Diferencia de potencial entre dos puntos

- **Definimos la diferencia de potencial entre $\vec{r_i}$ y $\vec{r_f}$ como:**

$$\Delta\varphi = -\underset{C}{\int_{\vec{r_i}}^{\vec{r_f}}} \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

- En campos electrostáticos (conservativos), **esta integral de línea no depende del camino y sólo de las posiciones de $\vec{r_i}$ y $\vec{r_f}$:**

$$\Delta\varphi = -\int_{\vec{r_i}}^{\vec{r_f}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \varphi(\vec{r_f}) - \varphi(\vec{r_i})$$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- Dado que la fuerza de Coulomb y el campo electrostático es conservativo, el diferencial de potencial

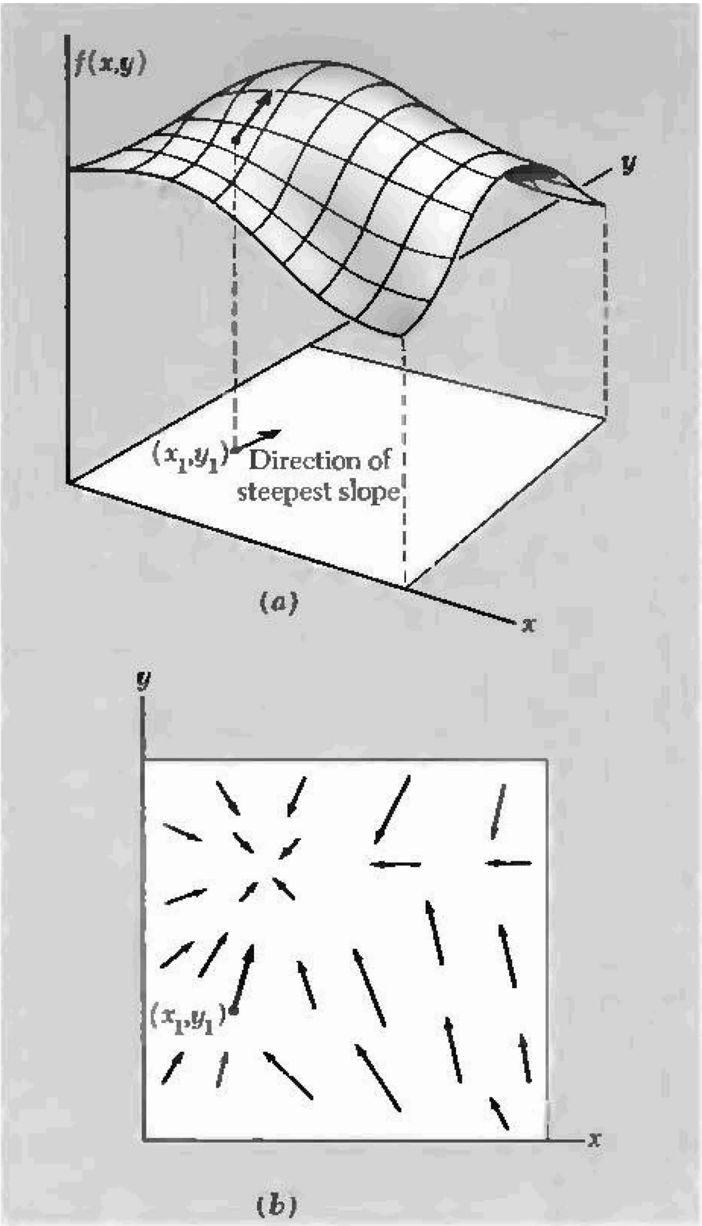
$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- Es exacto

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$



Gradiente del potencial

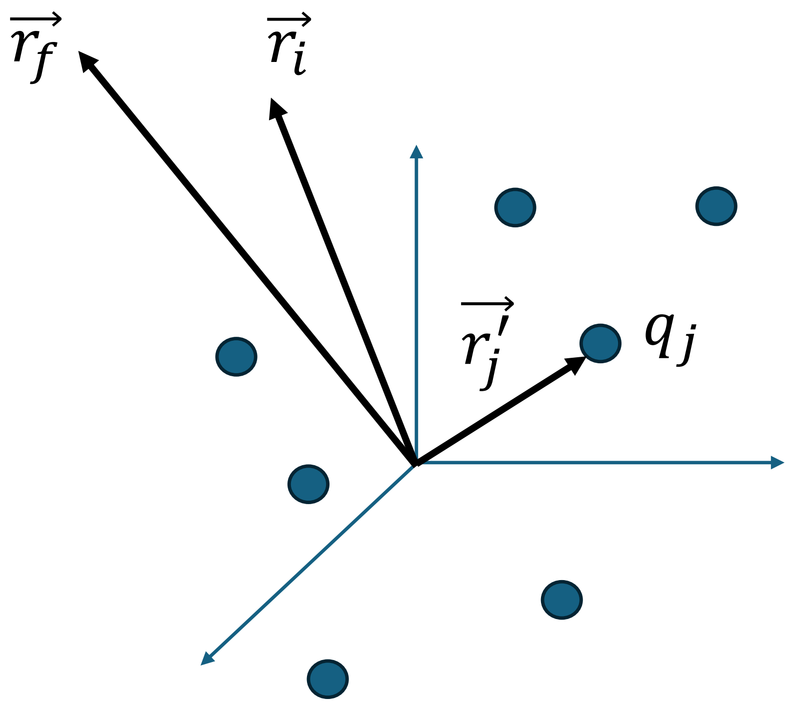
- Dada una función $f(x,y,z)$ derivable, el vector gradiente $\vec{\nabla} f$ nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x,y,z).

- En cartesianas

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Potencial de una distribución (acotada) de cargas

Diferencia de potencial para N cargas puntuales



- Supongamos un sistema de N cargas puntuales $\{q_1 .. q_j .. q_N\}$ en posiciones $\{\overrightarrow{r_i'} .. \overrightarrow{r_j'} .. \overrightarrow{r_N'}\}$ acotadas.
- Evaluemos la diferencia de potencial entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo resultante de los campos generados por las cargas $\{q_1 .. q_j .. q_N\}$ en el punto $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r})$$

Diferencia de potencial para N cargas puntuales

- De manera análoga, para un sistema de N cargas $q_1 \dots qN$ y por el principio de superposición.

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N) \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$= -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} - \int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl} - \cdots - \int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E}_N \cdot \overrightarrow{dl}$$

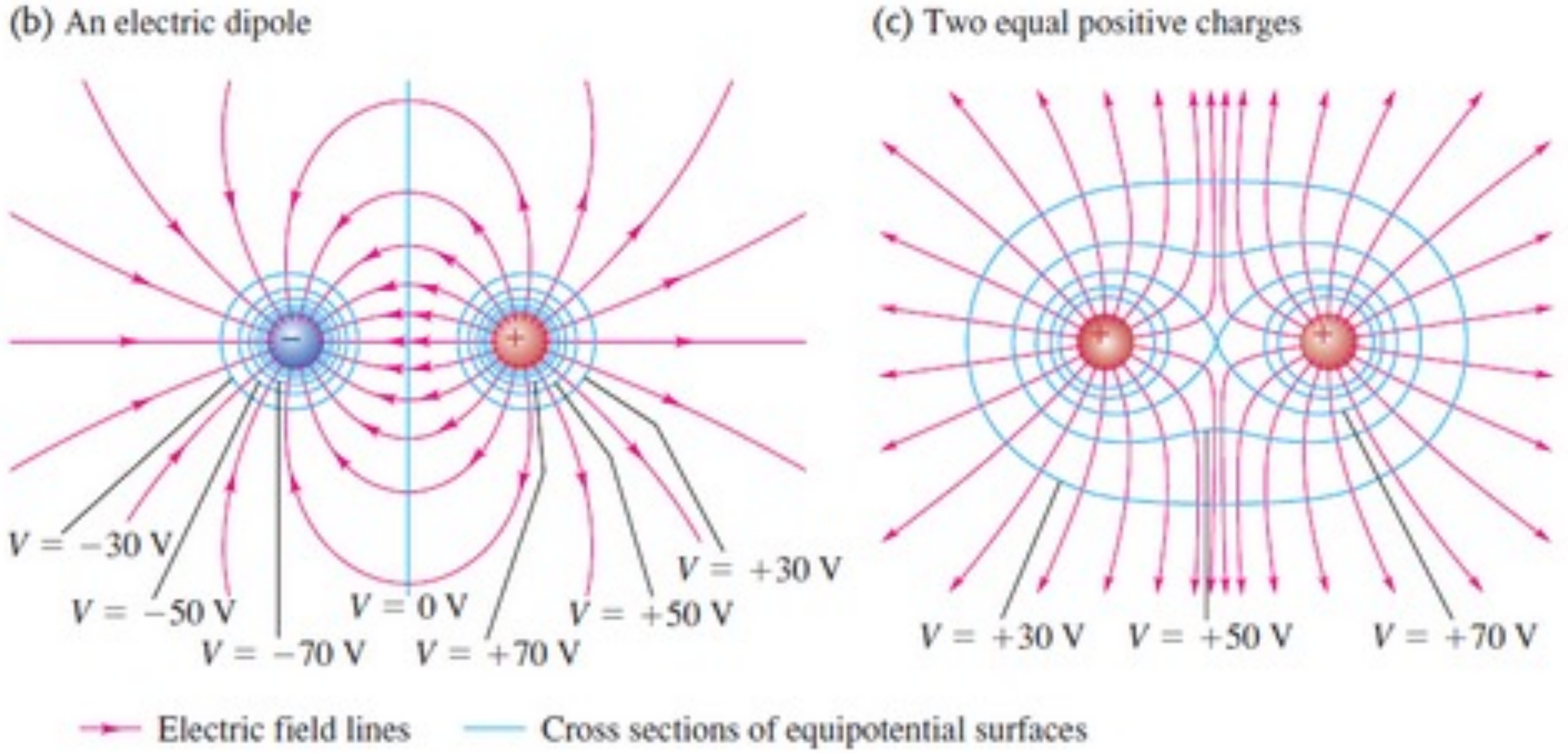
- Centrándonos en cada carga:

$$\varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \left[\frac{1}{\left|\overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_j}\right|} - \frac{1}{\left|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}\right|} \right]$$

Función potencial para N cargas puntuales

- Si la distribución es acotada en el espacio se puede poner como punto de potencial cero el infinito (es decir $\lim_{r_i \to \infty} \varphi(\vec{r_i}) = 0$) y entonces, tomando $\vec{r_f} = \vec{r}$, tenemos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{\left|\vec{r} - \vec{r_j}\right|}$$


(b) An electric dipole
(c) Two equal positive charges
V = −30 V
V = −50 V
V = −70 V
V = 0 V
V = +70 V
V = +50 V
V = +30 V
V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V
Electric field lines
Cross sections of equipotential surfaces

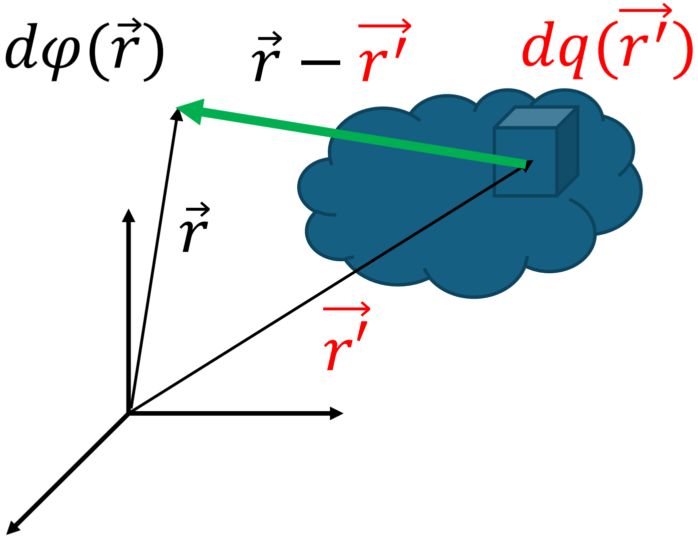
Potencial de una distribución contínua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.

- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.

- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



- La contribución de un pedacito de carga $dq(\overrightarrow{r'}) = \rho(\overrightarrow{r'})dv'$ al potencial en $\vec{r}$ es:

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(\overrightarrow{r'})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dv'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Otras distribuciones:

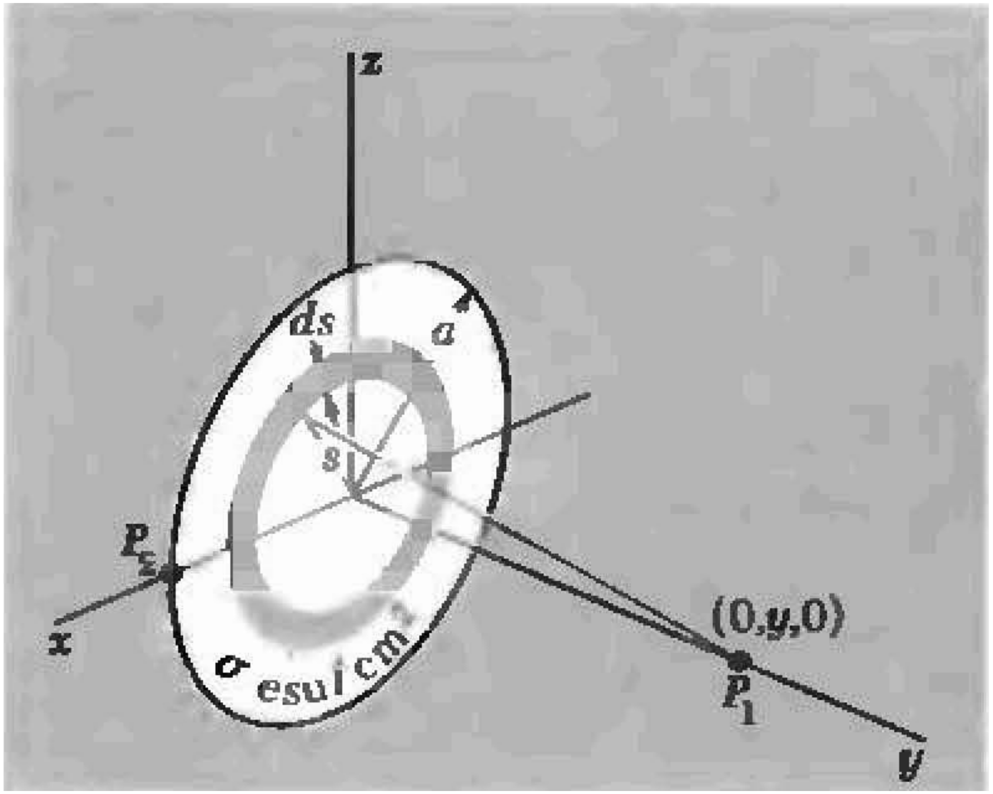
- Distribución lineal: $dq(\overrightarrow{r'}) = \lambda(\overrightarrow{r'})dl'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\overrightarrow{r'})dl'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Distribución superficial: $dq(\overrightarrow{r'}) = \sigma(\overrightarrow{r'})\, da'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\sigma(\overrightarrow{r'})\, da'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio *a*
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante\ (\frac{C}{m^2})$

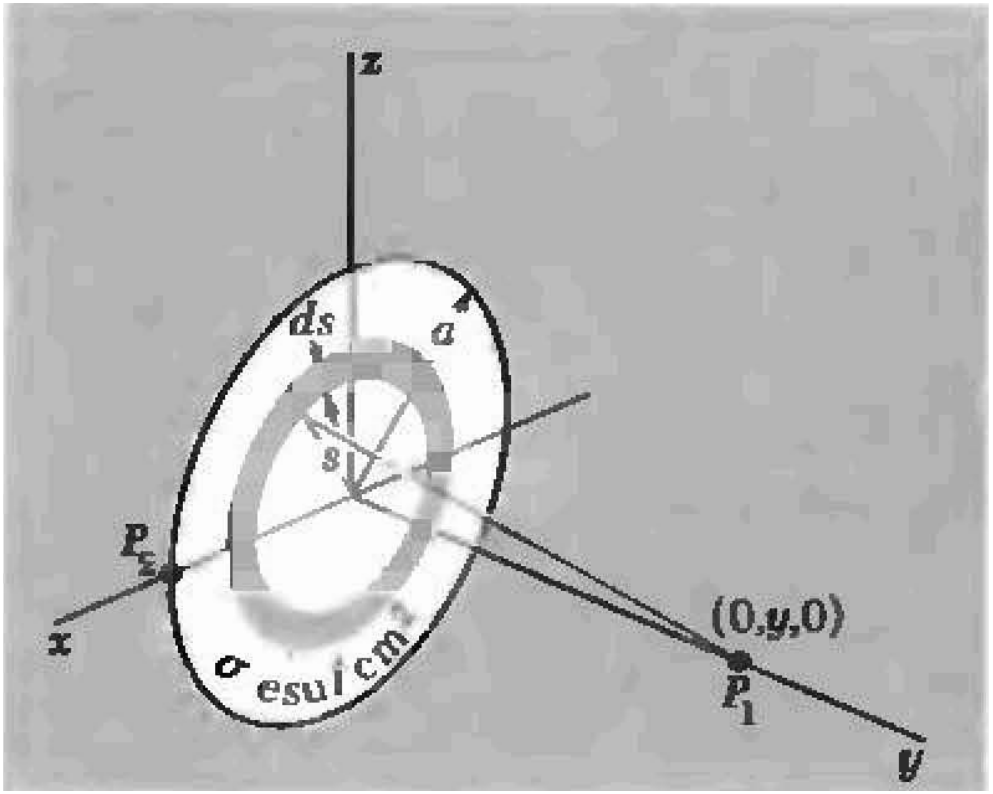
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría *y*.

$$dq = \sigma\, da'$$

$$da' = 2\pi s\, ds$$

(da' área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:

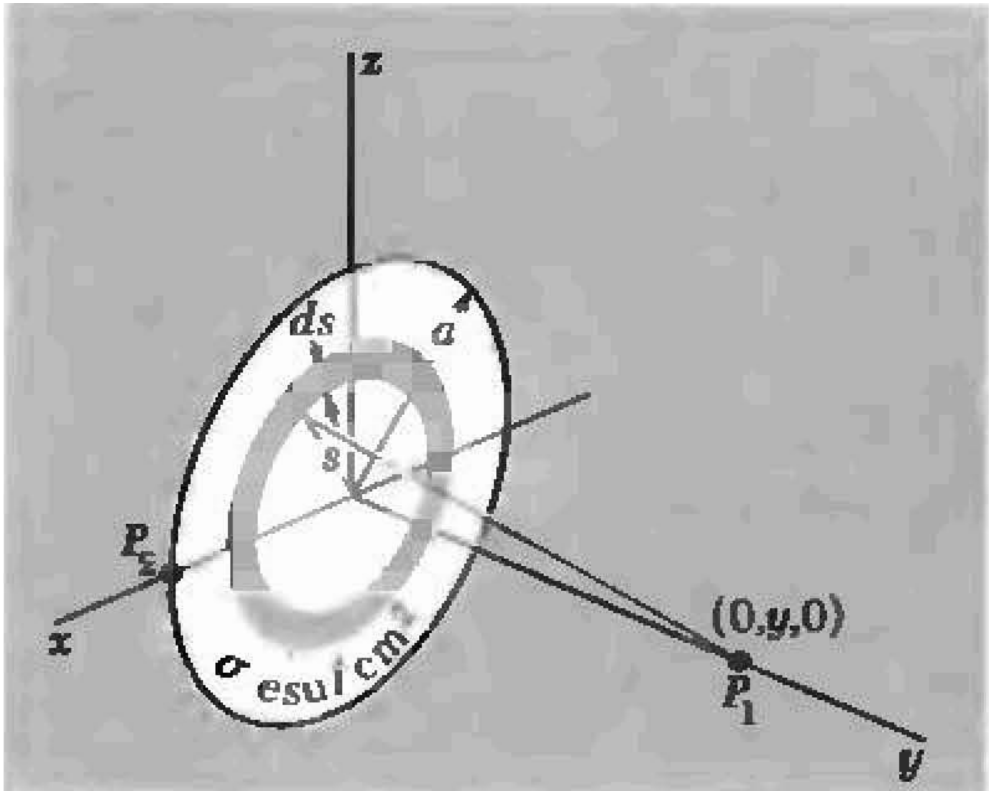
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$

- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma \, 2\pi s \, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\int_0^a \frac{2s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - |y|\right]$$

Simetría respecto a $y = 0$

El potencial lejos de una distribución

- Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y|\right]$$

- Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes. Para |*y*| >> *a* podemos aproximar por serie de Taylor el términ

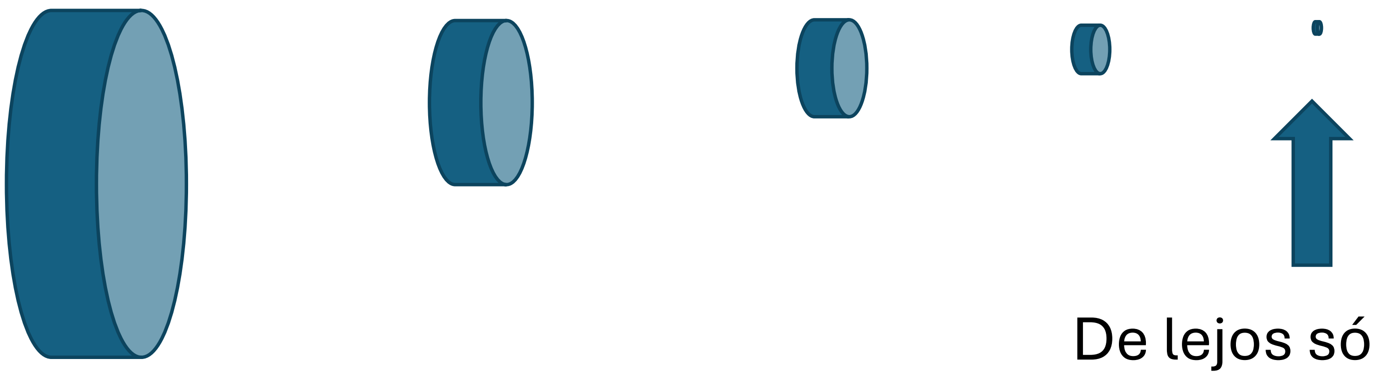
$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y\left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1\right]$$

$$= y\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)\cdots - 1\right] \approx \frac{a^2}{2y}$$

El potencial lejos de una distribución

- Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\varepsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$



$q = \sigma\pi a^2$

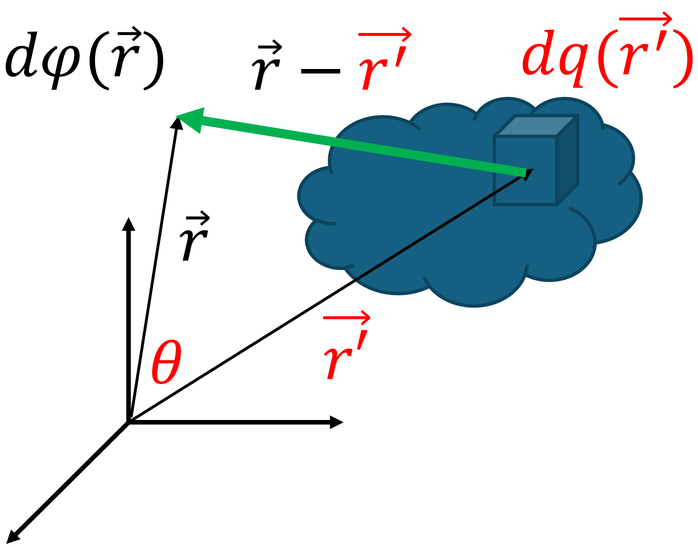
De lejos sólo se ve
una carga puntual

Momentos de una distribución de carga

- Un átomo o molecula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10^{-24} cm.

- ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?

Momentos de una distribución de carga



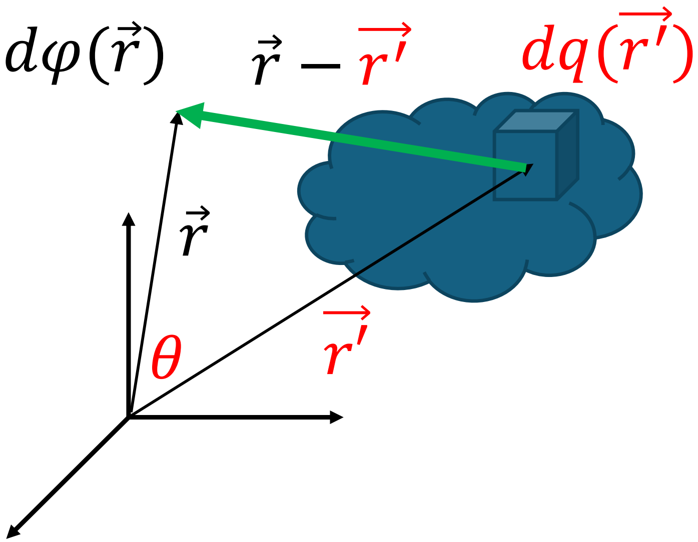
- Supongamos una distribución acotada $\rho\ (\overrightarrow{r'})$ y un punto $\vec{r}$ exterior a la distribución.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dv'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Tomemos la distancia R tal que:

$$R = |\vec{r} - \overrightarrow{r'}|$$

Momentos de una distribución de carga



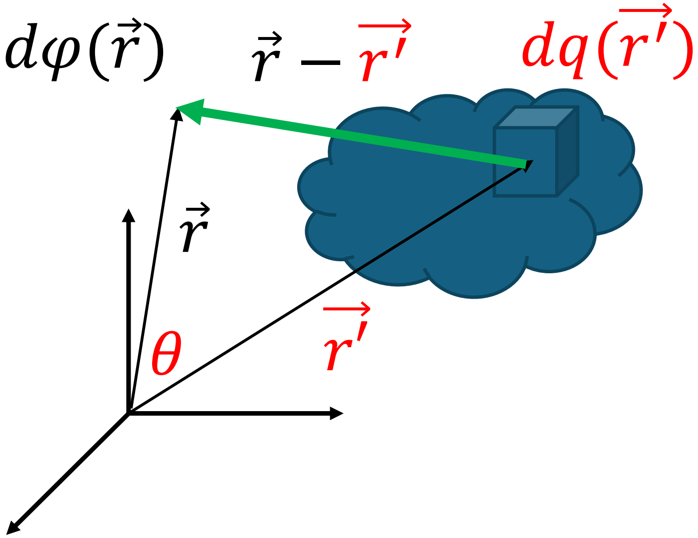
- Reescribiendo tenemos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dv'}{R}$$

- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{1/2}$$

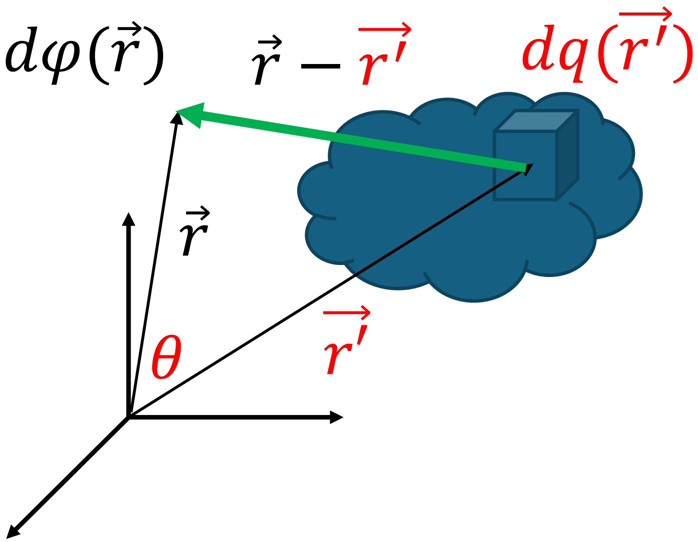
Momentos de una distribución de carga



- La idea es ver qué pasa cuando $r >> r'$. Veamos un poco el factor R^{-1}:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

Momentos de una distribución de carga



- La idea es ver qué pasa cuando $r >> r'$. Veamos un poco el factor R^{-1}:

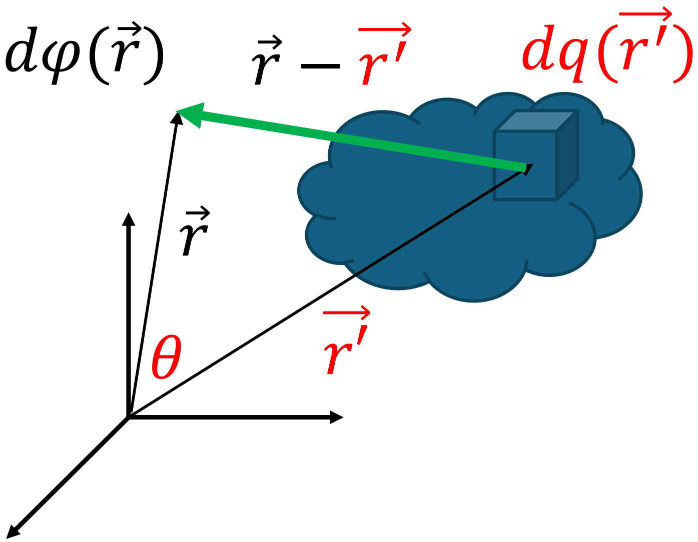
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de R^{-1} para $r'/r << 1$. Tomando el desarrollo

$$(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{3}{8}\delta^2 \ \ldots$$

para $\delta \ll 1$

Momentos de una distribución de carga



- Tomando esta expansión el factor R^{-1} queda:

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \left(\begin{matrix}\text{términos de}\\ \text{grado superior}\end{matrix}\right)\right]$$

más grande >>>>>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r'\cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi(\vec{r})$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de 1/r)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0, K_1, K_2, etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- ¿Hace falta calcular todos los K_i?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **primer término no nulo** de la serie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho(\overrightarrow{r'})\, dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros).

- Si $K_0 = 0$, calcularemos

$$K_1 = \int r' \cos\theta\, \rho(\overrightarrow{r'}) dv'$$

Momento dipolar

Los coeficientes K_0 y K_1

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$$

- Entonces:

$$\hat{r} \cdot \vec{p} = \hat{r} \cdot \int \overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv' = \int \hat{r} \cdot \overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv' =$$
$$\int r' \cos\theta\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv' = K_1$$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

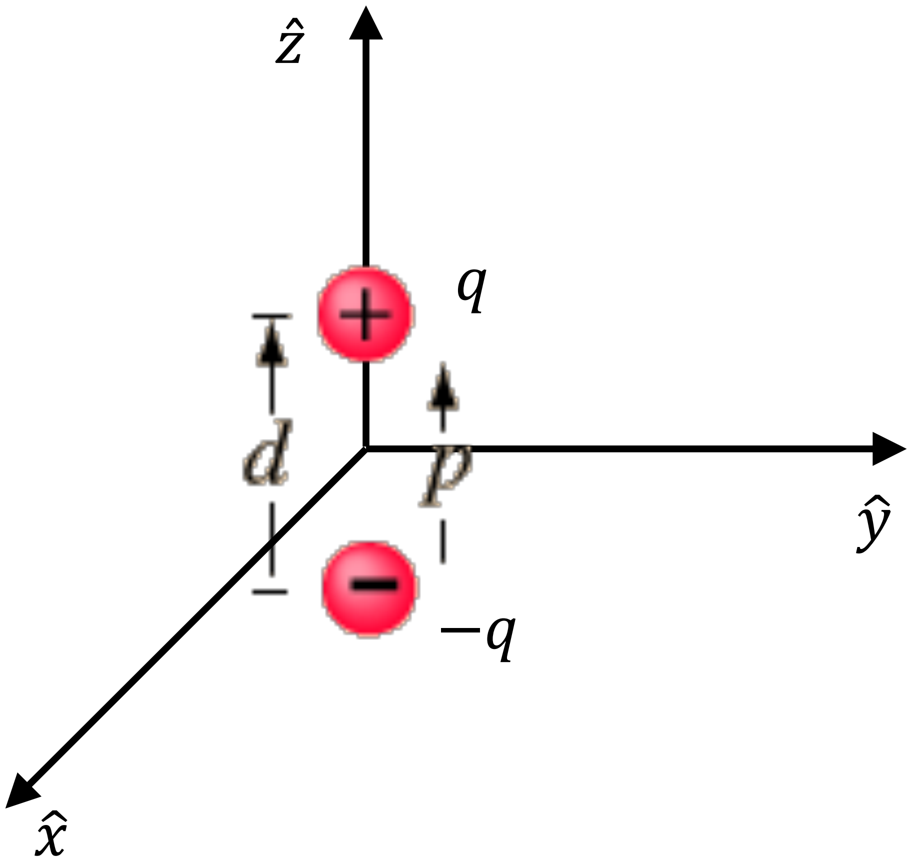
Los coeficientes K_0 y K_1

- Resumiendo, para un punto en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)$, el potencial viene dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots.$$

- Donde $Q = K_0 = \int \rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$ y $\vec{p} = \int \overrightarrow{r'}\, \rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$

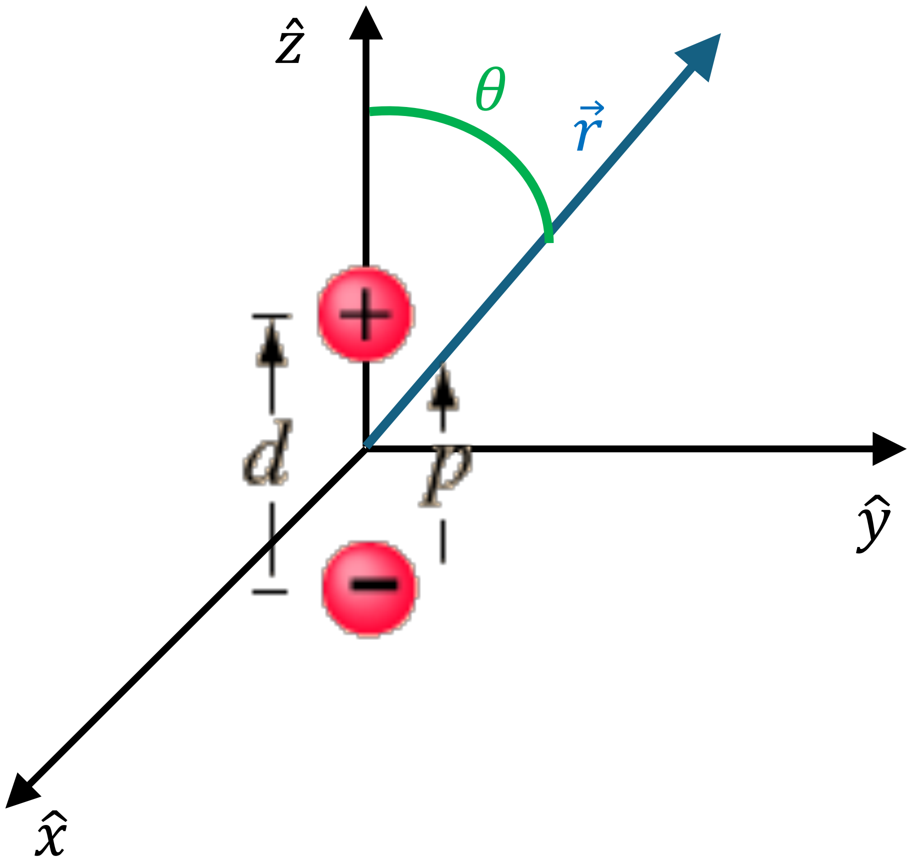
Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Dos cargas puntuales $\pm q$ en $\mathrm{z} = \mp\frac{d}{2}$
- $K_0 = 0$
- Veamos K_1. Para cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r'}_i \, q_i$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Centro del SC equidistante de las cargas:

$$\vec{p} = \frac{d}{2} q\hat{z} + \left(-\frac{d}{2}\right)(-q)\hat{z} = qd\ \hat{z}$$

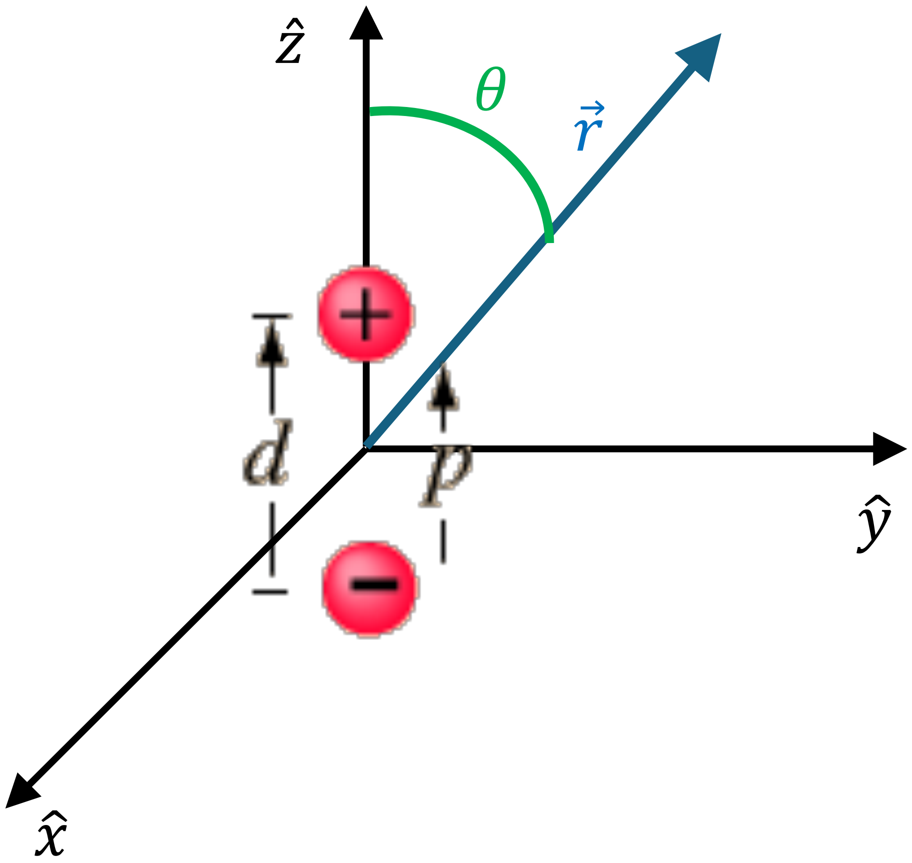
- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = qd \cos\theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



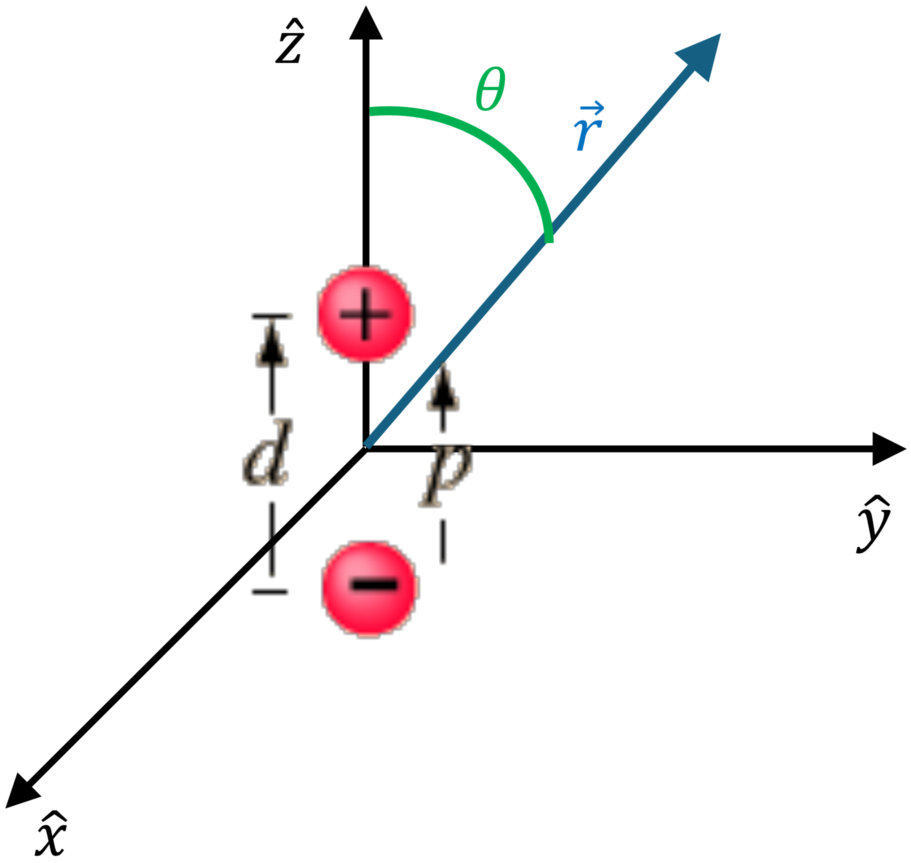
- Calculemos el campo $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

- Tanto el potencial como el campo son simétricos alrededor del eje $\hat{z}$.

- Podemos calcular el potencial en cartesianas en algún plano que contenga al eje z. Por ejemplo el plano xz

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- En el plano xz, tenemos

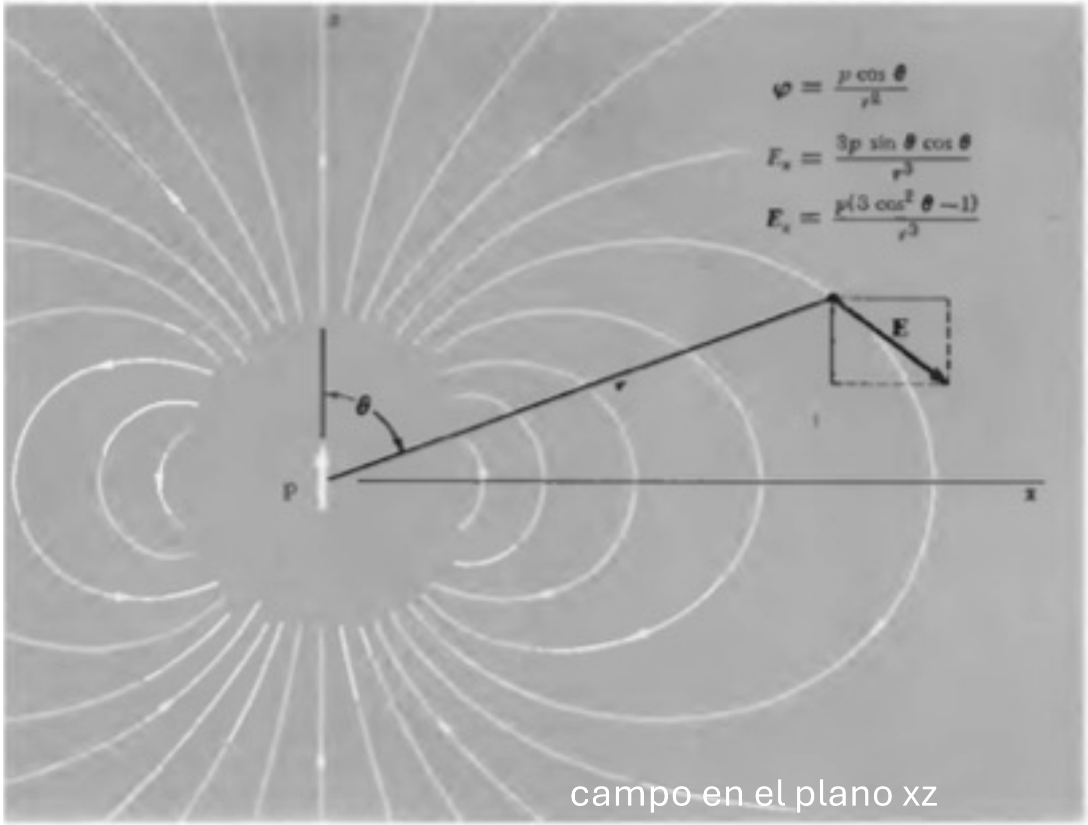
$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

- Entonces, en el plano xz el potencial en cartesianas se escribe:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



campo en el plano xz

- Calculemos el campo en el plano xz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\hat{z}\right]$$

- Sabiendo además que:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

- En el plano xz, $E_y = 0$ y entonces:

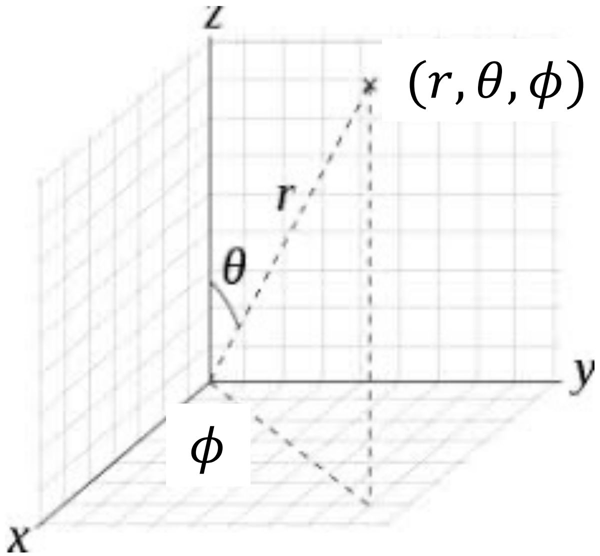
Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3p \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



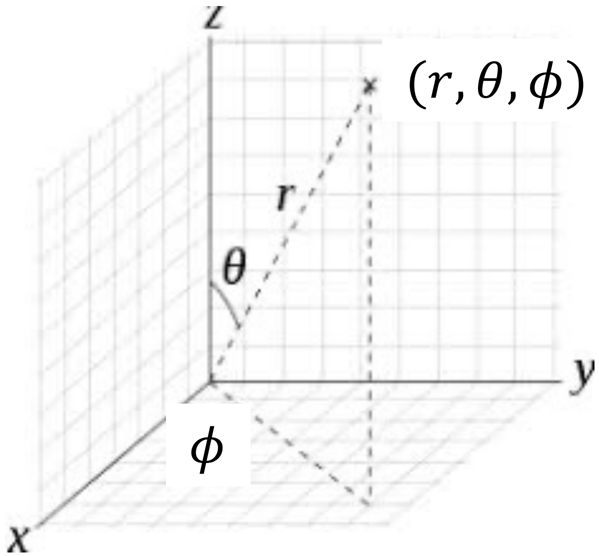
- También podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.

- Esta vez la solución vale para todo el espacio

- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\ \hat{\theta}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

- El campo en esféricas es:

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}\,\hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\,\hat{\theta}$$

- Poloidal y decae como r^{-3}