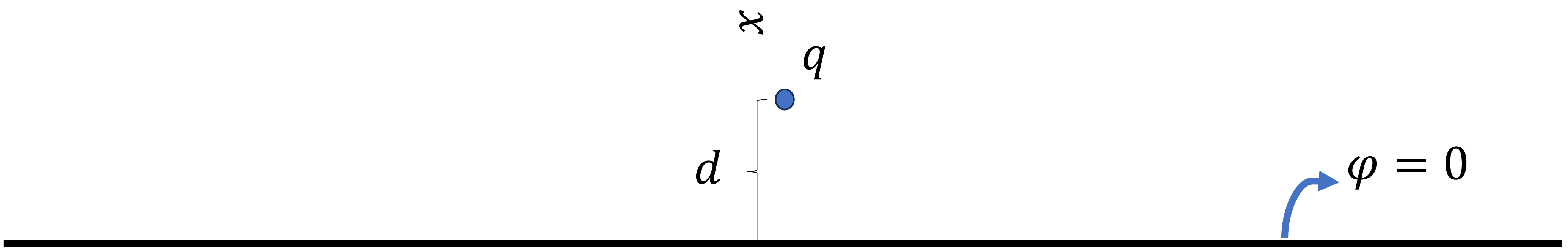
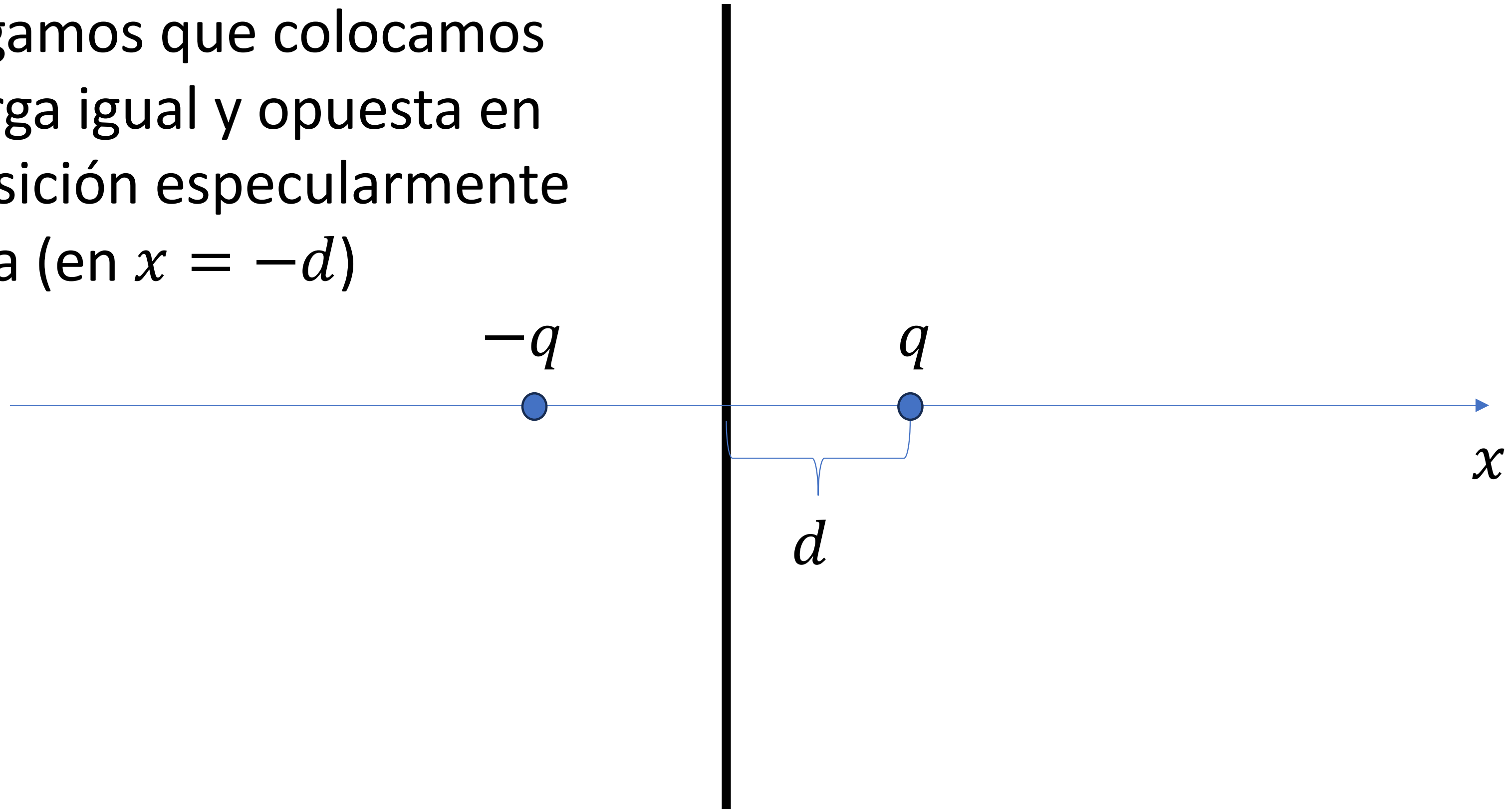
Método de las imágenes

- Sirve para obtener la función potencial y el campo eléctrico en configuraciones de geometría sencilla que involucran cargas, conductores y campos.
- Veamos el problema de una carga puntual q a una distancia d de un conductor plano infinito donde el potencial es nulo.
- Queremos calcular el potencial φ para $x > 0$



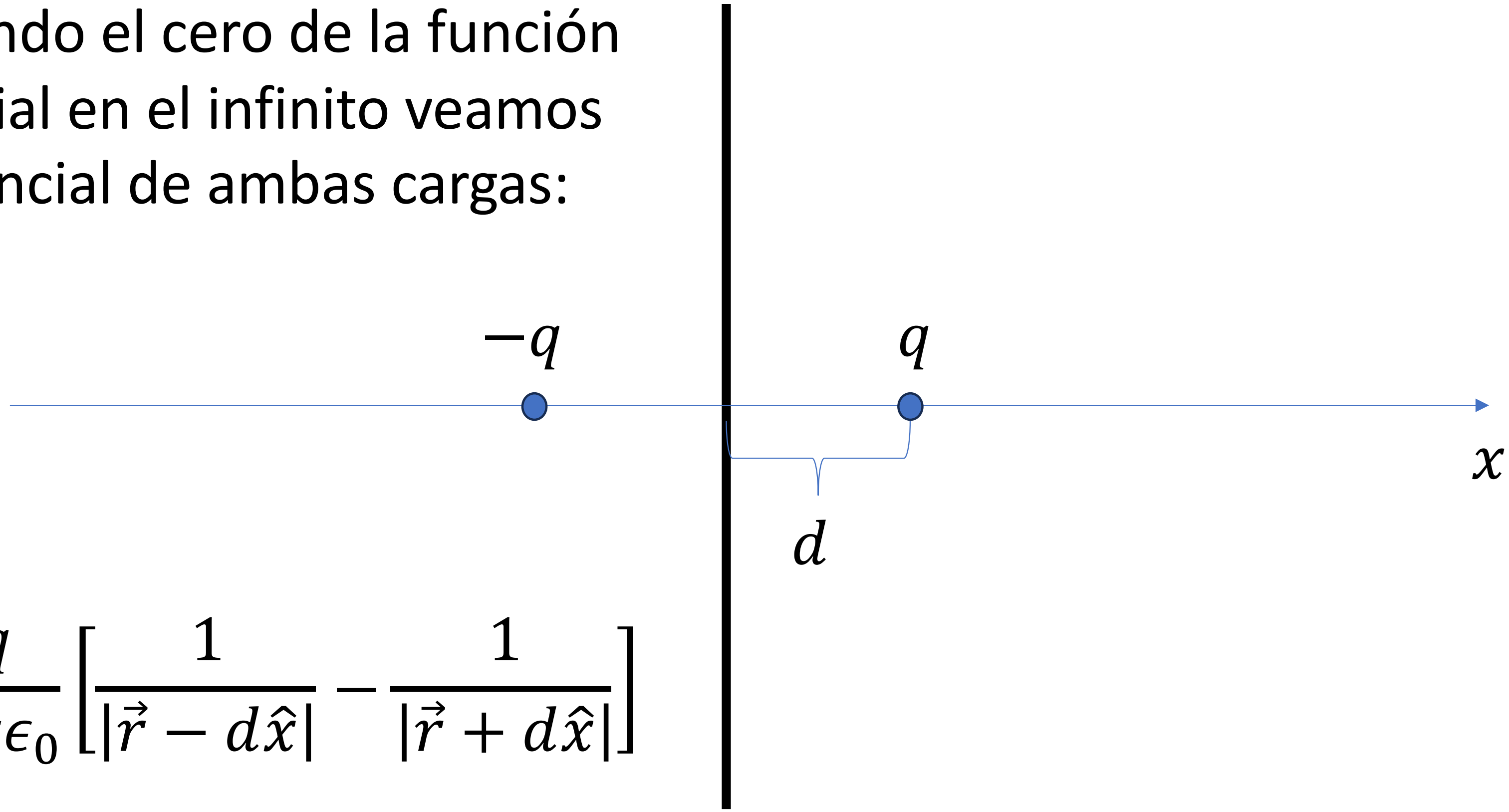
Método de las imágenes

Supongamos que colocamos una carga igual y opuesta en una posición especularmente opuesta (en $x = -d$)



Método de las imágenes

Colocando el cero de la función potencial en el infinito veamos el potencial de ambas cargas:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r} + d\hat{x}|}\right]$$

Método de las imágenes

- Esta solución cumple con la condición de contorno ya que:

$$\varphi(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}}\right] = 0$$

- Entonces, por el teorema de unicidad:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r}+d\hat{x}|}\right]$$

- Es la única solución para el problema

Método de las imágenes

- A partir del resultado podemos obtener el campo eléctrico.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\,q\left\{\frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = k\,q\,y\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = k\,q\,z\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

- En $x = 0$ tenemos:

$$E_x(x=0,y,z) = -\frac{2\,k\,q\,d}{[d^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \qquad E_y(x=0,y,z)=0, \qquad E_z(x=0,y,z)=0$$

Método de las imágenes

- Como en el borde del conductor el campo es $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\sigma = -\frac{q\,d}{2\pi\left[y^2 + z^2 + d^2\right]^{3/2}}$$

- El signo menos indica que se indujeron cargas negativas. Es posible demostrar que la carga total sobre el conductor es:

$$\int_{\text{plano x=0}} \sigma\, dS = -q$$

Capacidad y condensadores

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\ \varphi_0$$

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\,\varphi_0$$

- Para una esfera de radio r_0 con carga Q, el potencial es, como vimos $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0}$ por lo que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_0.$$

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\ \varphi_0$$

- Para una esfera de radio R_0 con carga Q, el potencial es, como vimos $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_0}$ por lo que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_0.$$

- C se mide en Faradios (Farad=C/V) y sólo depende del **tamaño y la forma del conductor**

Pregunta

- ¿Cómo varía la capacidad de una esfera cuando cambiamos su radio?

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

- **En el caso de dos conductores con cargas opuestas Q y –Q la capacidad se define como la relación entre la carga Q y la diferencia de potencial entre los dos conductores φ_{12}.**

$$Q = C\,\varphi_{12}$$

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

- **En el caso de dos conductores con cargas opuestas Q y –Q la capacidad se define como la relación entre la carga Q y la diferencia de potencial entre los dos conductores $\boldsymbol{\varphi_{12}}$.**

$$Q = C\,\varphi_{12}$$

- El conjunto de conductores, material aislante entre ambos y terminales se denomina **condensador o capacitor**.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.

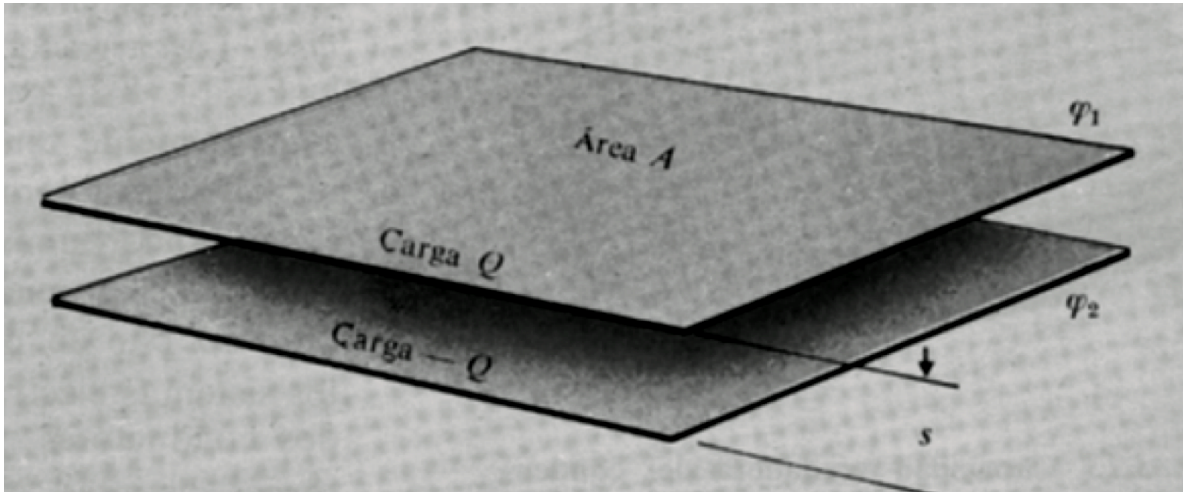


Fig. **3.12** (*a*) Condensador plano.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.

- La placa de arriba tiene una carga Q y está a un potencial φ_1.

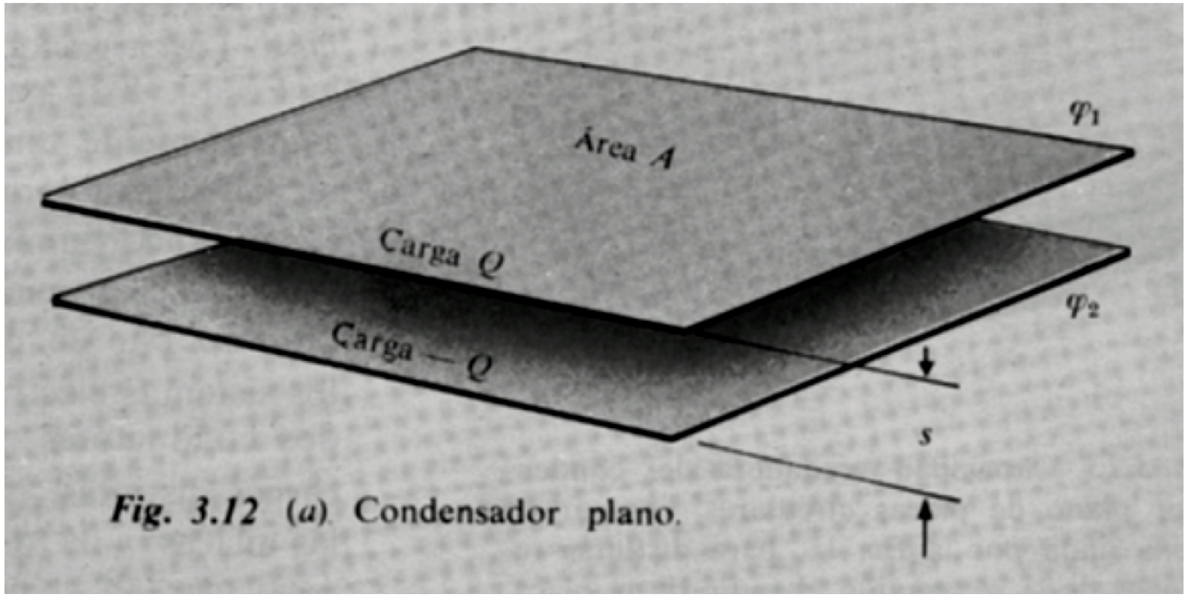


Fig. 3.12 (a). Condensador plano.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.

- La placa de arriba tiene una carga Q y está a un potencial φ_1.

- La placa de abajo tiene una carga $-Q$ y está a un potencial φ_2

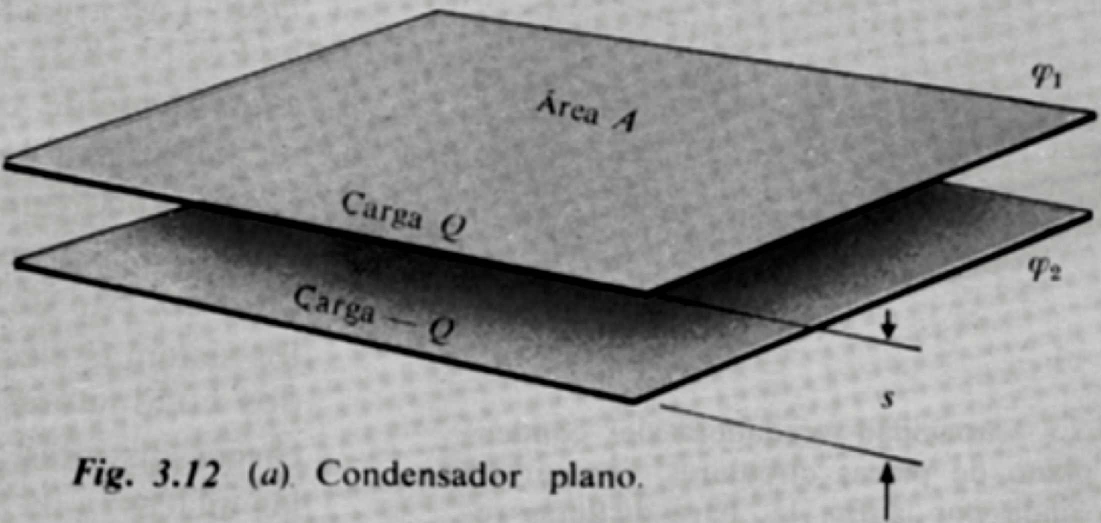
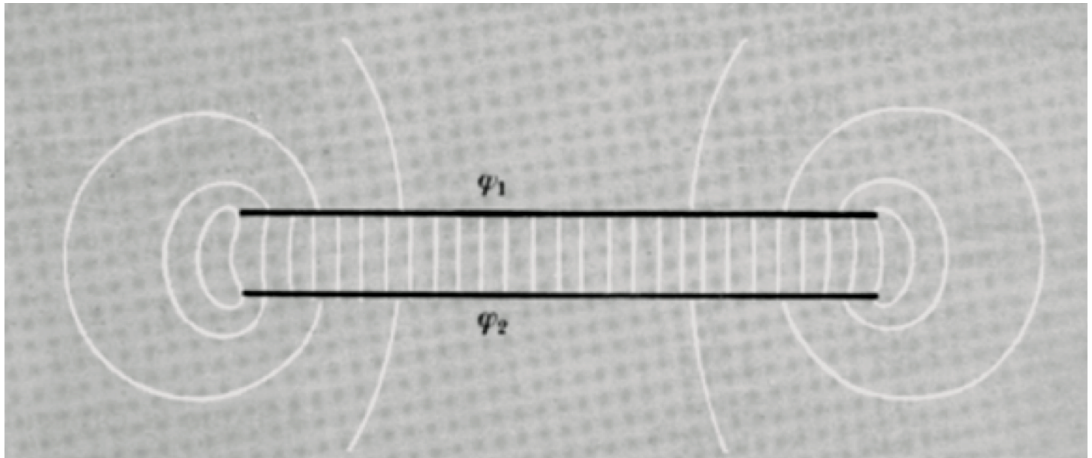


Fig. 3.12 (*a*) Condensador plano.

Condensador plano

- La densidad superficial de carga en la cara interna de un conductor es:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$



(*b*) Sección recta de (*a*) mostrando las líneas de fuerza.

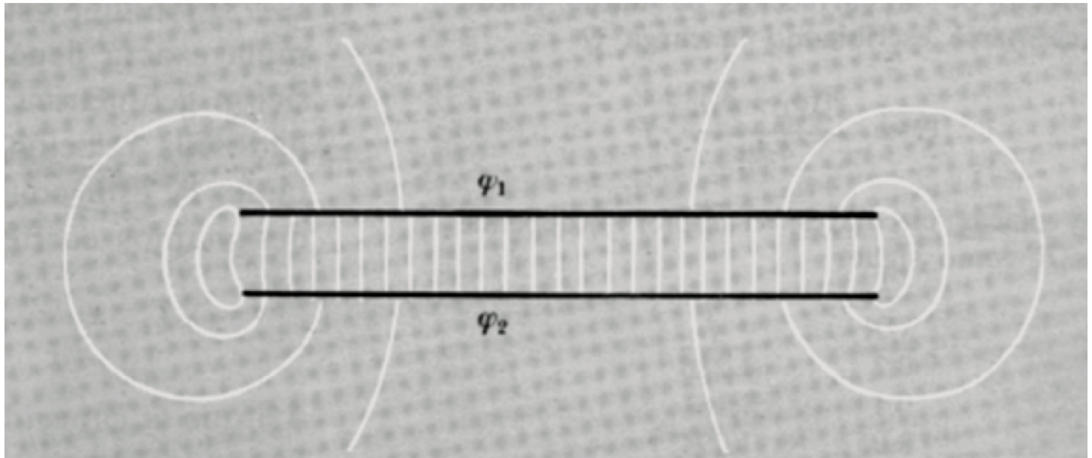
Condensador plano

- La densidad superficial de carga en la cara interna de un conductor es:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$

- Si despreciamos el efecto de los bordes, σ es constante y

$$Q = \sigma A = \epsilon_0 A \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$



(*b*) Sección recta de (*a*) mostrando las líneas de fuerza.

Condensador plano

- Por lo tanto la capacidad el condensador plano es

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

- $\epsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}\ Farad/m$!

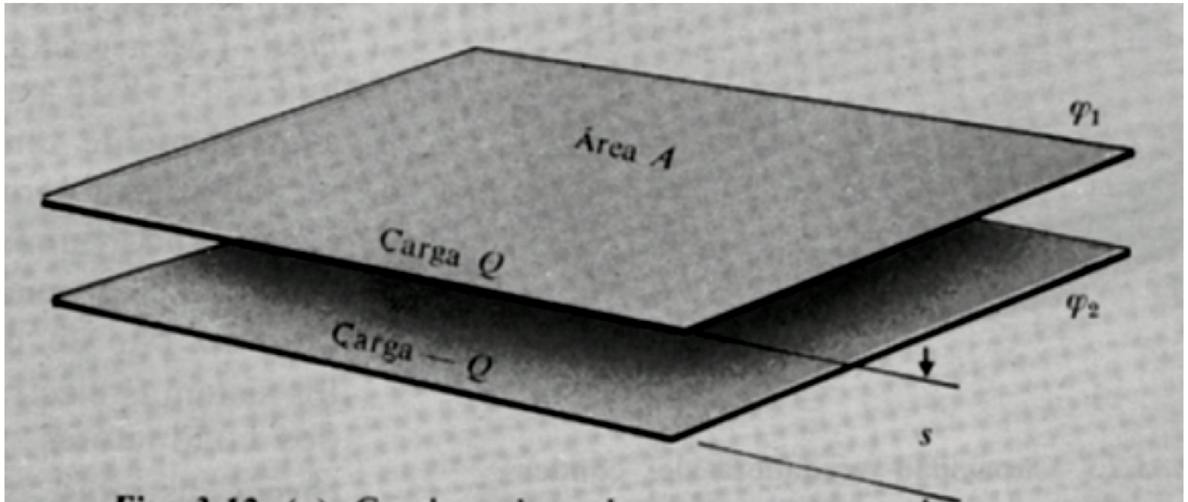
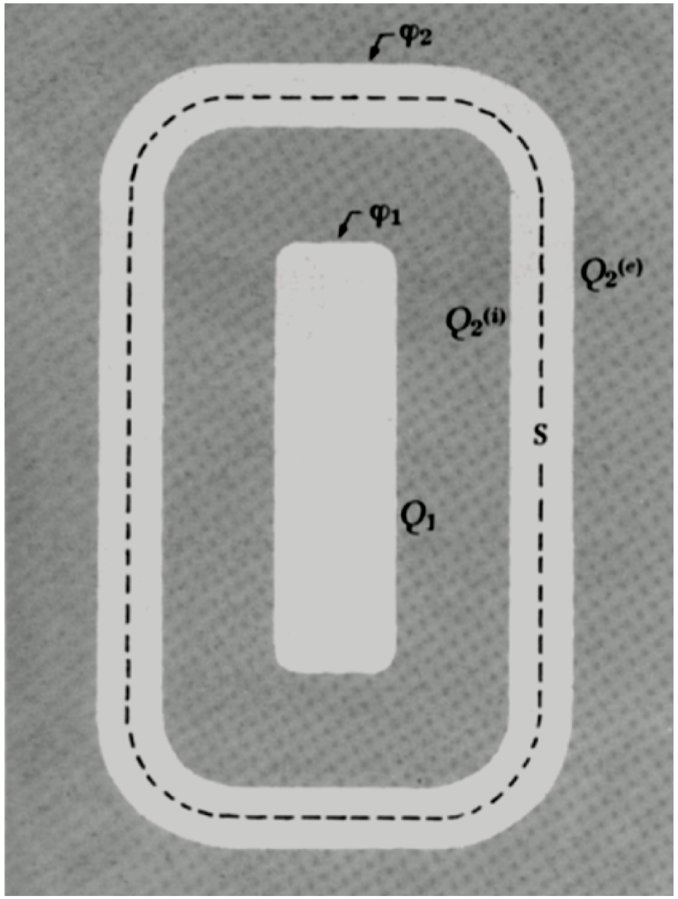


Fig. 3.12 (*a*) Condensador plano.

deci	[d]	10^{-1}	= 0.1
centi	[c]	10^{-2}	= 0.01
milli	[m]	10^{-3}	= 0.001
micro	[μ]	10^{-6}	= 0.000 001
nano	[n]	10^{-9}	= 0.000 000 001
pico	[p]	10^{-12}	= 0.000 000 000 001
femto	[f]	10^{-15}	= 0.000 000 000 000 001
atto	[a]	10^{-18}	= 0.000 000 000 000 000 001
zepto	[z]	10^{-21}	= 0.000 000 000 000 000 000 001
yocto	[y]	10^{-24}	= 0.000 000 000 000 000 000 000 001

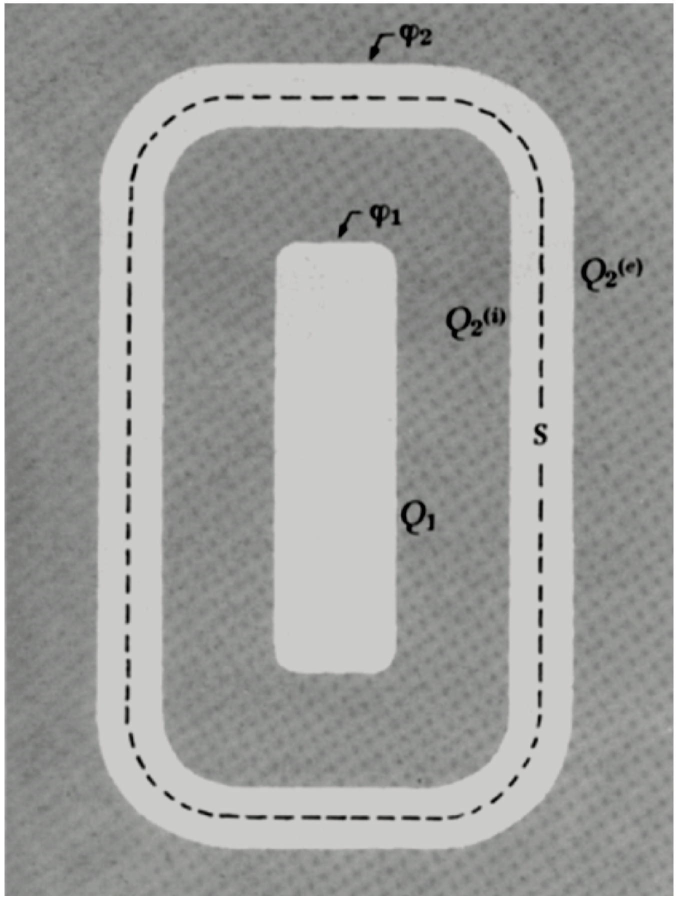
Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Ahora supongamos un conductor dentro de otro.

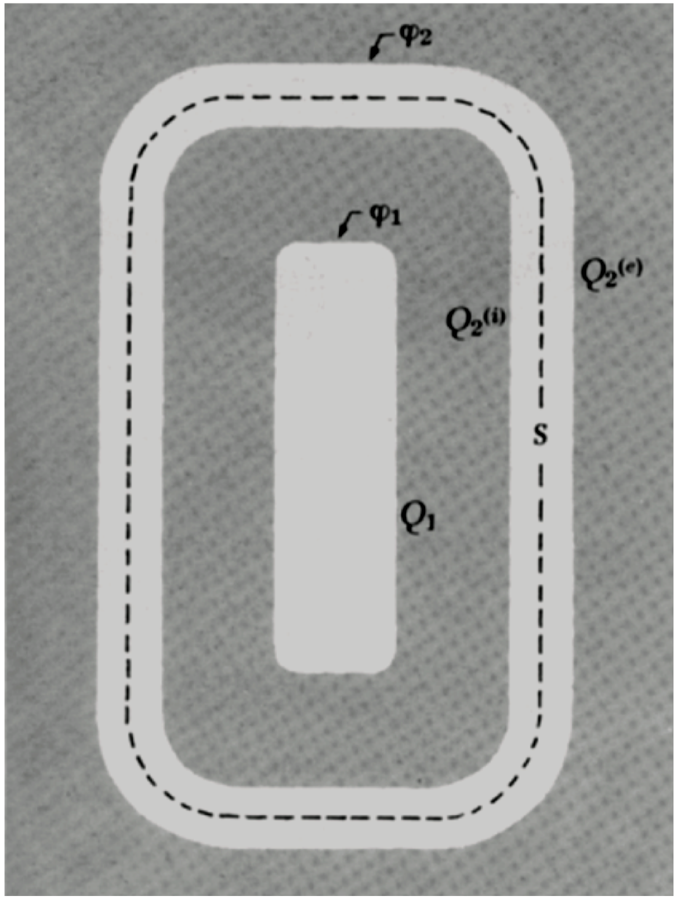
- También puede considerarse un condensador.

Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Hay tres grupos de cargas:
  - La carga total Q_1 en el conductor interior,
  - La carga Q_2(i) en la superficie interior del conductor externo
  - La carga Q_2(e) en la superficie exterior del conductor externo

Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Como el campo sobre la superficie s debe ser nulo, por ley de Gauss, la carga total encerrada debe ser cero y por lo tanto:

$$Q_2^i = -Q_1$$

- El condensador será entonces entre el conductor interior y la capa interna del exterior. Su capacidad es

$$C = \frac{Q_1}{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Energía almacenada en un capacitor

- Supongamos un condensador de capacidad C con una diferencia de potencialφ_{12}.

- En un conductor hay una carga Q mientras que en el otro, $-Q$.

- Quitemos una carga dQ del conductor con carga $-Q$ y llevémosla al conductor que tiene carga Q a lo largo de la diferencia de potencial φ_{12}.

Energía almacenada en un capacitor

- El diferencial de trabajo dW que realizamos viene dado por:

$$dW = \varphi_{12} dQ = \mathrm{Q}\,\frac{dQ}{C}$$

- Entonces, para cargar un conductor descargado inicialmente hasta alcanzar una carga final Q_f el trabajo será:

$$W = \int_0^{Q_f} \varphi_{12}\, dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_f} Q\, dQ = \frac{Q_f^2}{2C}$$

- Esta es la energía almacenada en el capacitor U

Energía almacenada en un capacitor

- La energía almacenada también se puede escribir como :

$$U = \frac{1}{2} C\varphi_{12}^2$$

- Para un **condensador plano** $C = \epsilon_0 \frac{A}{s}$ y $Es = \varphi_{12}$. Entonces:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{s}(Es)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}(As)$$

Energía almacenada en un capacitor

- Entonces, $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ es la energía almacenada en el capacitor por unidad de volumen.

- Esta expresión es general y quiere decir que es posible almacenar energía en un campo electrostático cualquiera.

- Más adelante veremos cómo almacenar energía en un campo magnético.