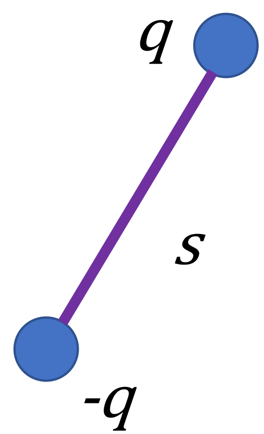
Torque sobre un dipolo en un campo externo

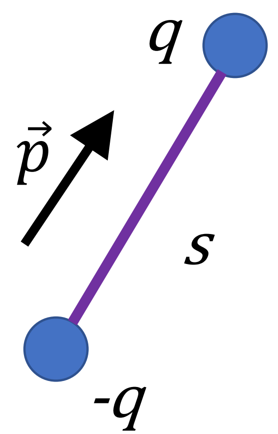
- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.



Torque sobre un dipolo en un campo externo

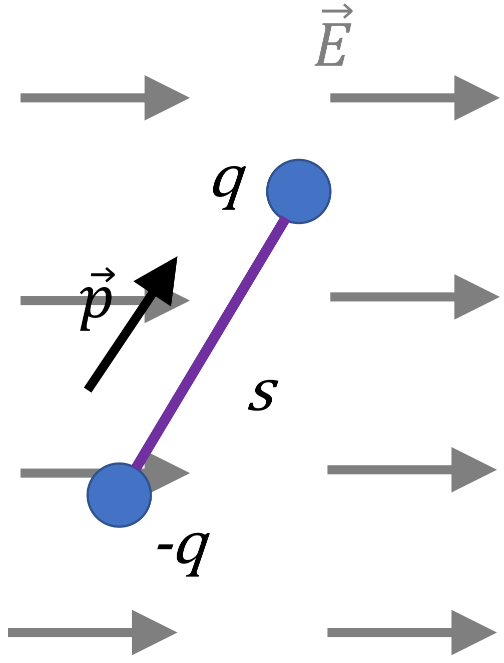
- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.

- El momento dipolar es simplemente $\vec{p} = qs\,\hat{p}$.



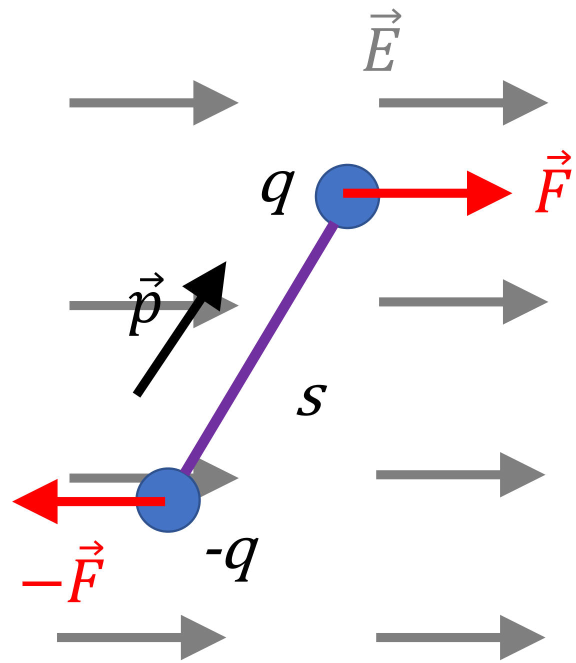
Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.
- El momento dipolar es simplemente $\vec{p} = qs\,\hat{p}$.
- Nos interesa saber qué pasa cuando el dipolo se encuentra en un campo unifome $\vec{E}$ (no nos interesa el campo del dipolo).



Torque sobre un dipolo en un campo externo

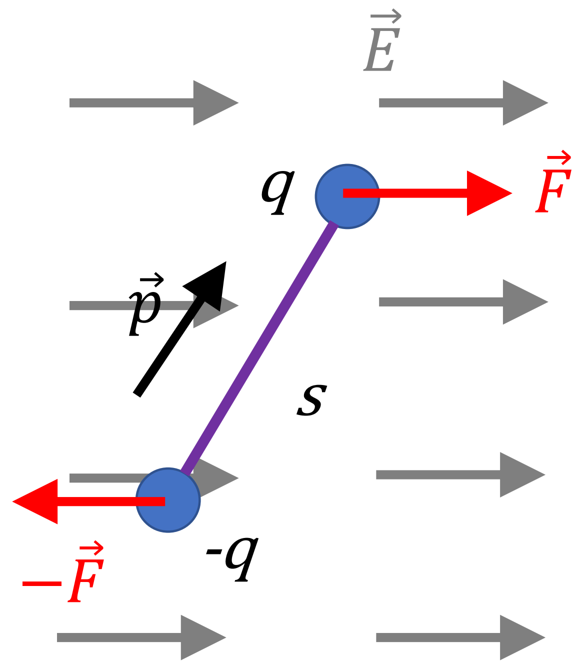
- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$

- La fuerza resultante será nula, con lo cual el dipolo entero no se va a acelerar.

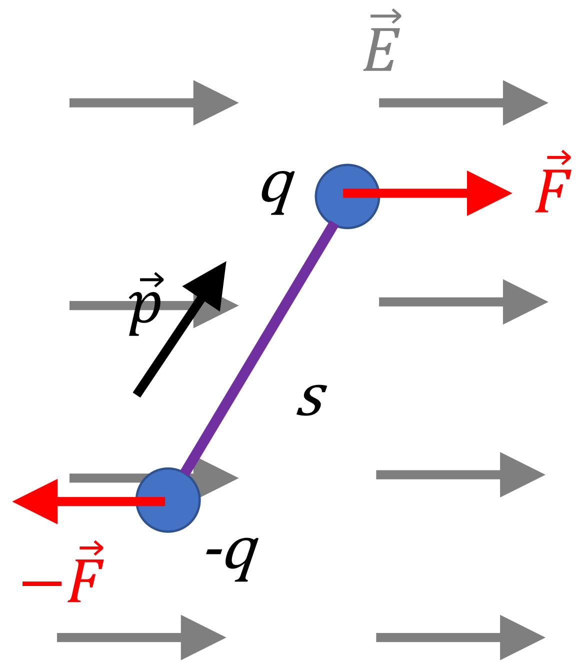


Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$

- La fuerza resultante será nula, con lo cual el dipolo entero no se va a acelerar.

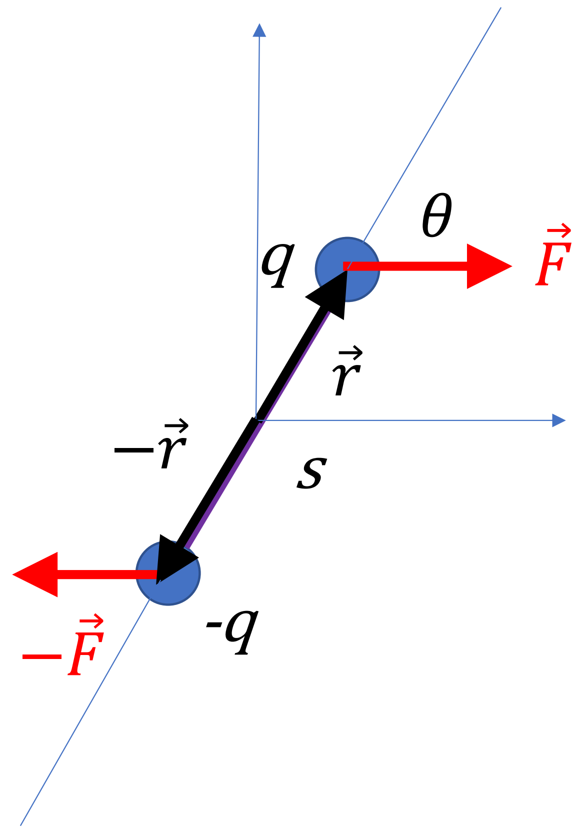
- Sin embargo, si el dipolo no está alineado con el campo habrá un torque



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- El torque es

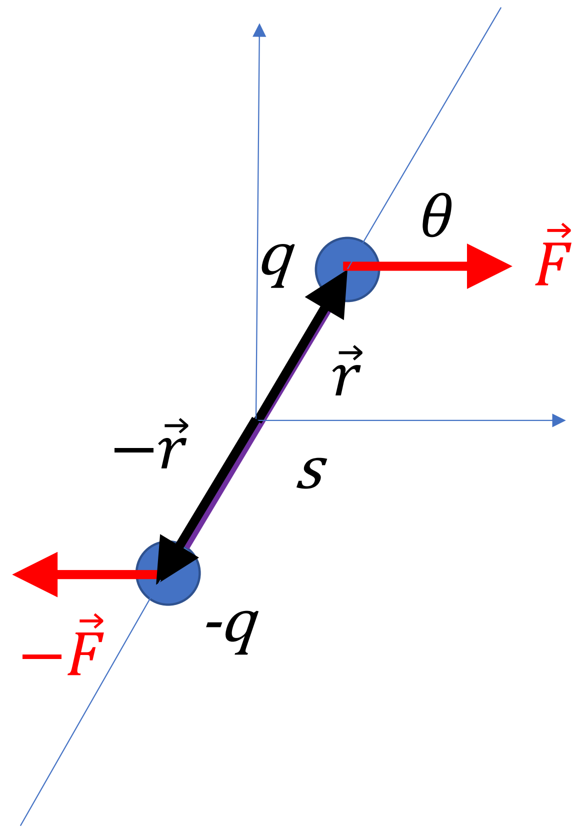
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- El torque es
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$

- Como $|\vec{r}| = \frac{s}{2}$, $\vec{N}$ apunta hacia adentro de la pantalla y tiene módulo $\left|\vec{N}\right| = sqE\,|\sin\theta\,|$.



Torque sobre un dipolo en un campo externo

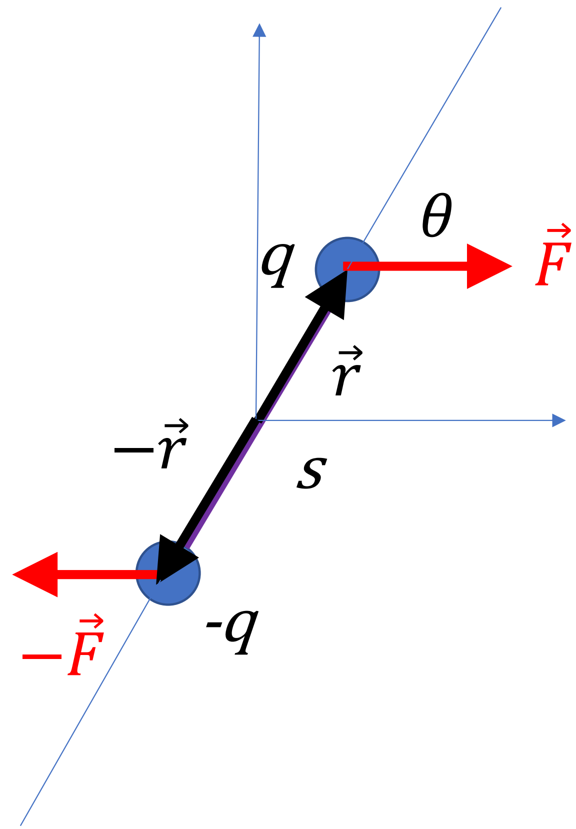
- El torque es

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$

- Como $|\vec{r}| = \frac{s}{2}$, $\vec{N}$ apunta hacia afuera de la pantalla y tiene módulo $\left|\vec{N}\right| = sqE\,|\sin\theta\,|$.

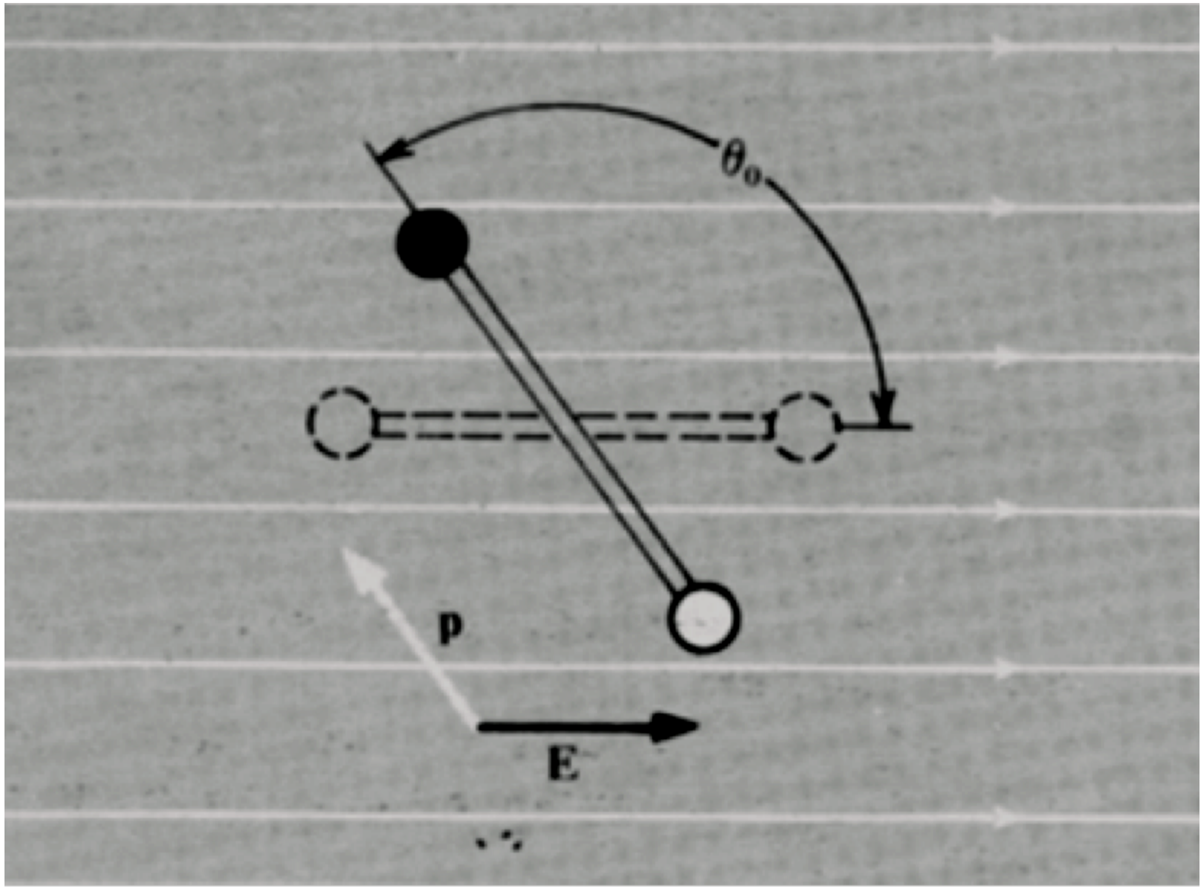
- Pero eso simplemente es

$$\vec{N} = \vec{p}\times\vec{E}$$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

Esto quiere decir que un dipolo en medio de un campo eléctrico uniforme va a tender a alinearse con él a fin de adoptar la configuración de mínima energía



Conductores en campos electrostáticos

Tipos de materiales eléctricos

- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (en sólidos, electrones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente como respuesta a los campos eléctricos

- Semiconductores: movilidad de portadores de carga limitada a ciertas condiciones.

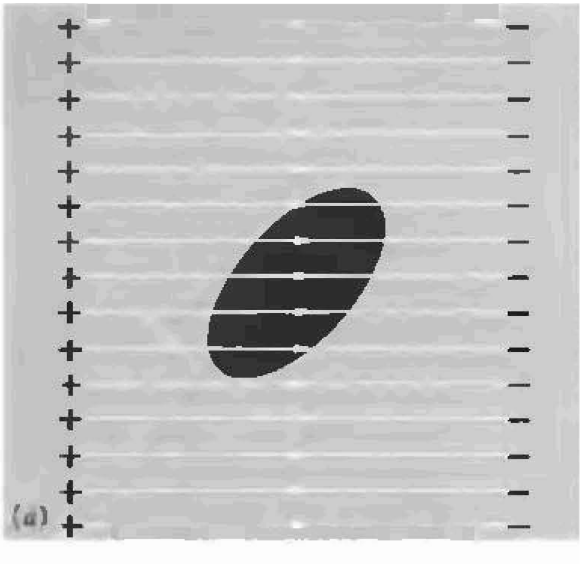
- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

Conductores en electrostática

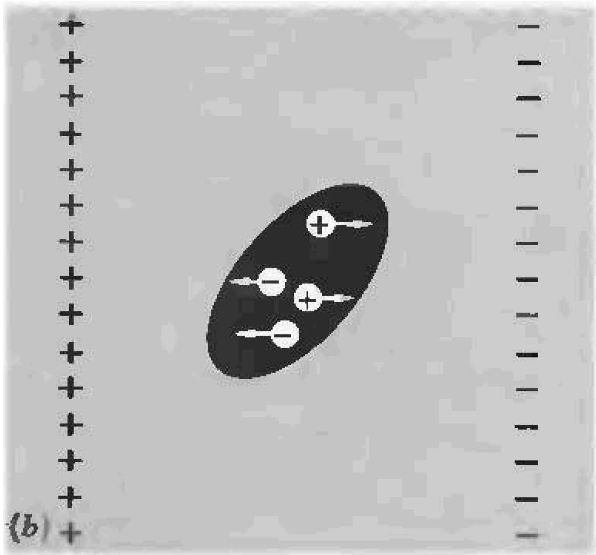
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo uniforme

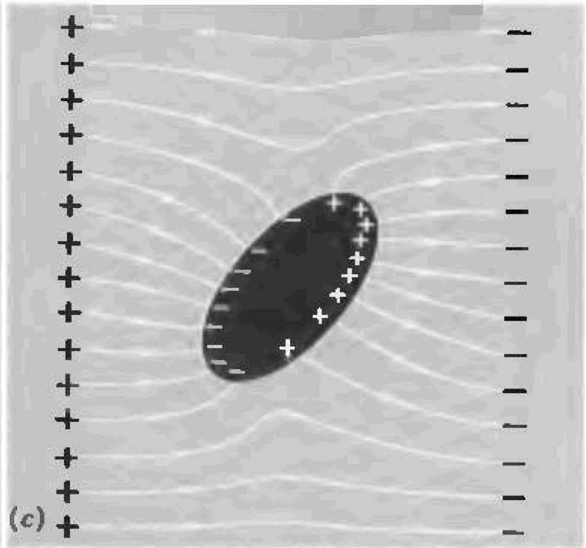
Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior



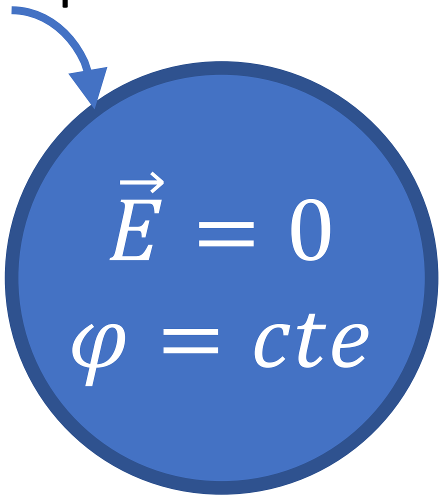
Transitorio



Estacionario

Propiedades de los conductores en estado estacionario

Cargas en la superficie

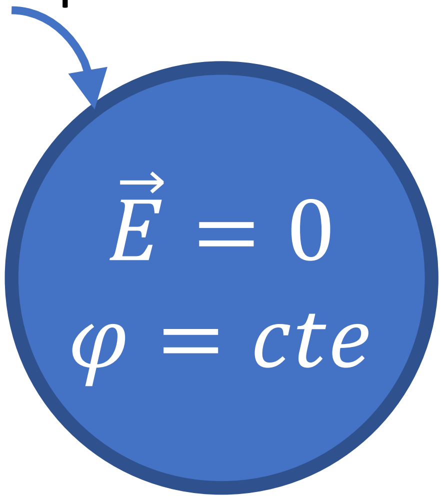


- En el interior de los conductores en estado estacionario, el campo eléctrico es nulo.

- El exceso de carga se ubica en el borde físico del conductor.

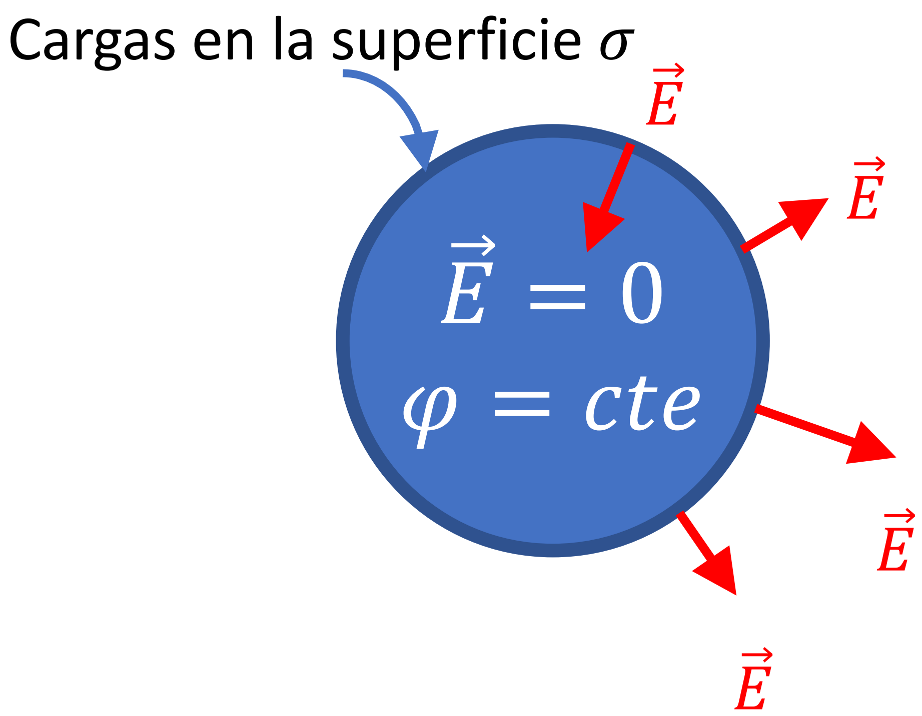
Propiedades de los conductores en estado estacionario

Cargas en la superficie σ



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.

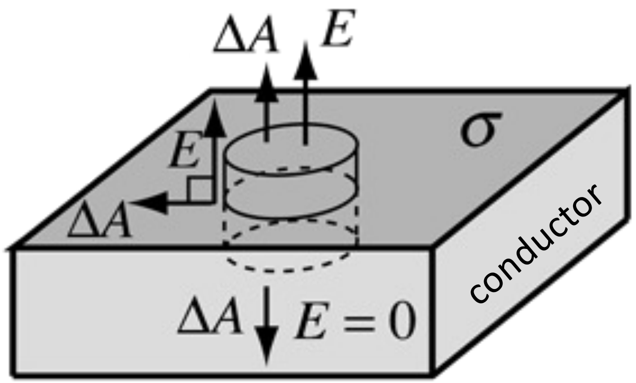
Propiedades de los conductores en estado estacionario



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie**.

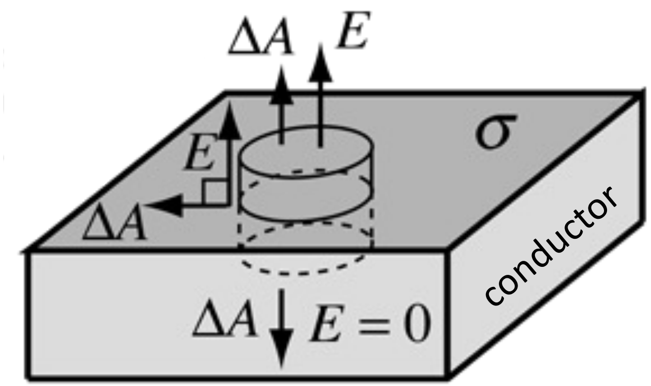
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella**.

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m^2)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\oiint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{carga\ encerrada}{\epsilon_0}$$

$$E\ \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Conductores (estado estacionario)

- Campo eléctrico:
  - Nulo en su interior
  - En la superficie, es normal a ella.
  - La intensidad depende de la densidad superficial de carga local
- Superficie es equipotencial
- Carga se ubica sobre superficie

Campo eléctrico en conductores

- De los puntos anteriores se deduce que la carga total Q sobre la superficie de un conductor S se puede escribir como:

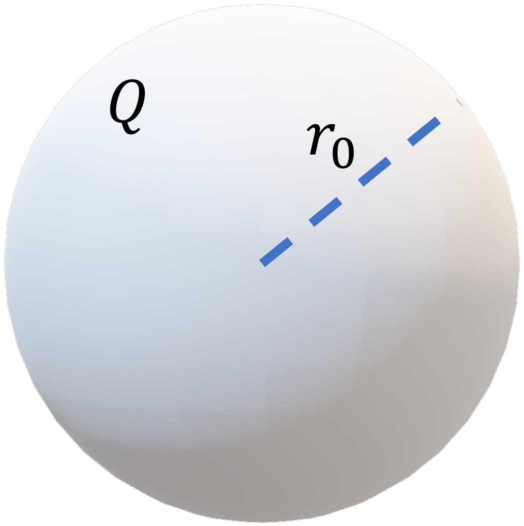
$$Q = \int \sigma \, da = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{da}$$

¡ Importante !

$\vec{E}$ es el campo debido a todas las cargas,

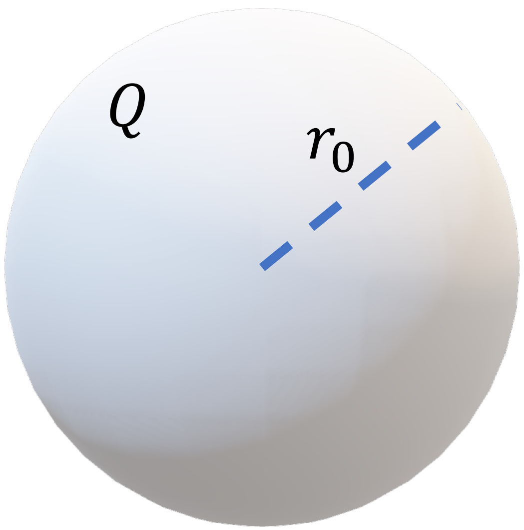
las de la superficie, más las lejanas. Es σ la que se acomoda para que la relación de arriba se cumpla

Esfera conductora cargada



- Supongamos una esfera maciza conductora de radio r_0.
- Sobre ella se ubica una carga Q conocida.
- Hallar el campo y el potencial en todo el espacio
- ¿Cómo se distribuye la carga en su superficie?

Esfera conductora cargada



- Al exterior de la esfera $r > r_0$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2};\ \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- En el interior de la esfera $r < r_0$:

$$\vec{E}(r) = 0;\ \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

- En su superficie;

$$\vec{E}(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r_0^2};\varphi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

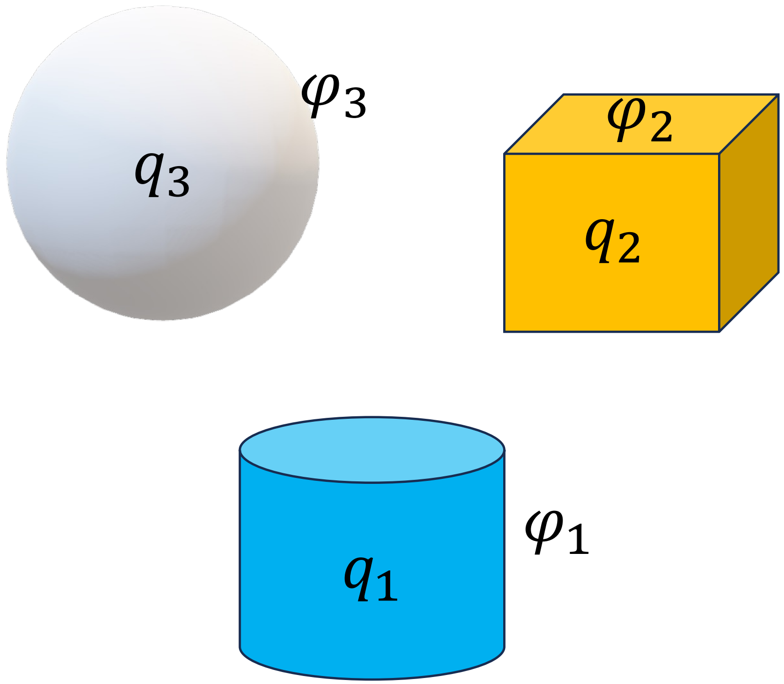
- $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$

Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Podemos plantear el problema en función del potencial $\varphi(\vec{r})$.
- Para cualquier punto fuera del conductor (donde no hay carga), φ cumple la ecuación de Laplace:
$$\nabla^2\varphi = 0$$
- El problema es hallar una $\varphi(\vec{r})$ que cumpla la ecuación anterior y la condición en la superficie del conductor (además de la condición en el infinito si se trata de una distribución acotada).
- Entonces nos preguntamos: si damos condiciones de contorno, ¿el problema del potencial tiene una solución y en ese caso es élla la única solución?

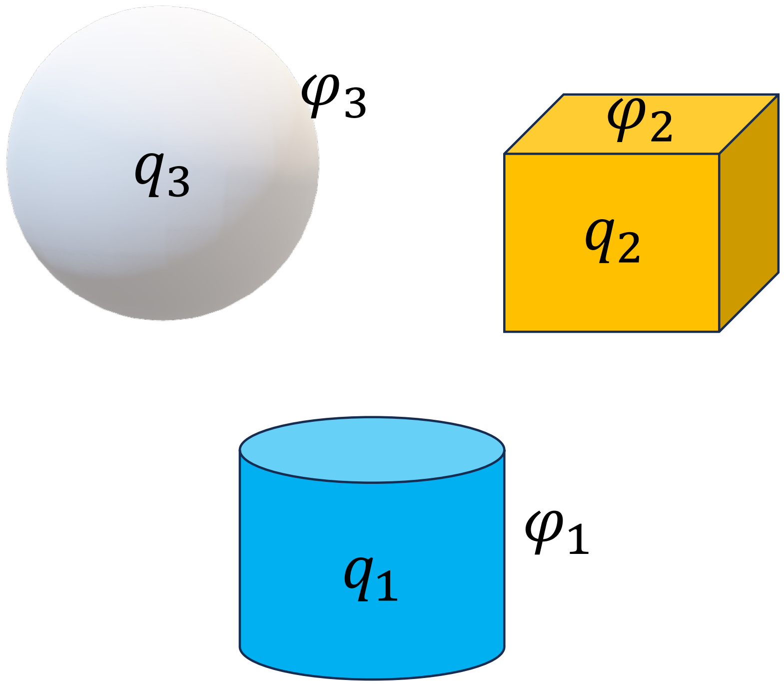
Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Supongamos el siguiente sistema y que la solución de la ecuación de Laplace $\varphi(\vec{r})$ con las condiciones de contorno en las superficies de los conductores existe.
- Supongamos que existe otra función $\psi(\vec{r})$ que también cumple en ser solución de Laplace y las condiciones de contorno.



Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Como la ecuación de Laplace es lineal, esto implica que, de haber dos soluciones, también lo es su combinación lineal:
- Consideremos, por ejemplo, la función:
$$W(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$
- Es trivial ver que $W(\vec{r})$ no cumple con las condiciones de contorno ya que por definición en esas superficies $W = 0$
- Entonces se concluye que para no ser solución de otro problema, $W \equiv 0$ es decir: $\varphi(\vec{r}) = \psi(\vec{r})$



Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Entonces conlcluimos que la solución al problema

$$\nabla^2\varphi = 0$$

con sus correspondientes condiciones de contorno **es única**

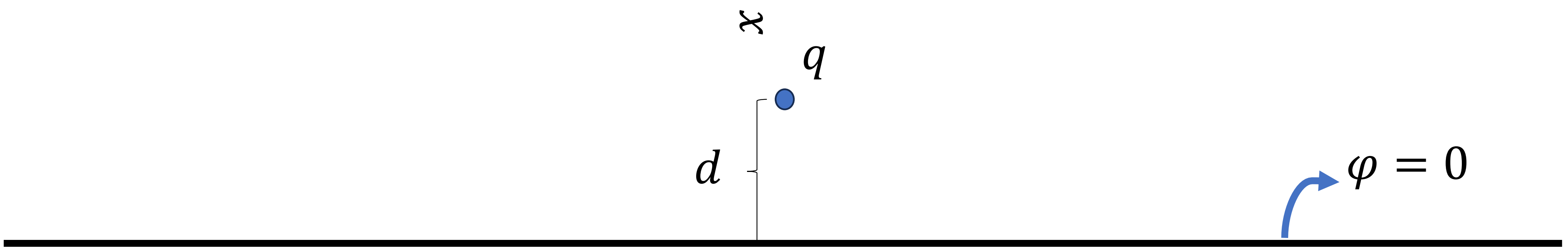
- Como corolario podemos decir que si la superficie de un conductor que no tiene cargas en su interior es una equipotencial, entonces el campo dentro de él es cero.

- Esta unicidad se valida también para la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

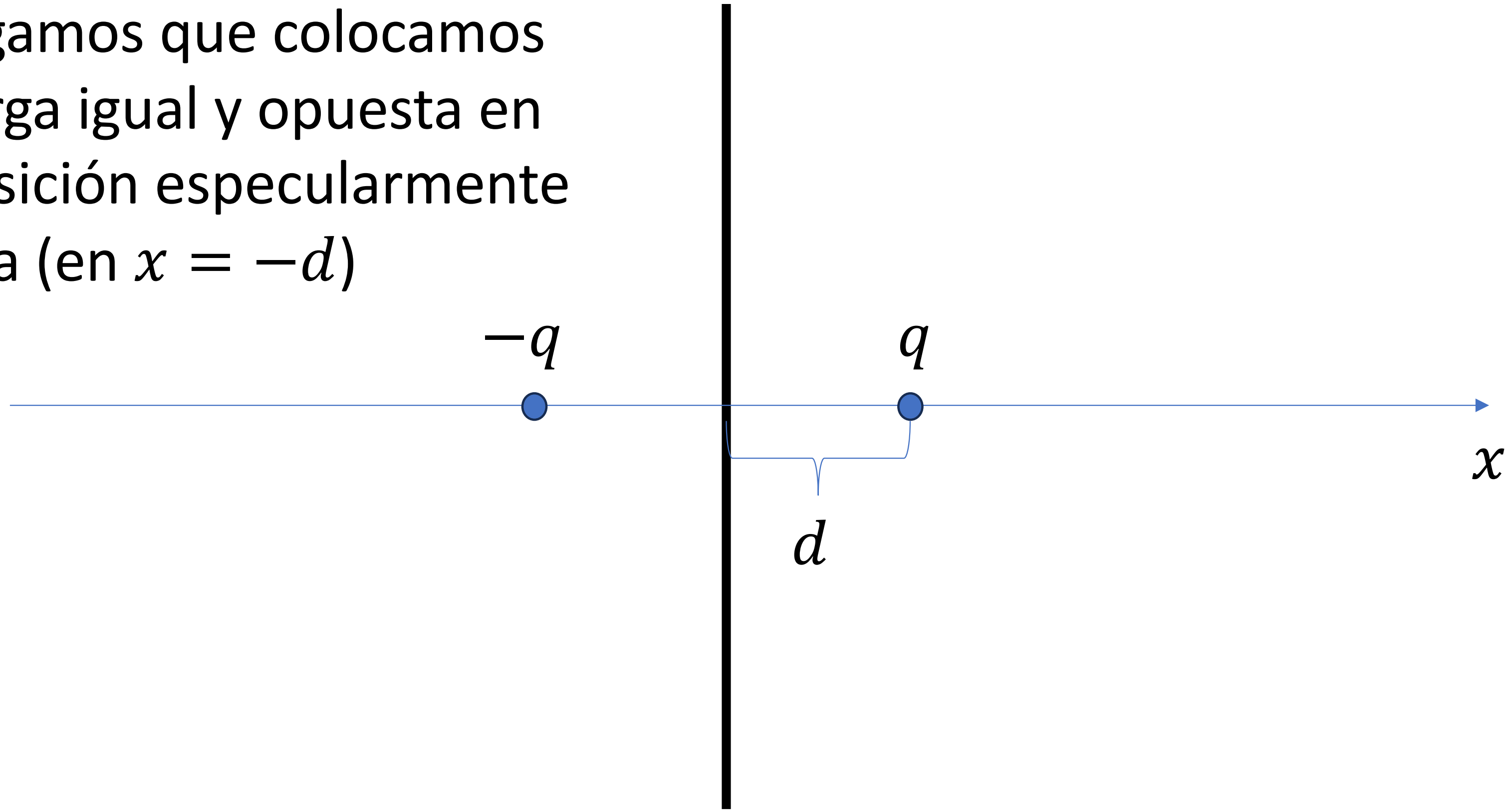
Método de las imágenes

- Sirve para obtener la función potencial y el campo eléctrico en configuraciones de geometría sencilla que involucran cargas, conductores y campos.
- Veamos el problema de una carga puntual q a una distancia d de un conductor plano infinito donde el potencial es nulo.
- Queremos calcular el potencial φ para $x > 0$



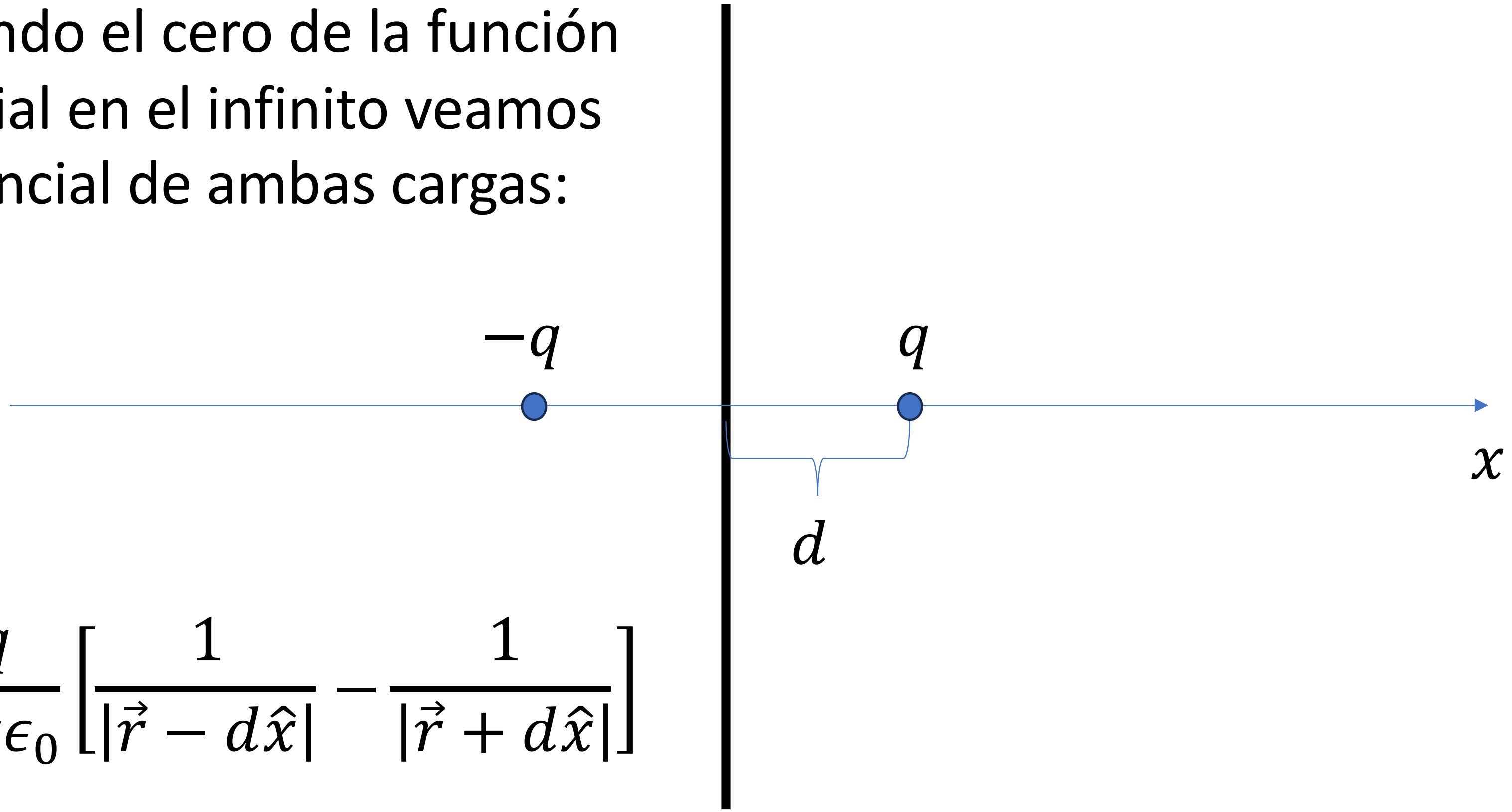
Método de las imágenes

Supongamos que colocamos una carga igual y opuesta en una posición especularmente opuesta (en $x = -d$)



Método de las imágenes

Colocando el cero de la función potencial en el infinito veamos el potencial de ambas cargas:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r} + d\hat{x}|}\right]$$

Método de las imágenes

- Esta solución cumple con la condición de contorno ya que:

$$\varphi(0, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}}\right] = 0$$

- Entonces, por el teorema de unicidad:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r} + d\hat{x}|}\right]$$

- Es la única solución para el problema

Método de las imágenes

- A partir del resultado podemos obtener el campo eléctrico.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\,q\left\{\frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = k\,q\,y\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = k\,q\,z\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

- En $x = 0$ tenemos:

$$E_x(x=0,y,z) = -\frac{2\,k\,q\,d}{[d^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \quad E_y(x=0,y,z) = 0, \quad E_z(x=0,y,z) = 0$$

Método de las imágenes

- Como en el borde del conductor el campo es $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\sigma = -\frac{q\,d}{2\pi\left[y^2 + z^2 + d^2\right]^{3/2}}$$

- El signo menos indica que se indujeron cargas negativas. Es posible demostrar que la carga total sobre el conductor es:

$$\int_{\text{plano x=0}} \sigma\, dS = -q$$