Ley de Gauss

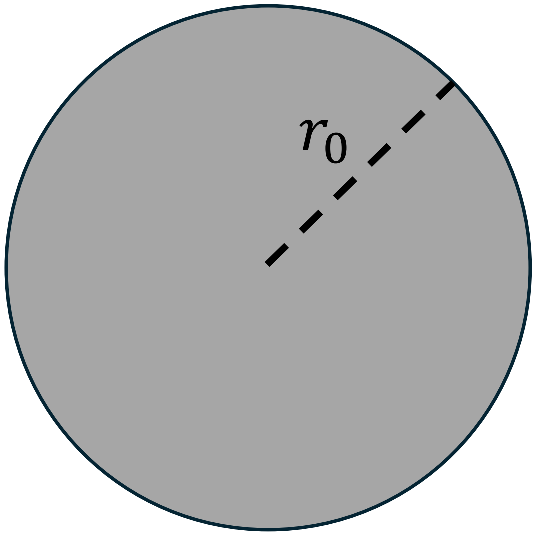
- Supongamos una **superficie cerrada** S que **encierra un volumen** V

- El flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

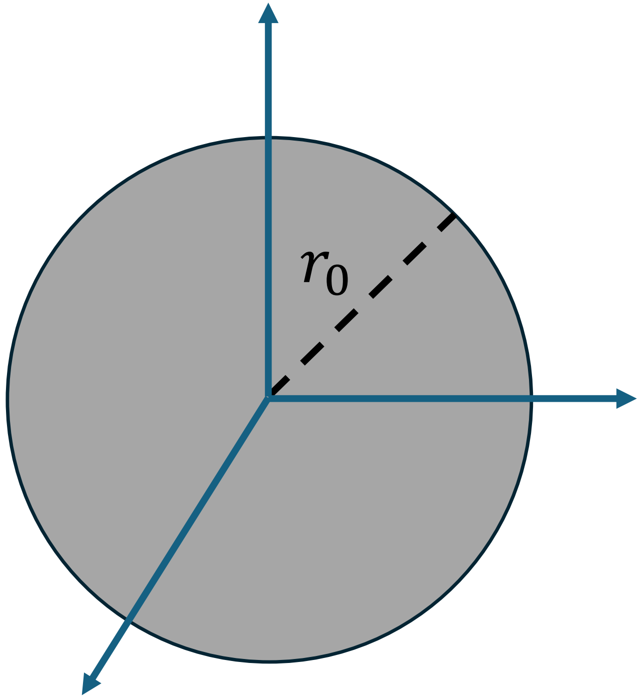
Carl Friederich Gauss (1777-1855)

Campo de una distribución esférica de carga



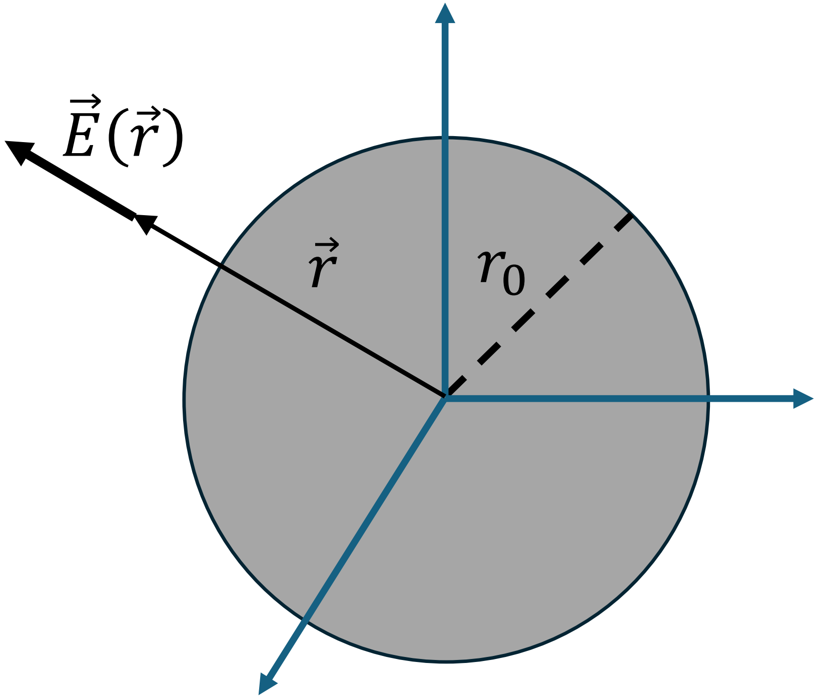
- Supongamos una distribución de carga esférica uniforme de radio r_0.
- Esto quiere decir que la densidad de carga ρ vale lo mismo dentro de la esfera de radio r_0.
- Fuera de la esfera, no hay cargas.
- Vamos a usar la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio.

Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la esfera alrededor del origen no cambia nada).
- Vamos a elegir un sistema de coordenadas esférico con origen en el centro de la esfera.
- De esta manera ρ es una constante entre $0 < r \leq r_0$ y $\rho = 0$ para $r > r_0$

Campo de una distribución esférica de carga



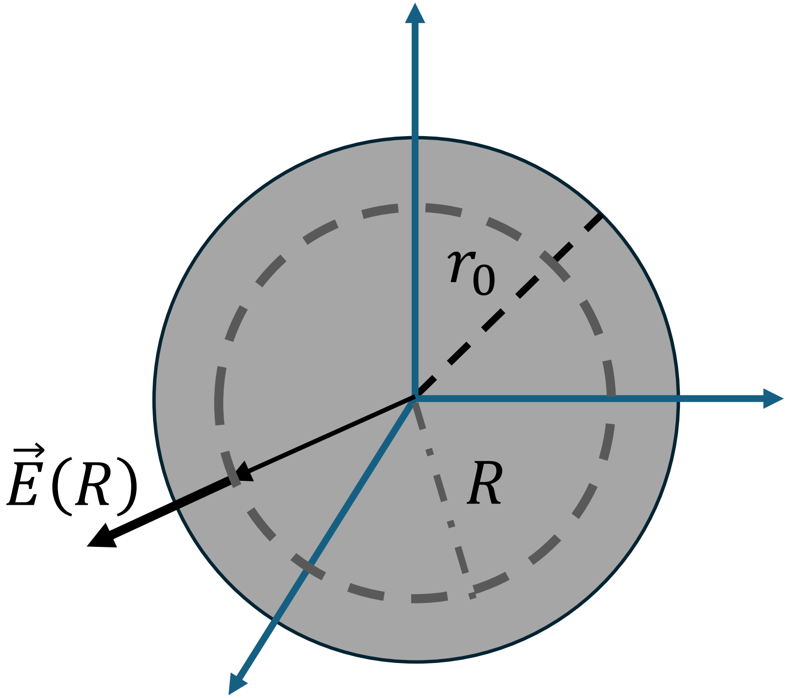
- Con esa simetría, esperamos que el vector campo eléctrico $\vec{E}$ solo tenga componente radial:

$$\vec{E} = E\,\hat{r}$$

- Además, esperamos que $\vec{E}$ solamente de la distancia radial r.

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

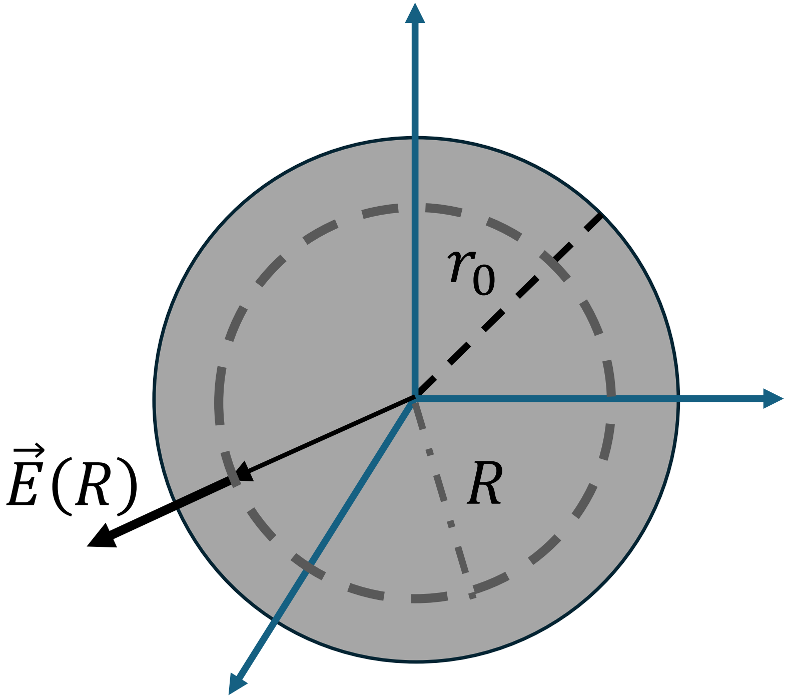
Campo de una distribución esférica de carga



- Separemos el problema en dos regiones: dentro ($0 < r \leq r_0$) y fuera de la esfera de carga ($r > r_0$).
- Planteemos la Ley de Gauss dentro de la esfera ($0 < r \leq r_0$) .
- Tomemos como superficie cerrada una esfera de radio $R < r_0$ que llamaremos $S(R)$.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen Encerrado por } S(R)} \rho \, dV$$

Campo de una distribución esférica de carga



- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

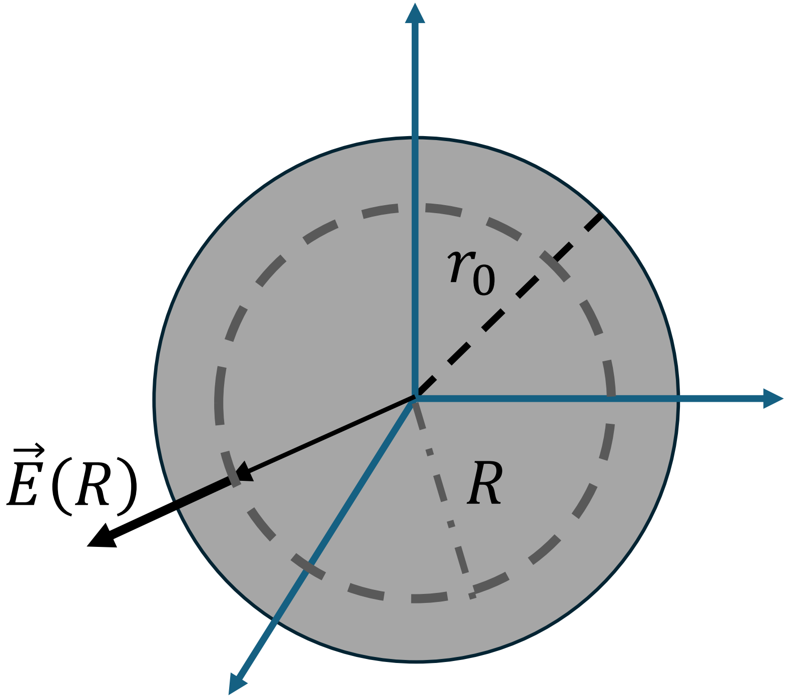
$$\frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{\rho}{\epsilon_0}\iiint dV = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}R^3$$

Volumen
Encerrado por
$S(R)$

- El primer miembro es una integral hecha sobre la esfera de radio R. Sobre la esfera:

$$\vec{E} = E(R)\hat{r}$$
$$\overrightarrow{da} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



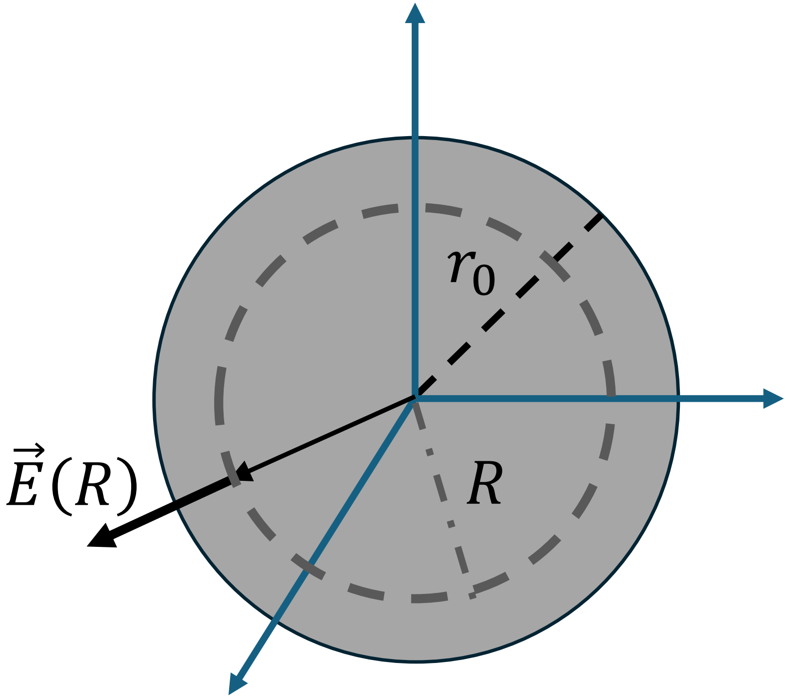
- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(R)\hat{r} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

- Como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ tenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(R) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Campo de una distribución esférica de carga



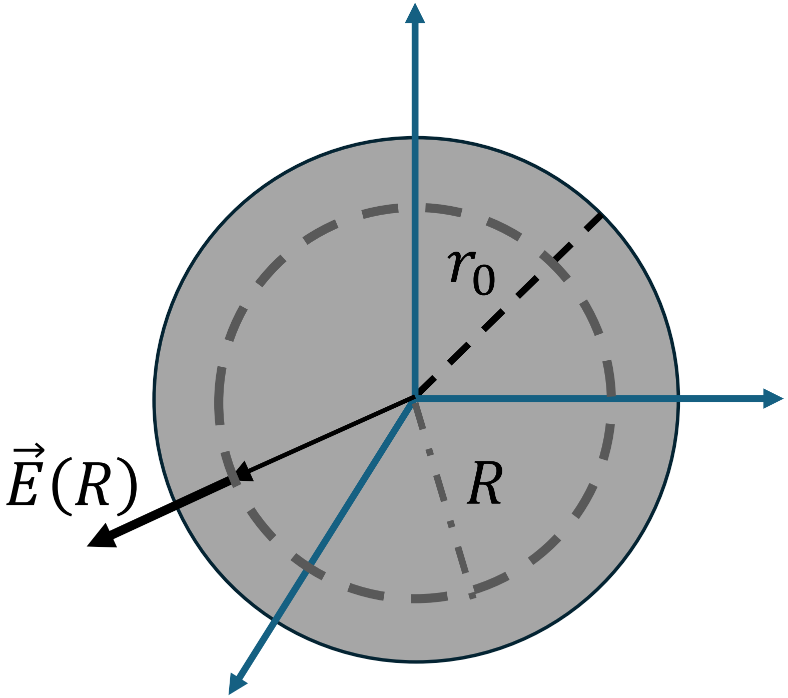
- Lo interesante es que por simetría, $E(R)$ vale lo mismo en toda la esfera. Por eso junto a R^2 salen afuera de la integral

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = E(R)R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

- Como vimos antes, la integral doble da 4π y entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = E(R)4\pi R^2 = E(R)S(R)$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Entonces, juntando primer y segundo miembros:

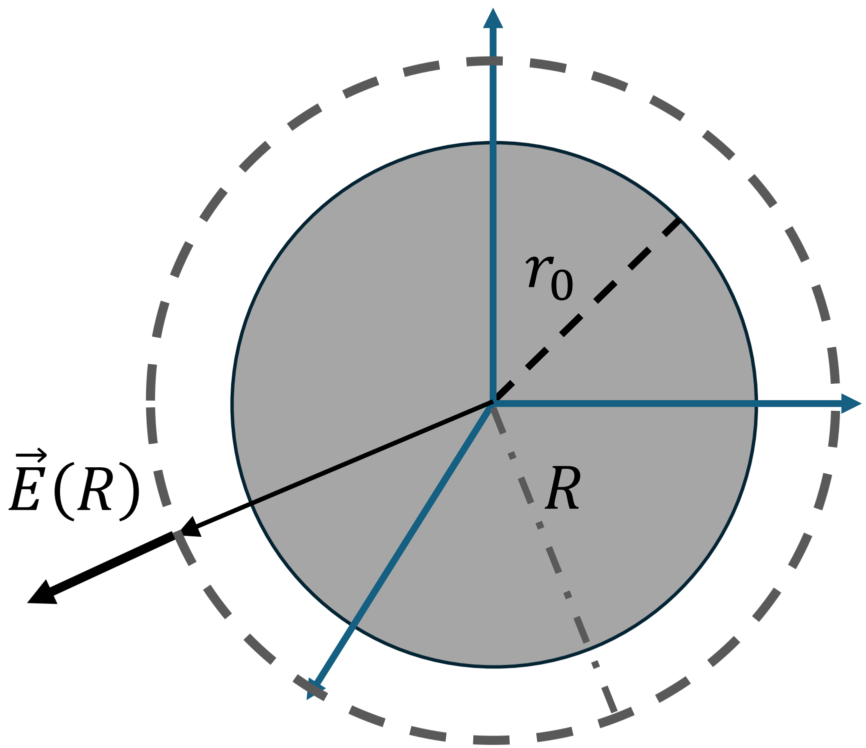
$$E(R)4\pi R^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}R^3$$

- De aquí despejamos $E(R)$

$$E(R)\cancel{4\pi}\cancel{R}^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{\cancel{4}\pi}{3}R^{\cancel{3}}$$

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{R}{3}$$

Campo de una distribución esférica de carga



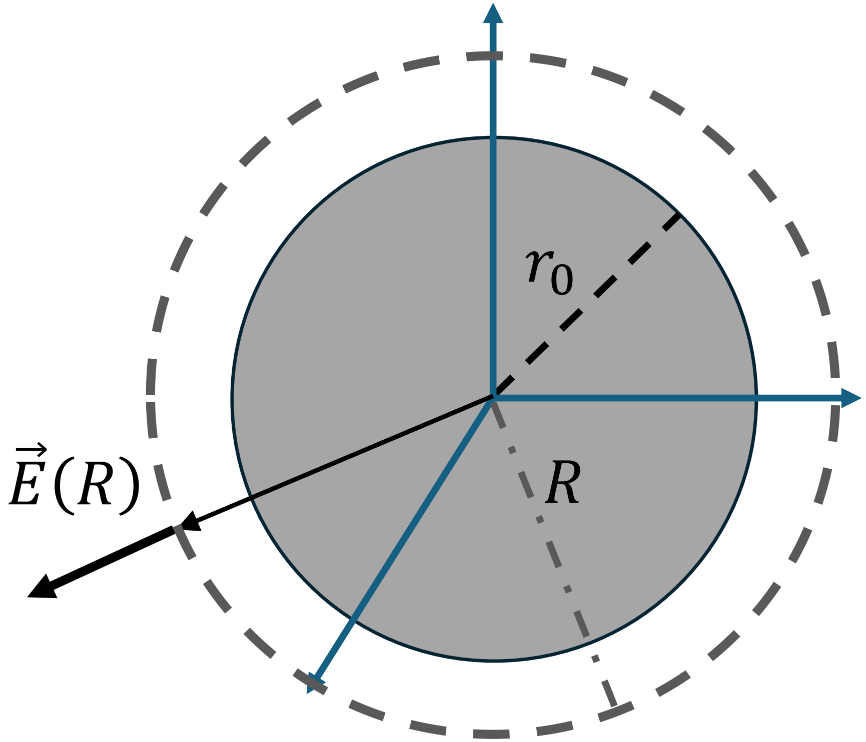
- Entonces, para $0 < r \leq r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3}\hat{r}$$

- Para $r > r_0$ trazamos una esfera una esfera de radio $R > r_0$
- La forma del primer miembro queda igual. Es el módulo del campo por la superficie de la esfera

$$E(R)4\pi R^2$$

Campo de una distribución esférica de carga



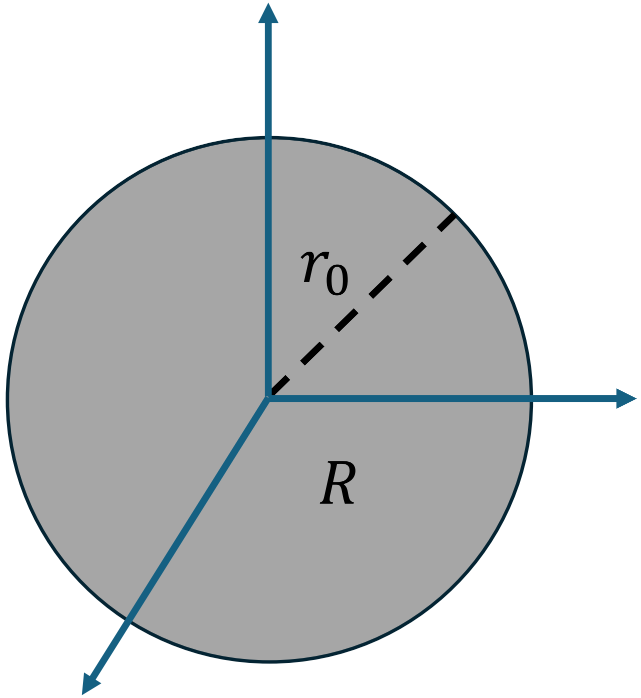
- En el segundo miembro hay que ver que para todo $R > r_0$ la cantidad de carga encerrada permanece igual y es la carga total:

$$\underbrace{\iiint}_{\text{Volumen de carga Encerrado por } S(R)} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}r_0^3$$

- Entonces sobre la esfera de radio $R > r_0$:

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r_0^3}{3R^2}$$

Campo de una distribución esférica de carga



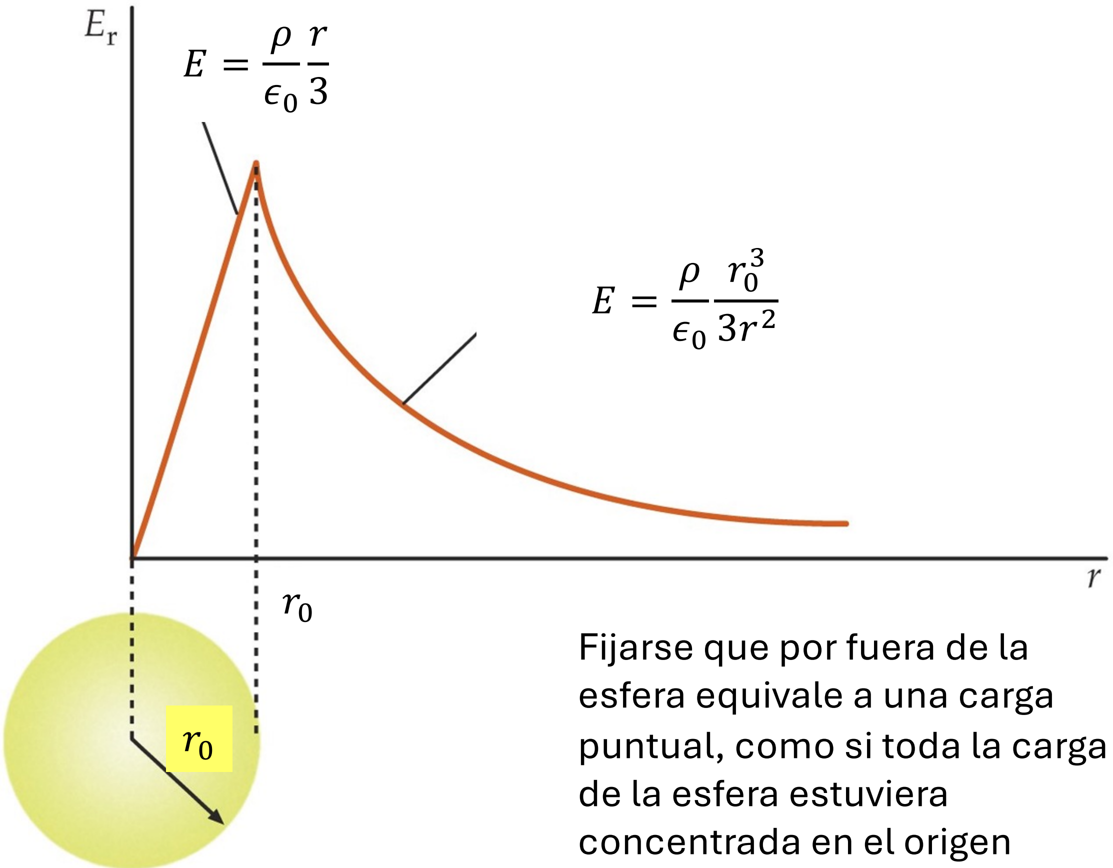
- La solución entonces para $r < r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{3} \hat{r}$$

- Y para $r > r_0$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r_0^3}{3r^2} \hat{r}$$

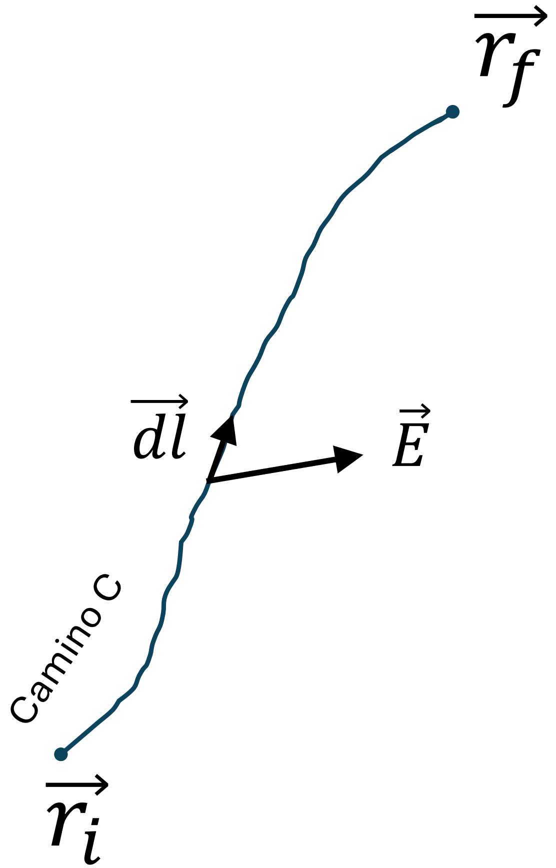
Campo de una distribución esférica de carga



Fijarse que por fuera de la esfera equivale a una carga puntual, como si toda la carga de la esfera estuviera concentrada en el origen

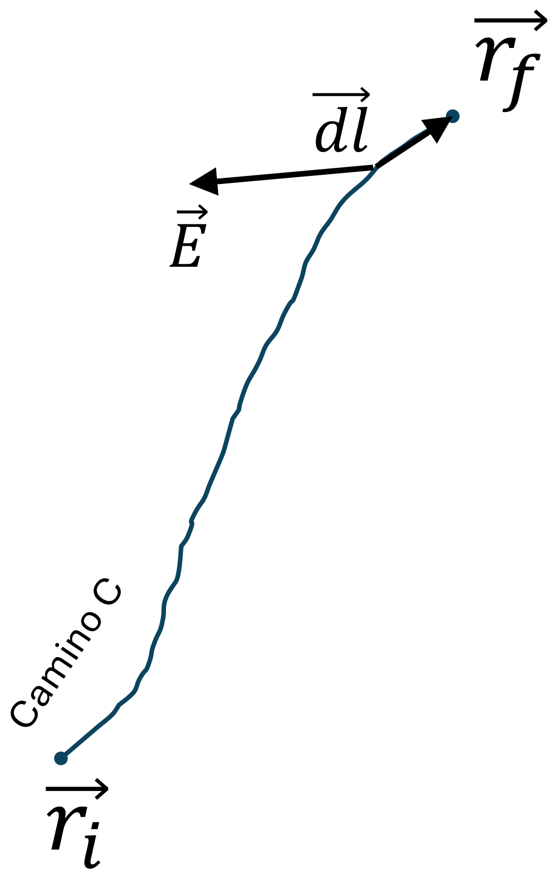
Diferencia de Potencial y función potencial en electrostática

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$.

$$\int_{\overrightarrow{r_i}\,C}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Diferencia de potencial entre dos puntos

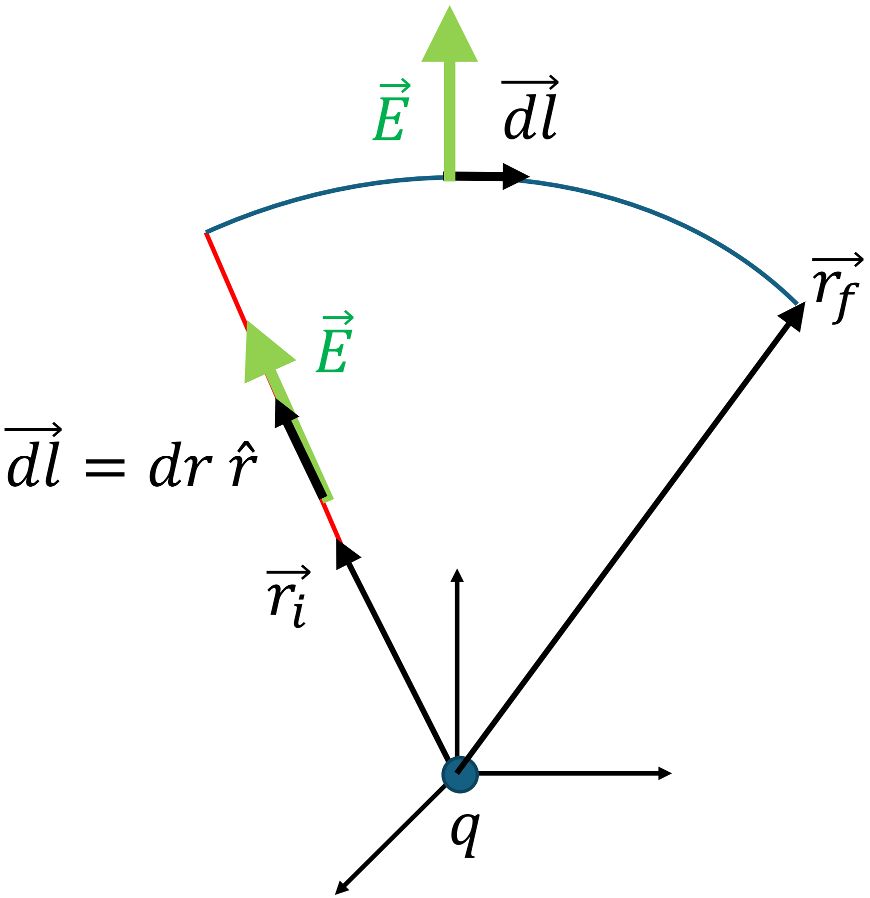
- **Definimos la diferencia de potencial entre** $\overrightarrow{r_i}$ **y** $\overrightarrow{r_f}$ **se define como**:

$$\Delta\varphi = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$
$$C$$

- En campos electrostáticos (conservativos), **esta integral de línea no depende del camino y sólo de las posiciones de** $\overrightarrow{r_i}$ **y** $\overrightarrow{r_f}$ **:**

$$\Delta\varphi = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \varphi\left(\overrightarrow{r_f}\right) - \varphi\left(\overrightarrow{r_i}\right)$$

Ejemplo: carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

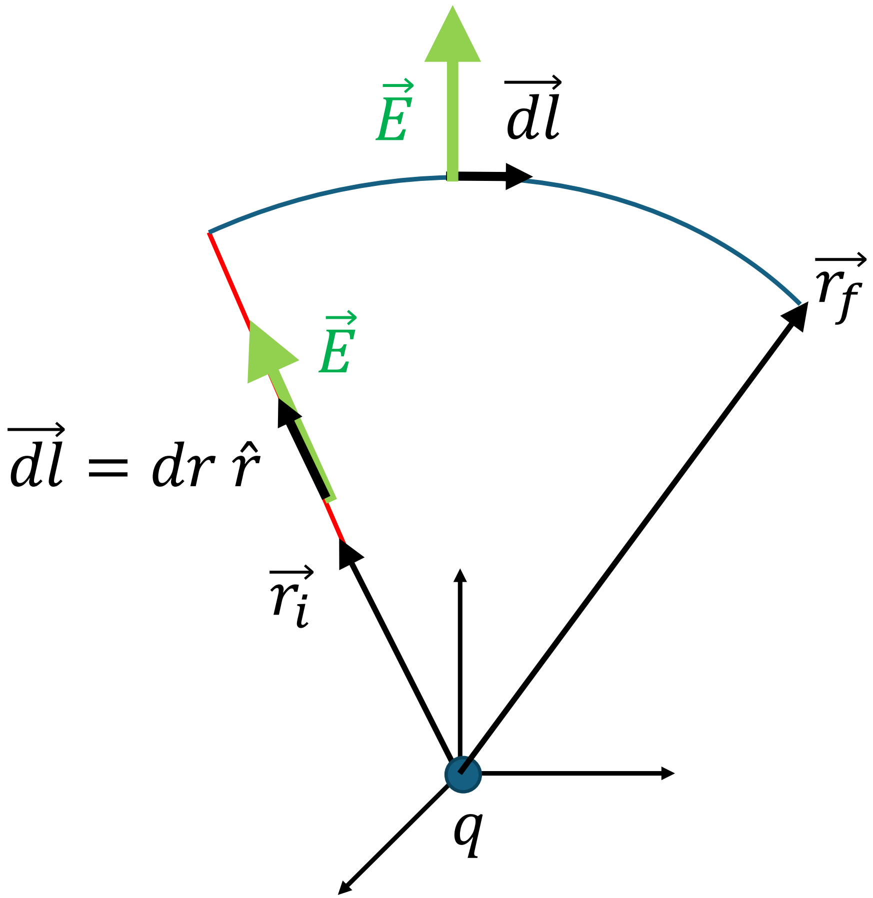
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Como puedo elegir cualquier camino, elijo un camino radial desde r_i a r_f + un arco a r_f constante) la integral entre $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$ da:

$$\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}}_{\text{Camino radial}} + \underbrace{\cancel{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}}}_{\text{Arco}}$$

Son perpendiculares!

Ejemplo: carga puntual



- Entonces, como en el primer término $\vec{E}$ *es paralelo a* $\overrightarrow{dl} = r\hat{r}$:

$$\int_{\vec{r_i}}^{\vec{r_f}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

Ejemplo: carga puntual

- Entonces la diferencia de potencial entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$ es para este caso:

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$$

- Se puede definir una **función potencial** $\phi(r)$ si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en $r_i = \infty$ (muy lejos de la distribución) con lo cual:

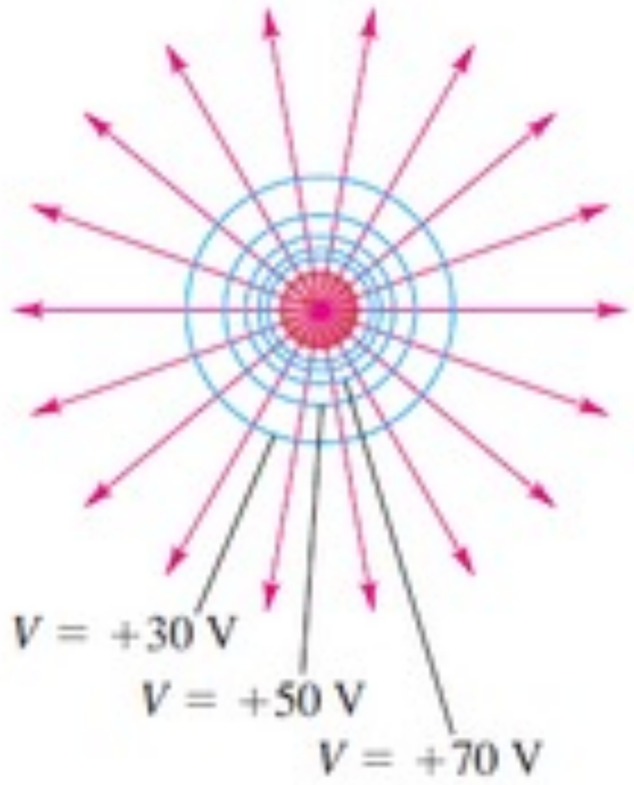
$$\varphi(r) = -\int_{punto\ muy\ lejos}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Superficies equipotenciales

- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial (una vez determinado el potencial de referencia).

- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

(a) A single positive charge



Gradiente del potencial y campo eléctrico

- Dado que la fuerza de Coulomb y el campo electrostático es conservativo, el diferencial de potencial

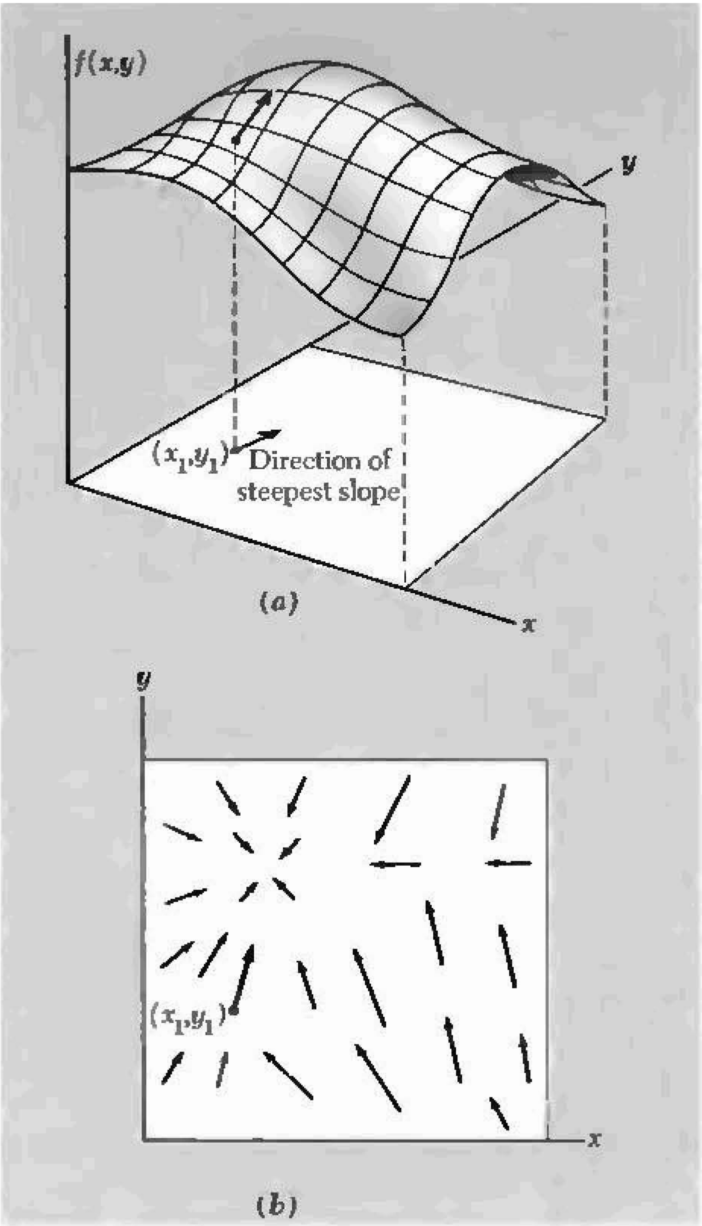
$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- Es exacto

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$



Gradiente del potencial

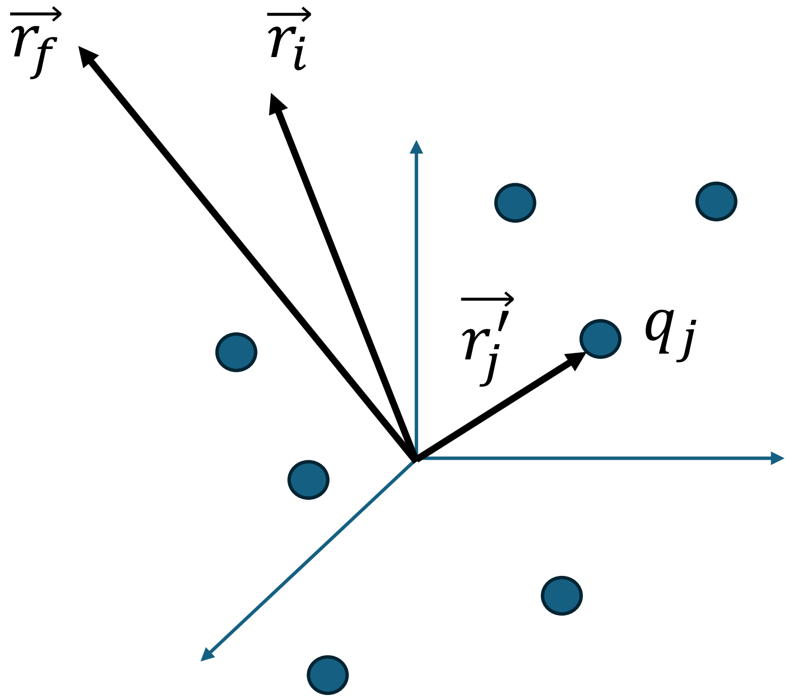
- Dada una función $f(x, y, z)$ derivable, el vector gradiente $\vec{\nabla} f$ nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x, y, z).

- En cartesianas

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Potencial de una distribución (acotada) de cargas

Diferencia de potencial para N cargas puntuales



- Supongamos un sistema de N cargas puntuales $\{q_1 .. q_j .. q_N\}$ en posiciones $\{\overrightarrow{r_i'} .. \overrightarrow{r_j'} .. \overrightarrow{r_N'}\}$ acotadas.
- Evaluemos la diferencia de potencial entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo resultante de los campos generados por las cargas $\{q_1 .. q_j .. q_N\}$ en el punto $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r})$$

Diferencia de potencial para N cargas puntuales

- De manera análoga, para un sistema de N cargas $q_1 \ldots q_N$ y por el principio de superposición.

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N\right) \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$= -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} - \int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl} - \cdots - \int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_N \cdot \overrightarrow{dl}$$

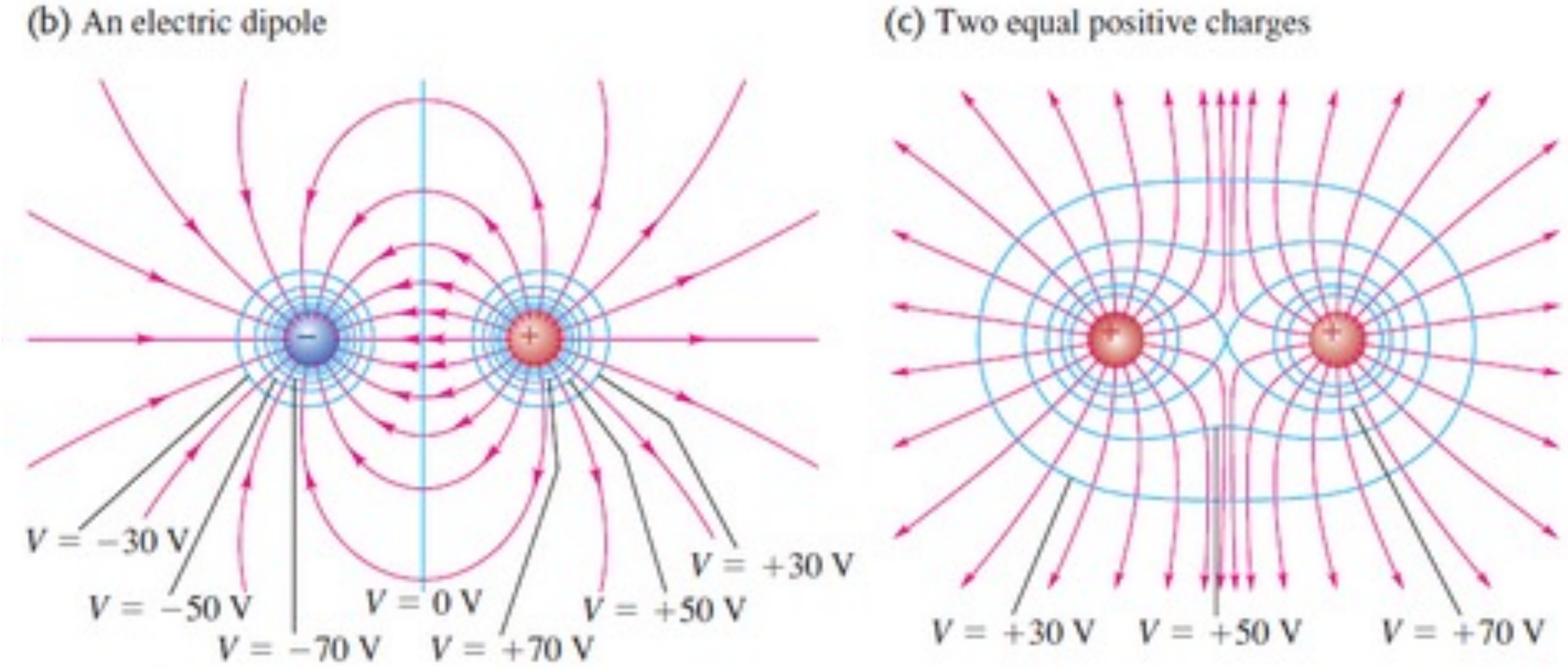
- Centrándonos en cada carga:

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \left[\frac{1}{\left|\overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_j}\right|} - \frac{1}{\left|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}\right|}\right]$$

Función potencial para N cargas puntuales

- Si la distribución es acotada en el espacio se puede poner como punto de potencial cero el infinito (es decir $\lim_{r_i \to \infty} \varphi(\vec{r_i}) = 0$) y entonces, tomando $\vec{r_f} = \vec{r}$, tenemos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{\left|\vec{r} - \vec{r_j}\right|}$$



Electric field lines — Cross sections of equipotential surfaces

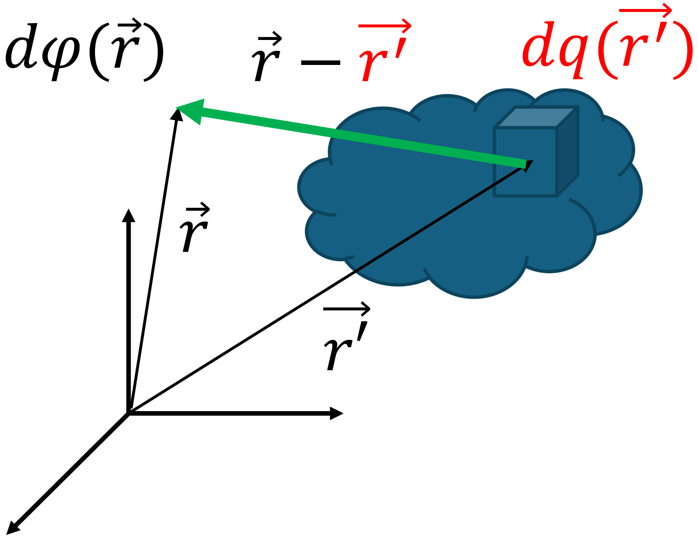
Potencial de una distribución contínua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.

- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.

- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



- La contribución de un pedacito de carga $dq(\overrightarrow{r'}) = \rho(\overrightarrow{r'})dV'$ al potencial en $\vec{r}$ es:

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(\overrightarrow{r'})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dV'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Otras distribuciones:

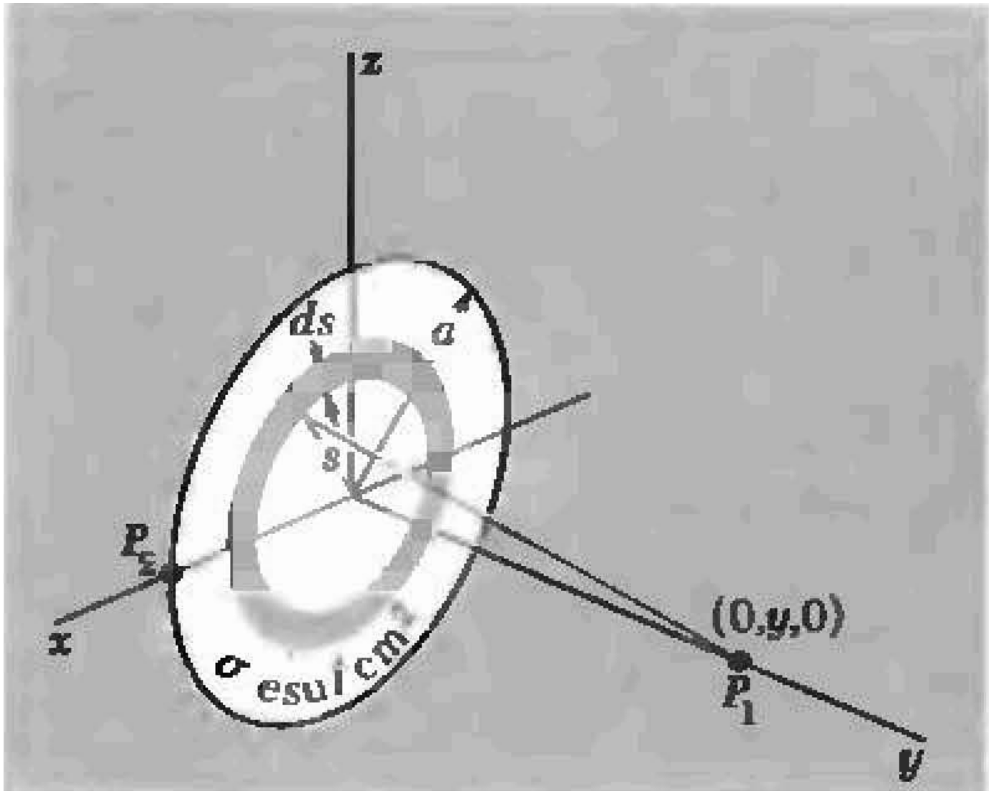
- Distribución lineal: $dq(\overrightarrow{r'}) = \lambda(\overrightarrow{r'})dl'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\overrightarrow{r'})dl'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Distribución superficial: $dq(\overrightarrow{r'}) = \sigma(\overrightarrow{r'})\, da'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\sigma(\overrightarrow{r'})\, da'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio *a*
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante\ (\frac{C}{m^2})$

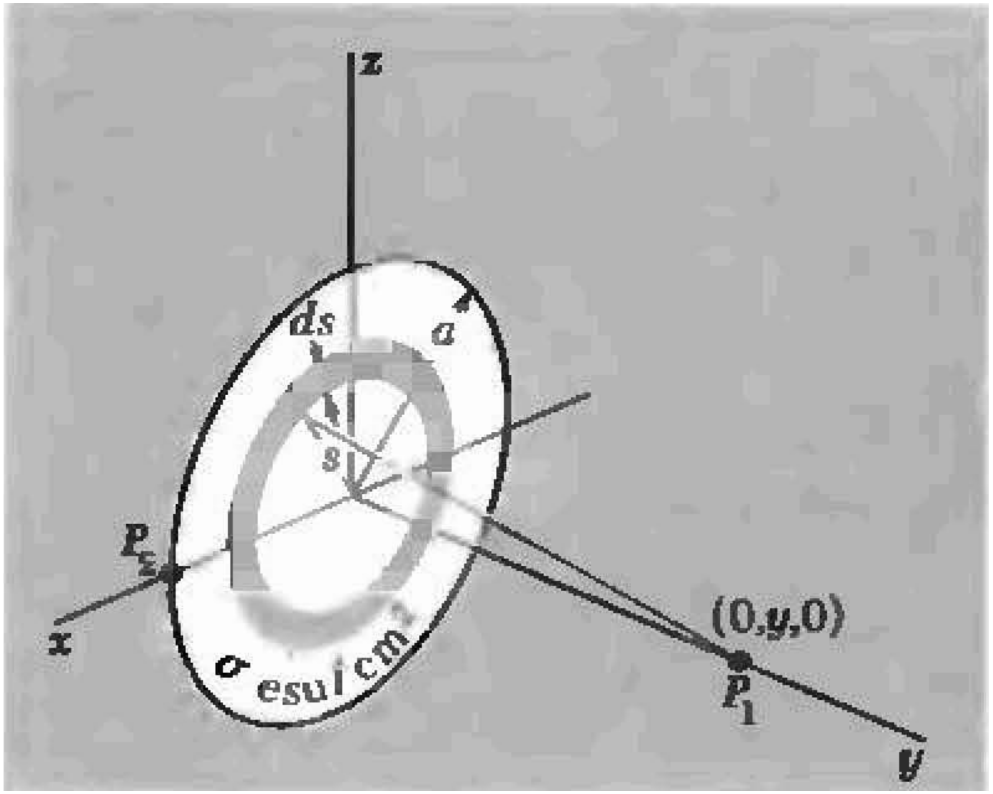
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría *y*.

$$dq = \sigma\ da'$$

$$da' = 2\pi s\ ds$$

(da' área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:

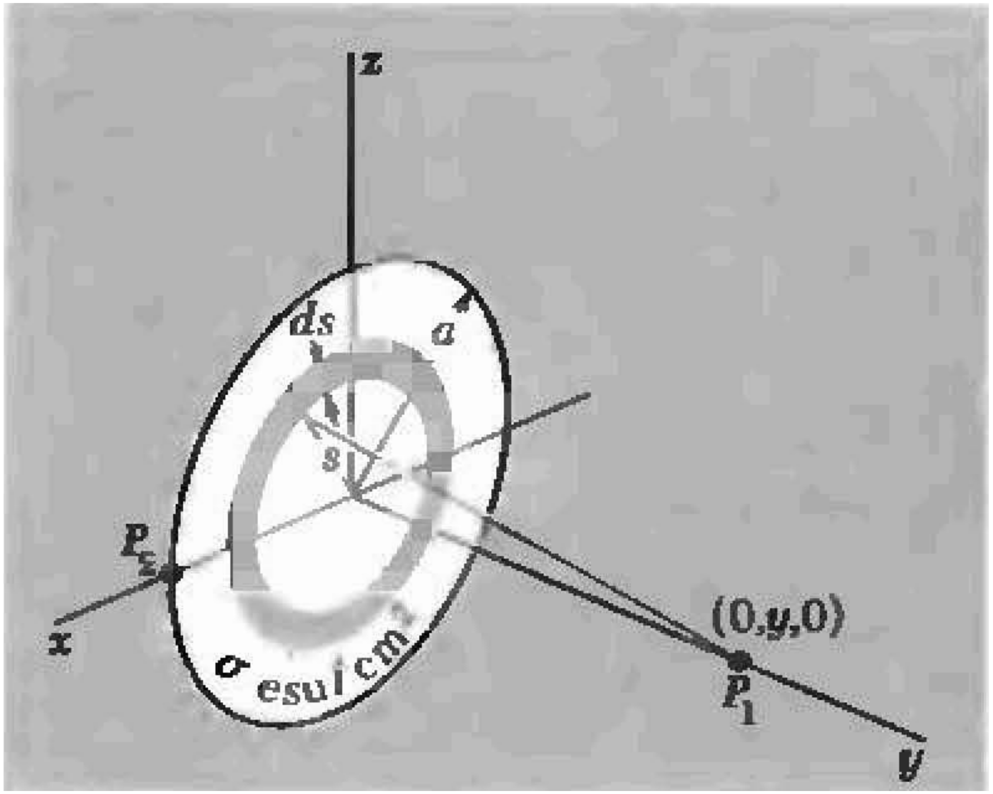
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$

- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma\, 2\pi s\, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\int_0^a \frac{2s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - |y|\right]$$

Simetría respecto a $y = 0$