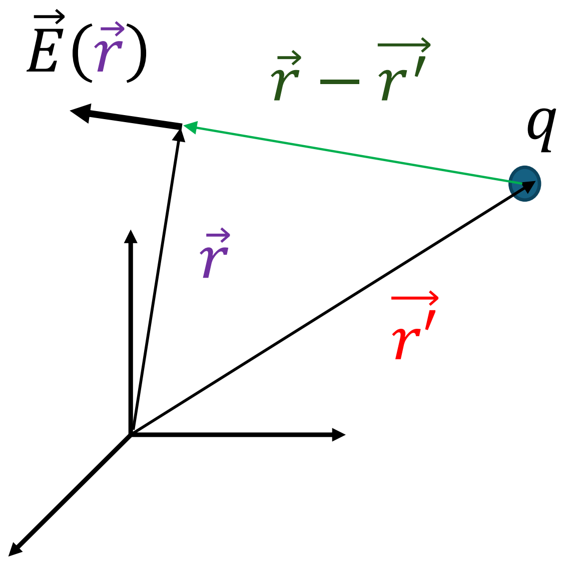
¿Qué pasa si no colocamos la carga en el origen?

- Supongamos que la carga no se encuentra en el origen de nuestro sistema de coordenadas.
- El campo eléctrico en el punto $\vec{r}$ entonces queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^2}\frac{(\vec{r}-\overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}$$

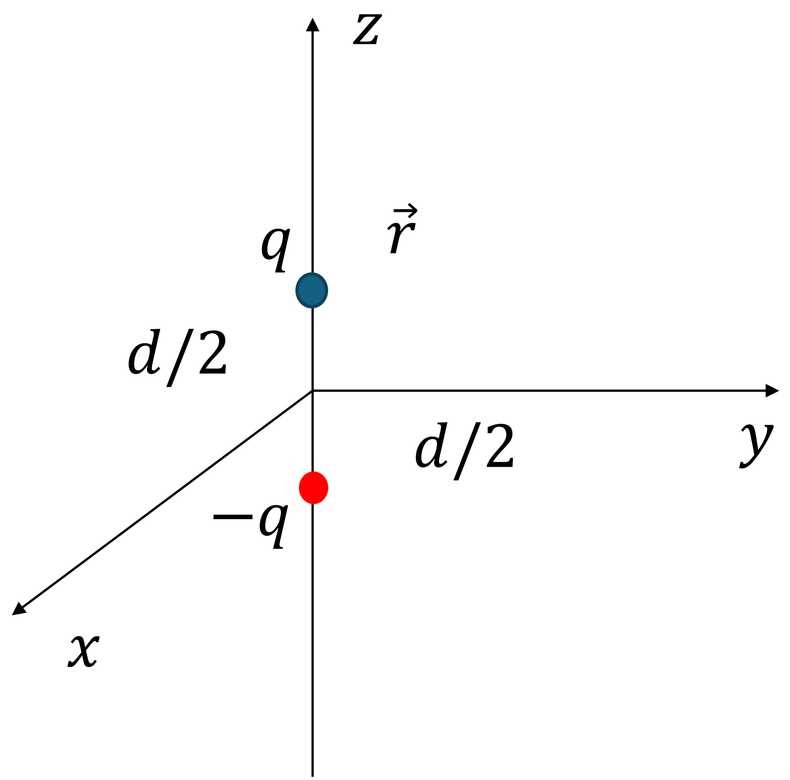
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(\vec{r}-\overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3}$$

- $\frac{(\vec{r}-\overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}$ es un versor que apunta desde el punto fuente al punto campo.



Ejemplo: dos cargas puntuales de signos opuestos

- Supongamos dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d. Este arreglo se llama **'dipolo'**
- Queremos calcular el campo eléctrico generado por ellas en todo el espacio.
- Elijamos el sistema de coordenadas tal que ambas cargas quedan sobre el eje z equidistantes del origen.
- Elegimos un punto arbitrario $\vec{r}$

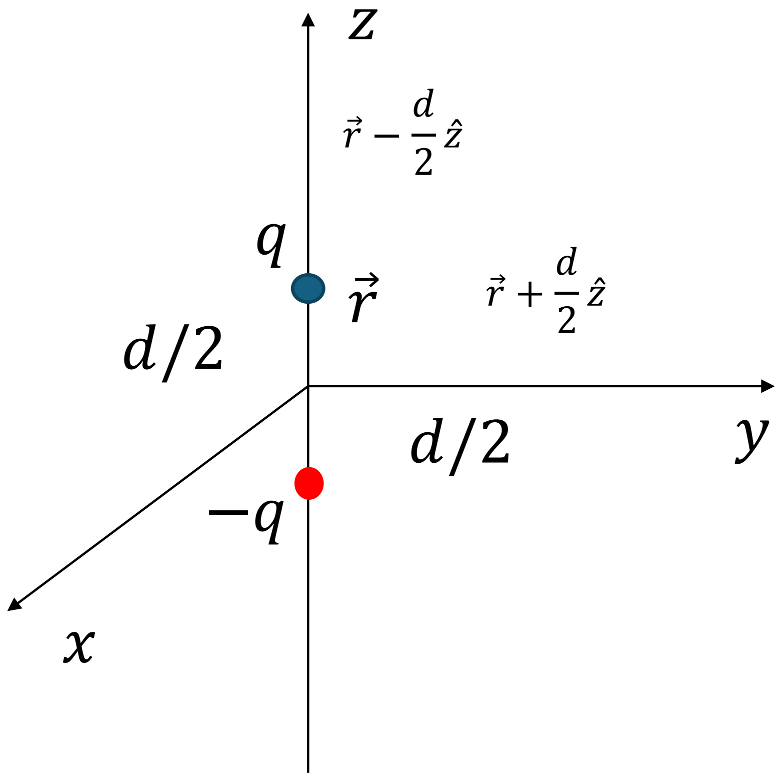


Ejemplo: dos cargas puntuales de signos opuestos

- El **campo generado** por ambas cargas en el punto $\vec{r}$ es la **superposición** o suma de los campos generados por cada una de las cargas en ese mismo punto $\vec{r}$.
- Los campos eléctricos de cada carga en el punto $\vec{r}$ son:

$$\overrightarrow{E^+}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}$$

$$\overrightarrow{E^-}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|^2}\frac{\left(\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}$$

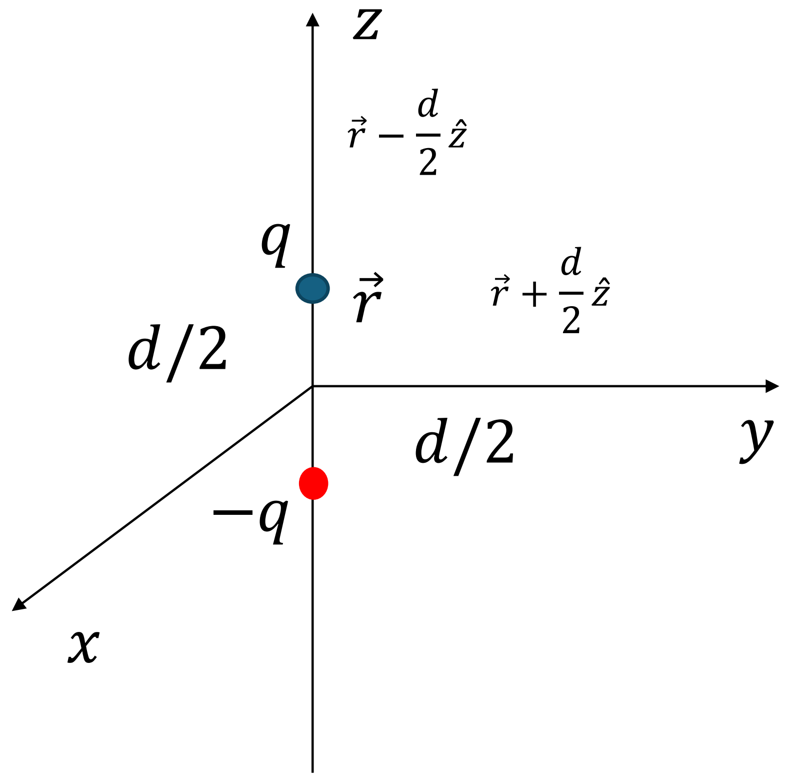


Ejemplo: dos cargas puntuales de signos opuestos

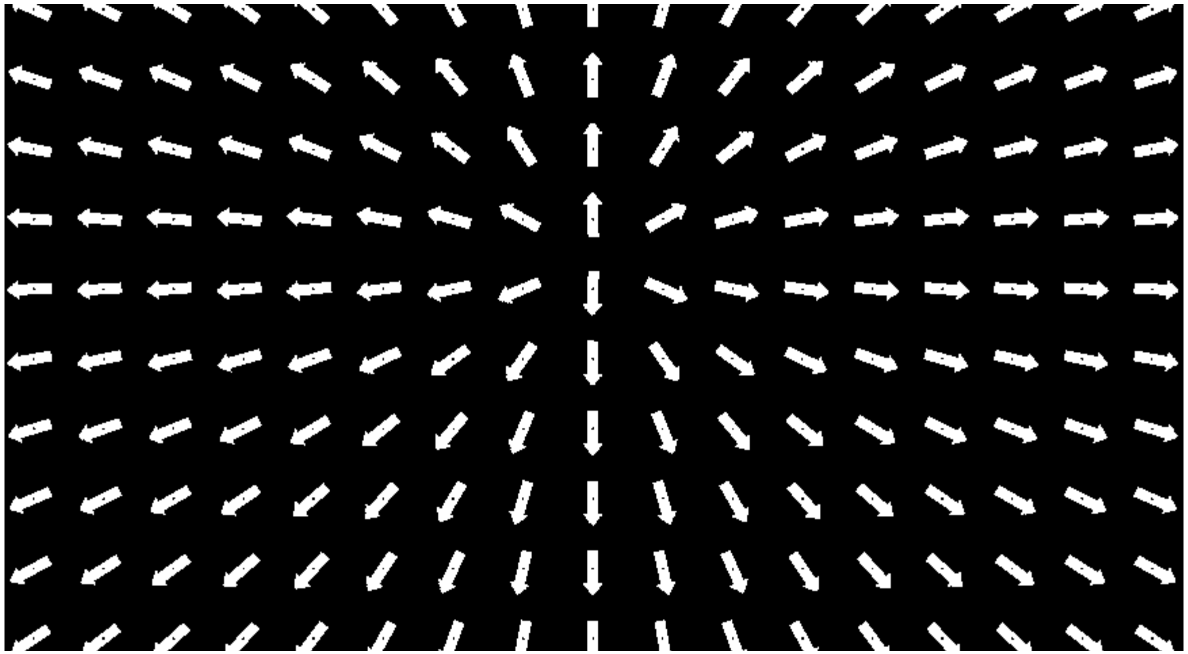
- Entonces el campo en el punto $\vec{r}$ es la suma vectorial de los campos de cada carga en ese punto del espacio.

$$\vec{E}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{E^{+}} + \overrightarrow{E^{-}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\left(\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{z}\right|^3} - \frac{\left(\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}\right\}$$

- ¿Alcanzan a ver qué ocurre con la intensidad del campo a medida que nos alejamos del dipolo?



https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_all.html

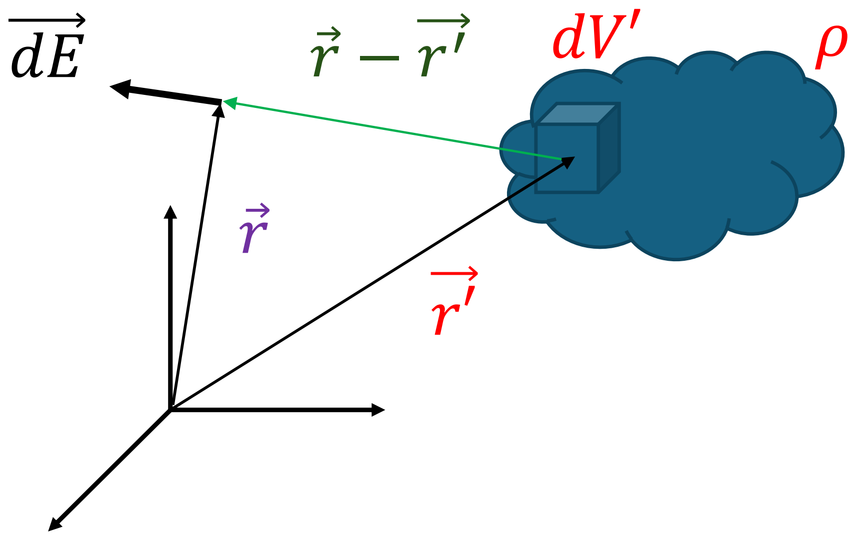


Campo eléctrico de una distribución

- Pensemos en un diferencial de carga $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dV'$ en el punto $\overrightarrow{r'}$ ('fuente') como parte de una distribución volumétrica ρ dentro de un cuerpo de volumen V.

- La contribución de $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'$ al campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ ('campo') es:

$$\overrightarrow{dE}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3}$$



Campo eléctrico de una distribución

- El campo total $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ se obtiene integrando sobre todo el volumen de la distribución de carga.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\iiint}_{\text{Volumen de carga}} \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)\left(\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} \, dV'$$

- En cartesianas $\overrightarrow{r'} = (x', y', z')$ y $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(x - x')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx' dy' dz'$$

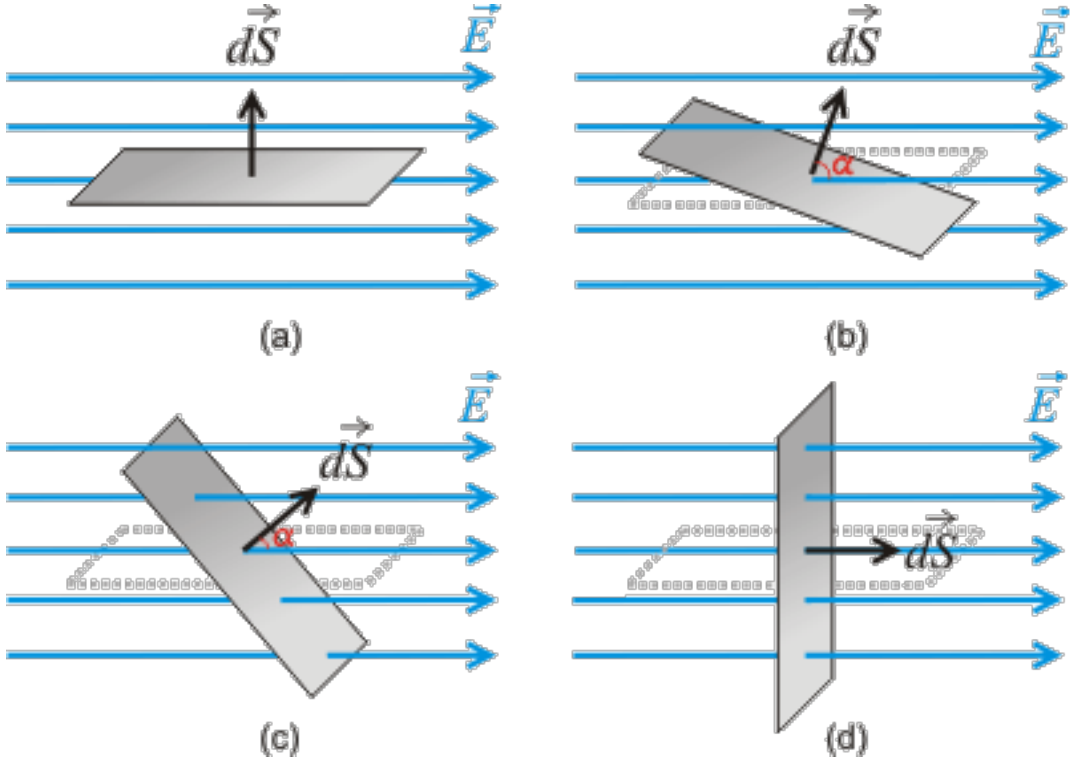
$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(y - y')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx' dy' dz'$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(z - z')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx' dy' dz'$$

¿Hay una manera más fácil de calcular el campo eléctrico para distribuciones de carga simétricas?

Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el **producto de un campo por el área transversal** que atraviesa

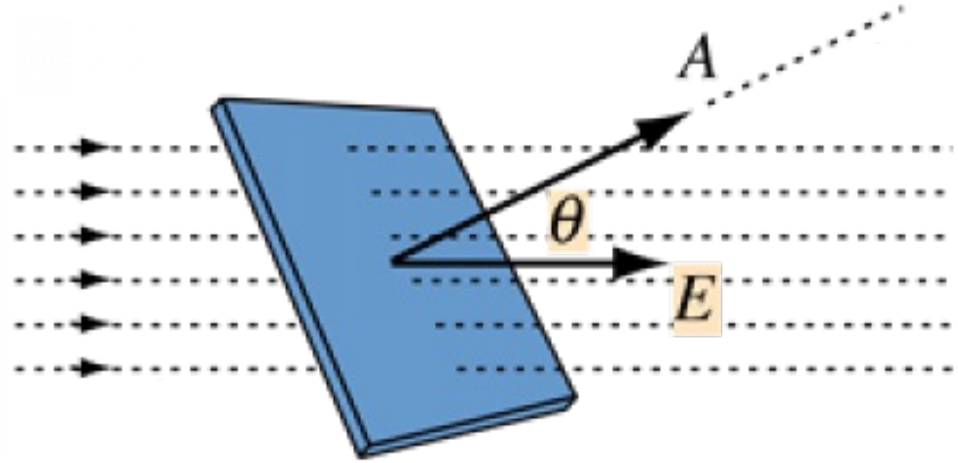


Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

Superficie plana de área A, $\vec{E}$ uniforme

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos\theta$$



Flujo de campo eléctrico

- Superficie compuestas de facetas de área $\overrightarrow{A_i}$ atravesadas por campos $\overrightarrow{E_i}$.

$$\Phi = \sum_{todos\ los\ i} \overrightarrow{E_i} \cdot \overrightarrow{A_i} = \sum_{todos\ los\ i} E_i A_i \cos\theta_i$$

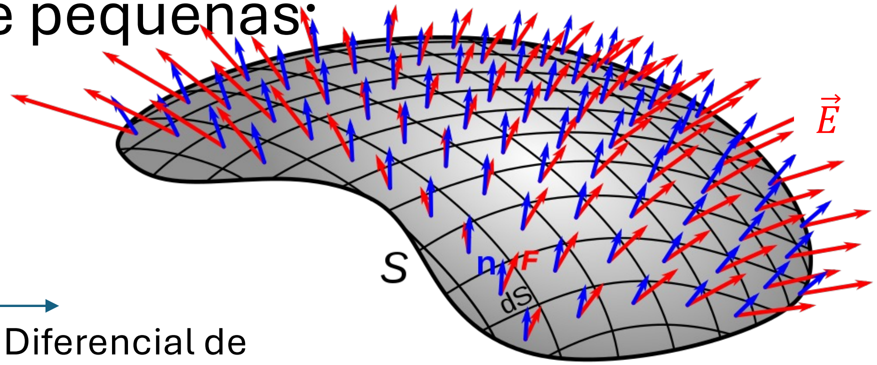
- Si las facetas son infinitesimalmente pequeñas:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds$$

Campo en la faceta infinitesimal

Normal a la faceta infinitesimal

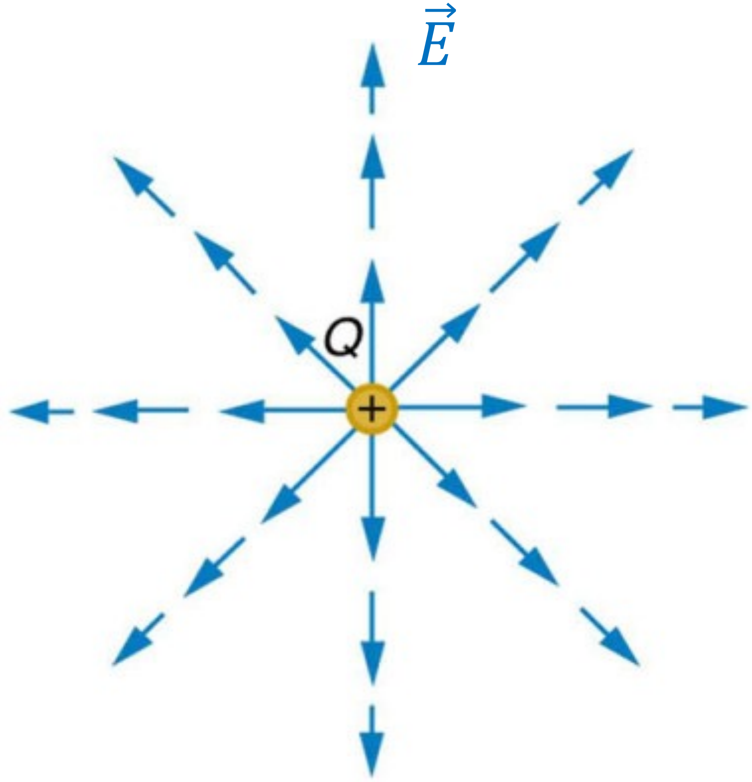
Diferencial de área



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

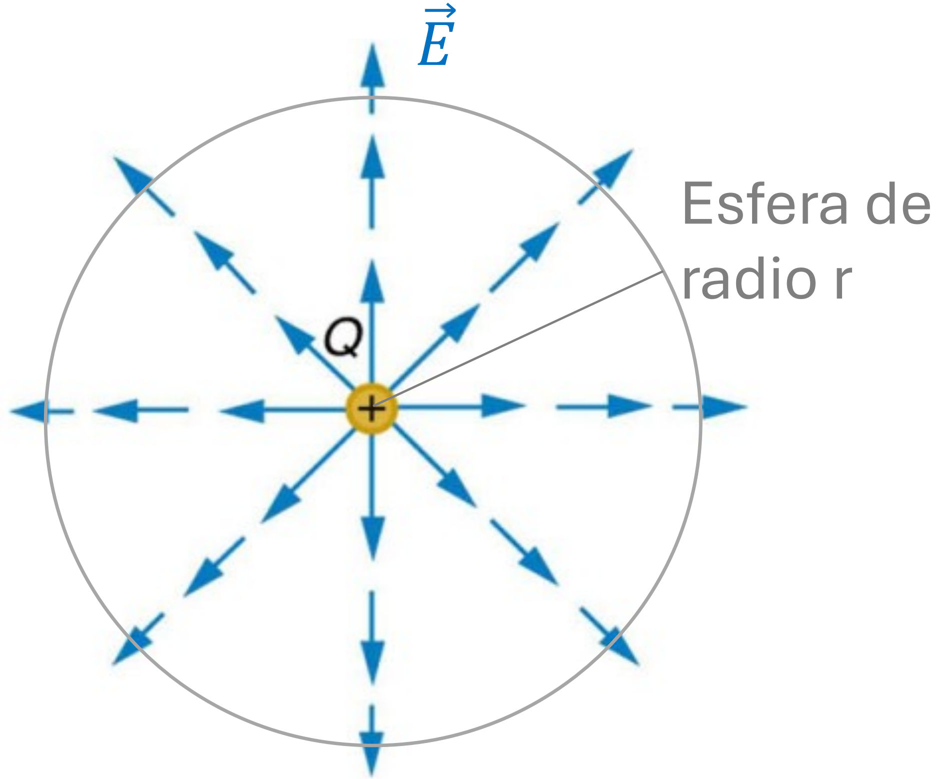


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio r vale:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Superficie de la esfera

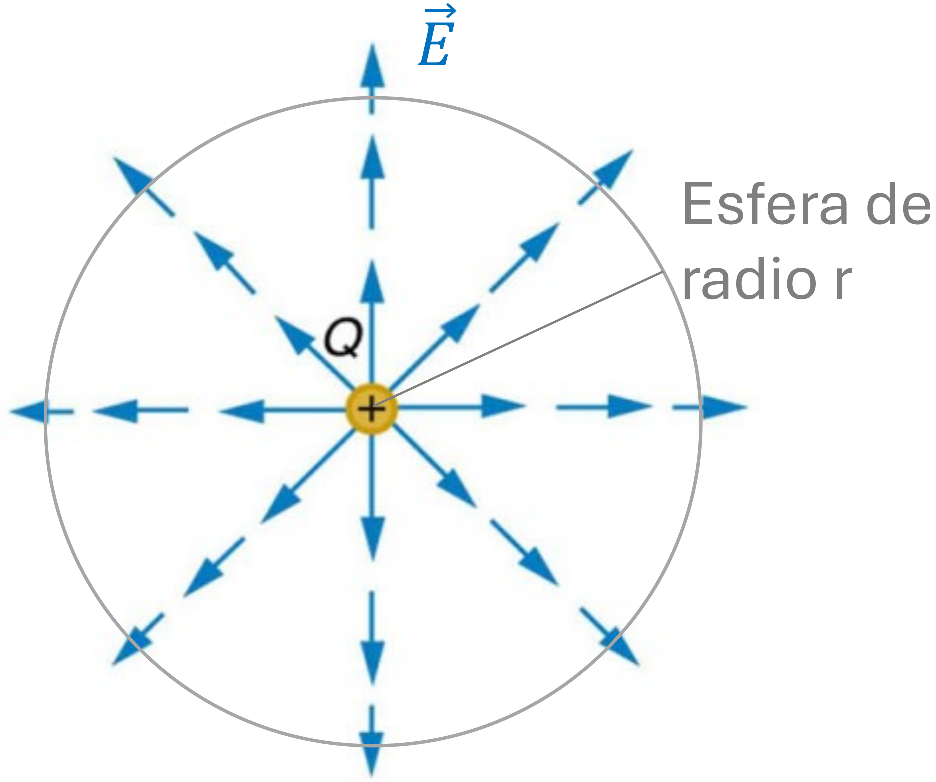


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Superficie de
la esfera

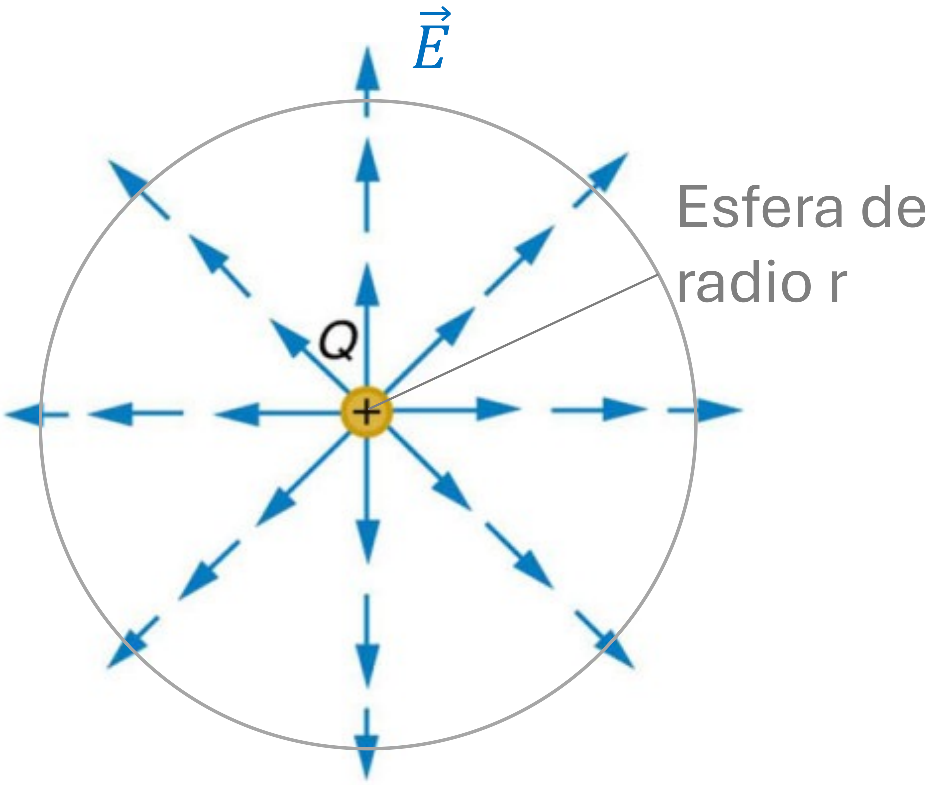


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \, \hat{r}$$

Superficie de la esfera



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Partiendo de:

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \,\hat{r}$$

Superficie de
la esfera

- Reorganizamos los factores y tachamos los r^2

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2} \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \,\hat{r} \cdot \hat{r}$$

Superficie de
la esfera

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Luego, sabemos que por definición $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Superficie de
la esfera

- Ponemos ahora los límites de integración y Q sale afuera

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale 2π, entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \, \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es <u>el mismo para cualquier valor de r</u>.

Ley de Gauss

- Supongamos una superficie cerrada S que encierra un volumen V

- Se verifica que el flujo del campo eléctrico $\vec{\mathrm{E}}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV$$

Superficie cerrada S

Volumen encerrado por S

Carl Friederich Gauss (1777-1855)

Teorema y Ley de Gauss

- Dado un campo $\vec{E}$ y una superficie cerrada S que envuelve un volumen V

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

- Entonces, de la ley de Gauss deducimos que:

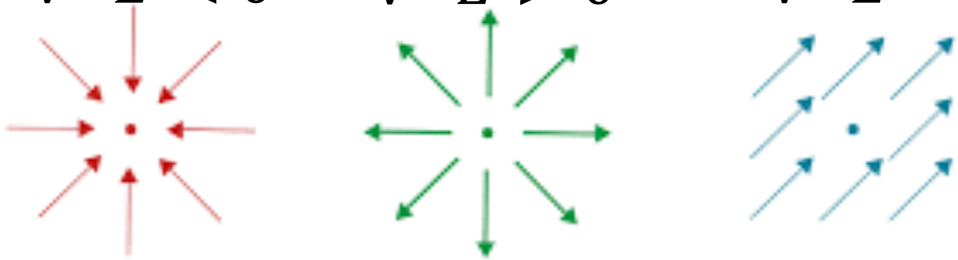
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Esta es la versión diferencial de la Ley de Gauss. Vale punto a punto

Ley de Gauss y Divergencia de $\vec{E}$

- La divergencia de un campo en un punto dado nos dice gráficamente la medida en la que el campo converge o no a ese punto. Veamos tres ejemplos:

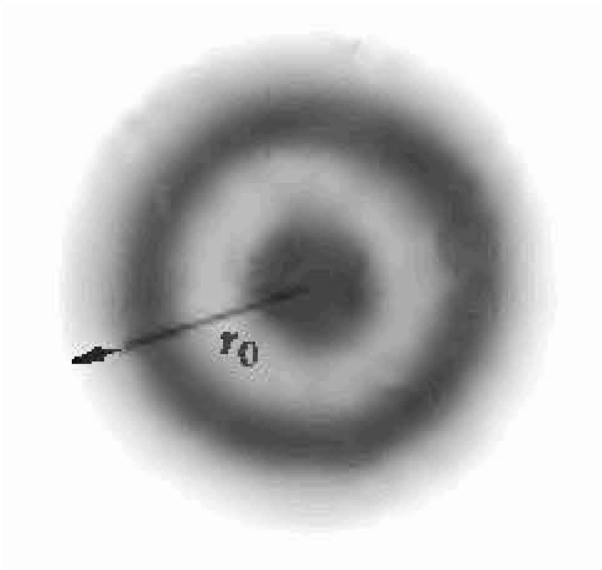
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} < 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} > 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$



- Esto dice que los puntos en donde hay densidad de carga positiva son manantiales de campo eléctrico y donde hay densidad negativa son ‘sumideros’

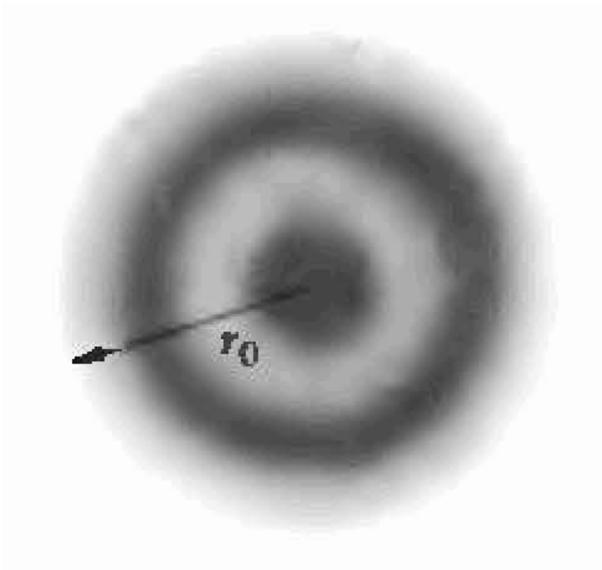
Otro ejemplo

Campo de una distribución esférica de carga



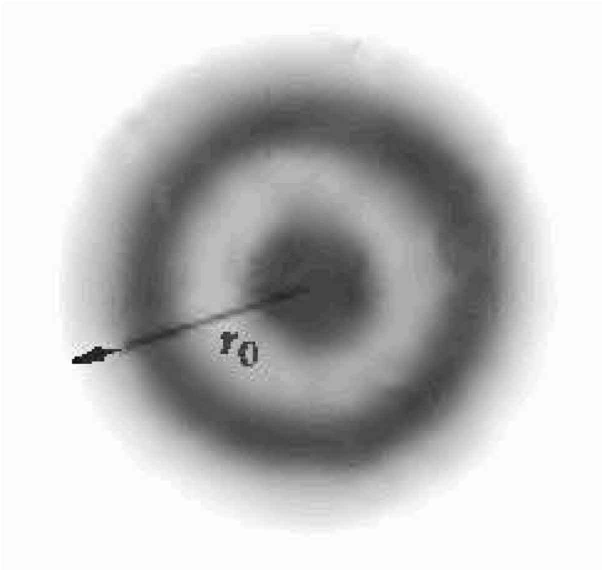
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.

Campo de una distribución esférica de carga



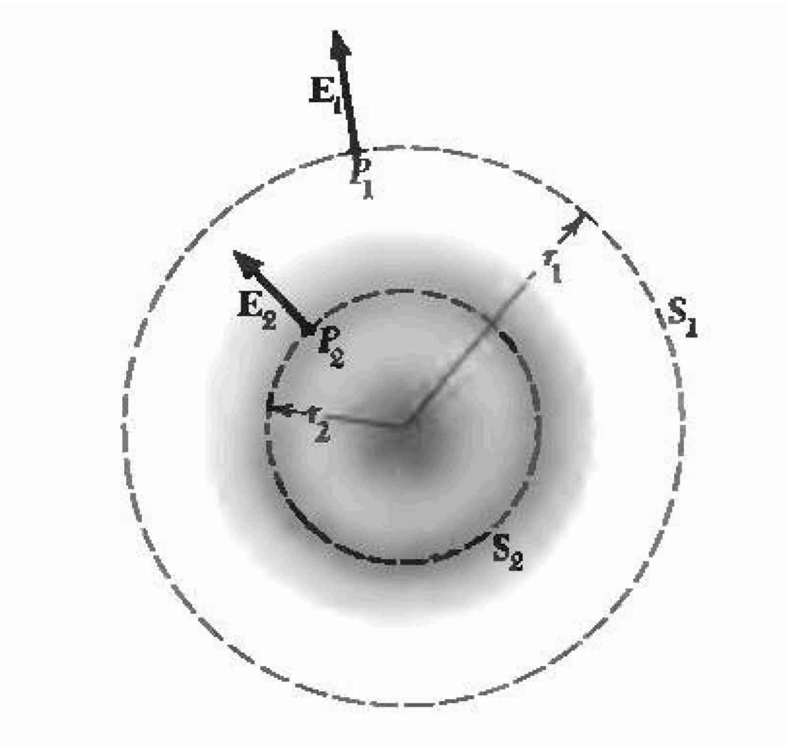
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en $r = r_0$.

Campo de una distribución esférica de carga



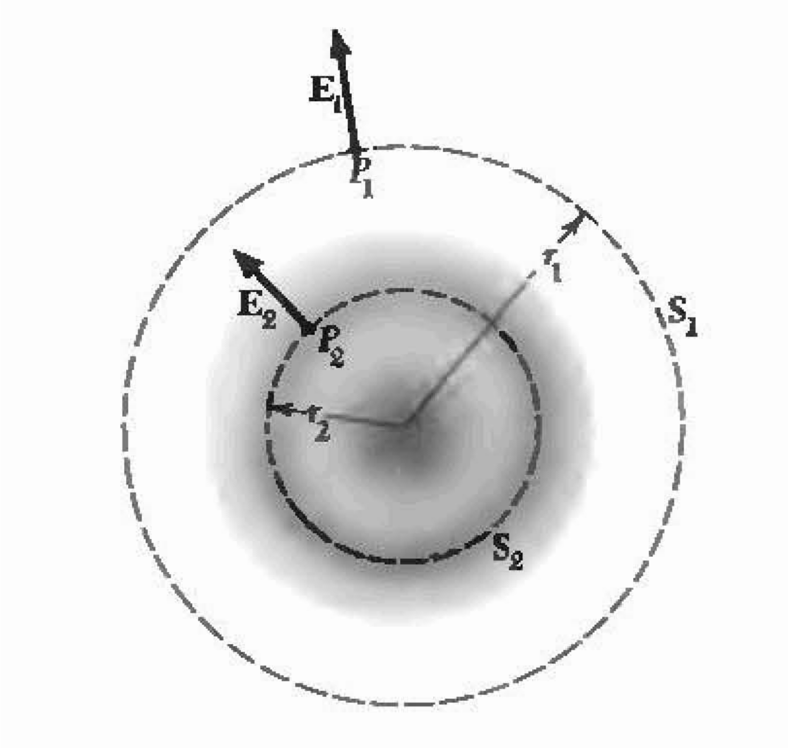
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en $r = r_0$.
- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.

Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

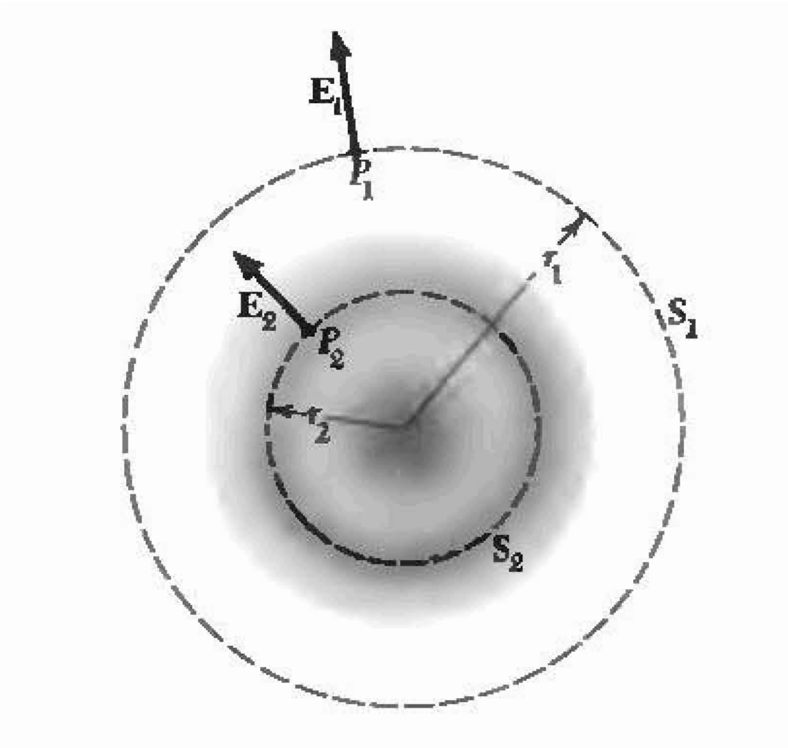
Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.

Campo de una distribución esférica de carga

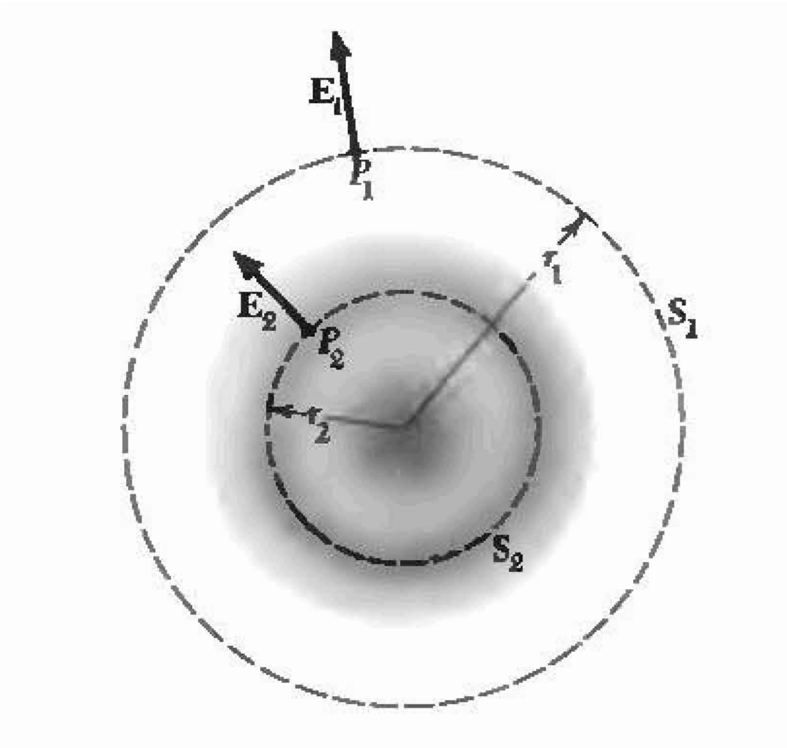


- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.

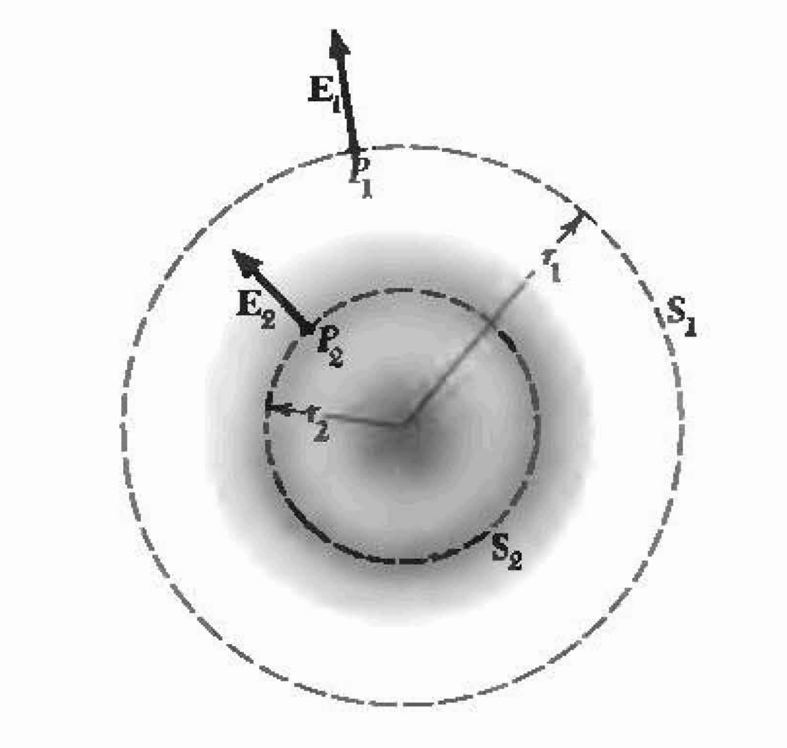
$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

Campo de una distribución esférica de carga

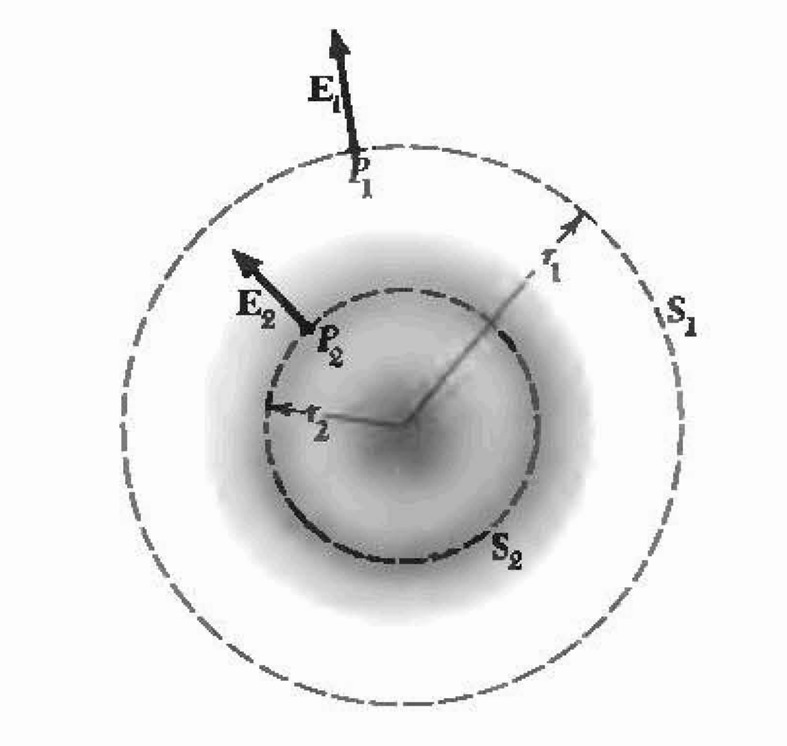


- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

- Si E_1 es el módulo del campo sobre la esfera S_1 de radio r_1 , el flujo será:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = E_1 \int_{S_1} \hat{r} \cdot \hat{r}\, ds = 4\pi r_1^2 E_1$$

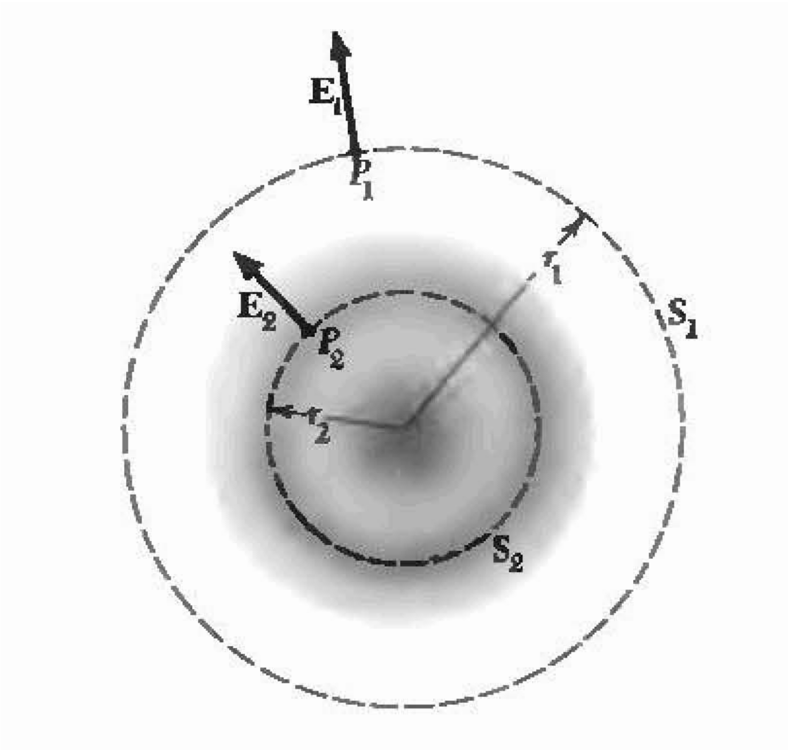
Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



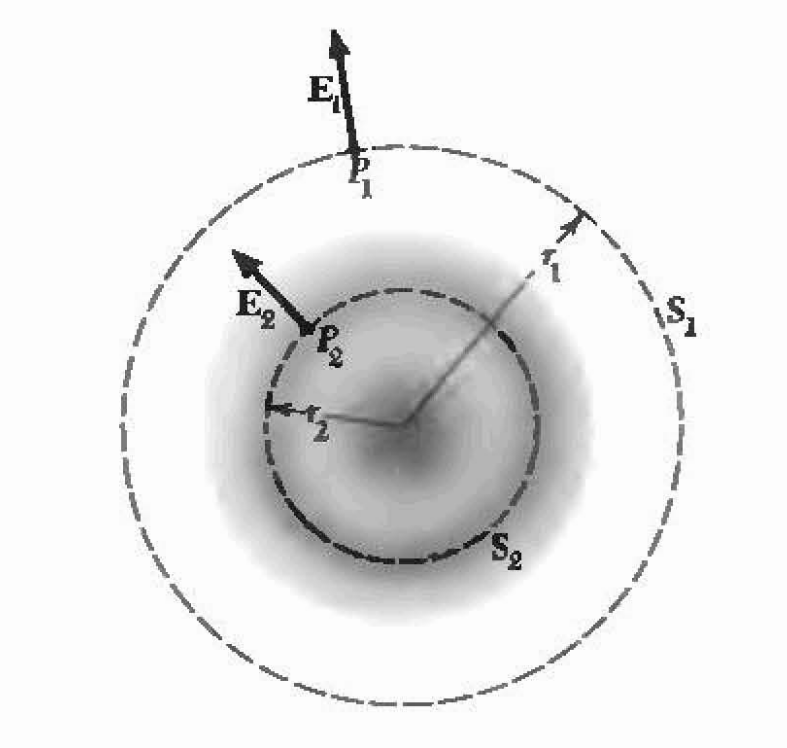
- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

- Por lo tanto

$$E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

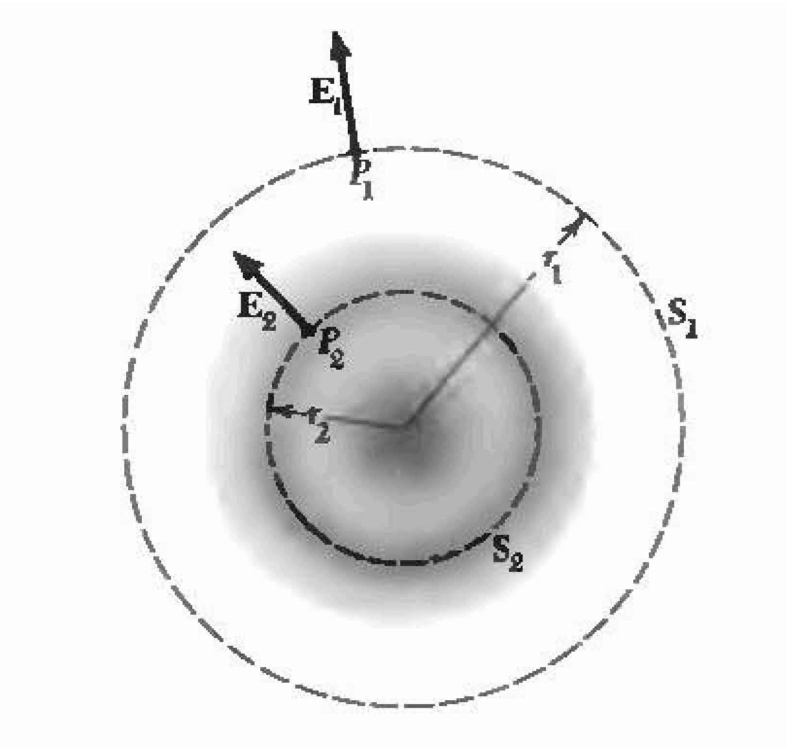
- Por lo tanto

Sirve para todo $r_1 > r_0$

$$E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Es como si toda la carga dentro de S_1 estuviese concentrada en el origen

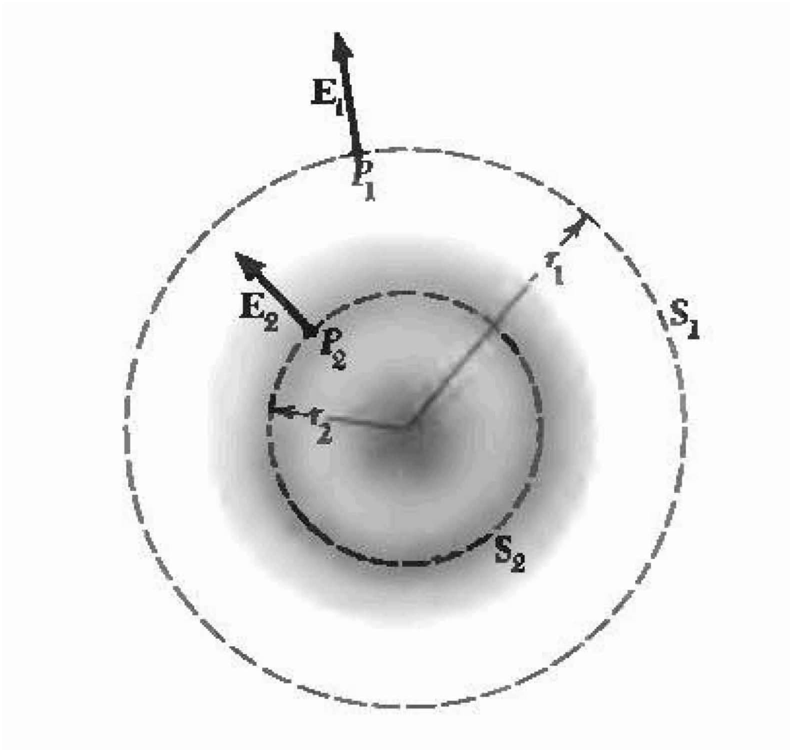
Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

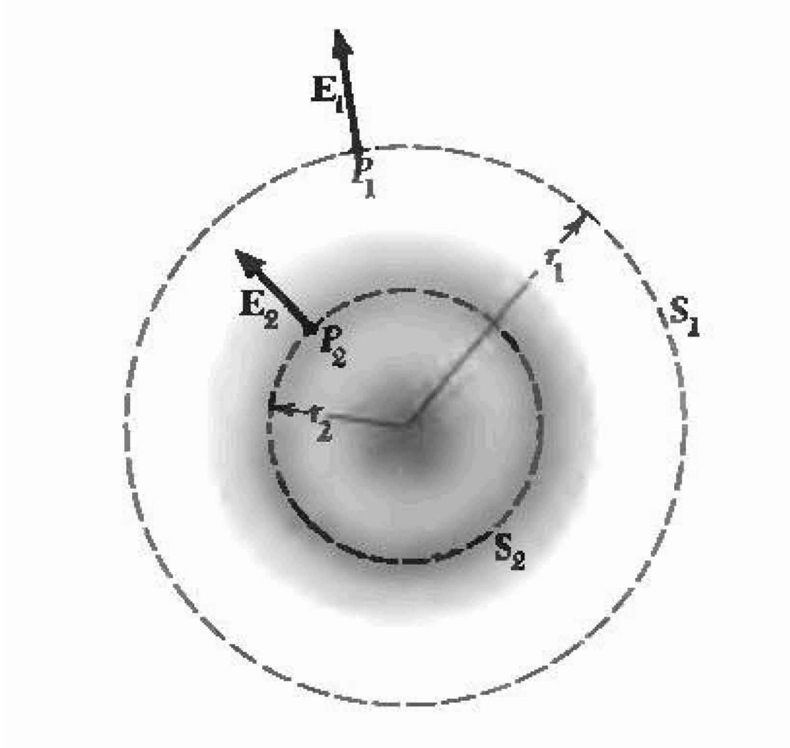
$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

- Depende de cuánta carga encierre S_2

$$Carga\ encerrada\ por\ S_2 = \int \rho\ dV$$

Volumen encerrado Por S_2

Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

- Depende de cuánta carga encierre S_2

$$Carga\ encerrada\ por\ S_2 = \int \rho\ dV$$

Volumen
encerrado
Por S_2

- No depende de la carga fuera de S_2 !