Polarización de dieléctricos

- Definamos la **polarización** $\vec{P}$ como la densidad volumétrica de momentos dipolares eléctricos en un dieléctrico. Si N es el número de dipolos por unidad de volumen dentro de un dieléctrico y $\vec{p}$ es el momento dipolar promedio:

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

- Para dieléctricos lineales $\vec{P}$ es proporcional al campo externo $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- Donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica (cuan fácilmente un dieléctrico se polariza en presencia de un campo externo).

$$\frac{P}{\epsilon_0 E} = \chi_e$$

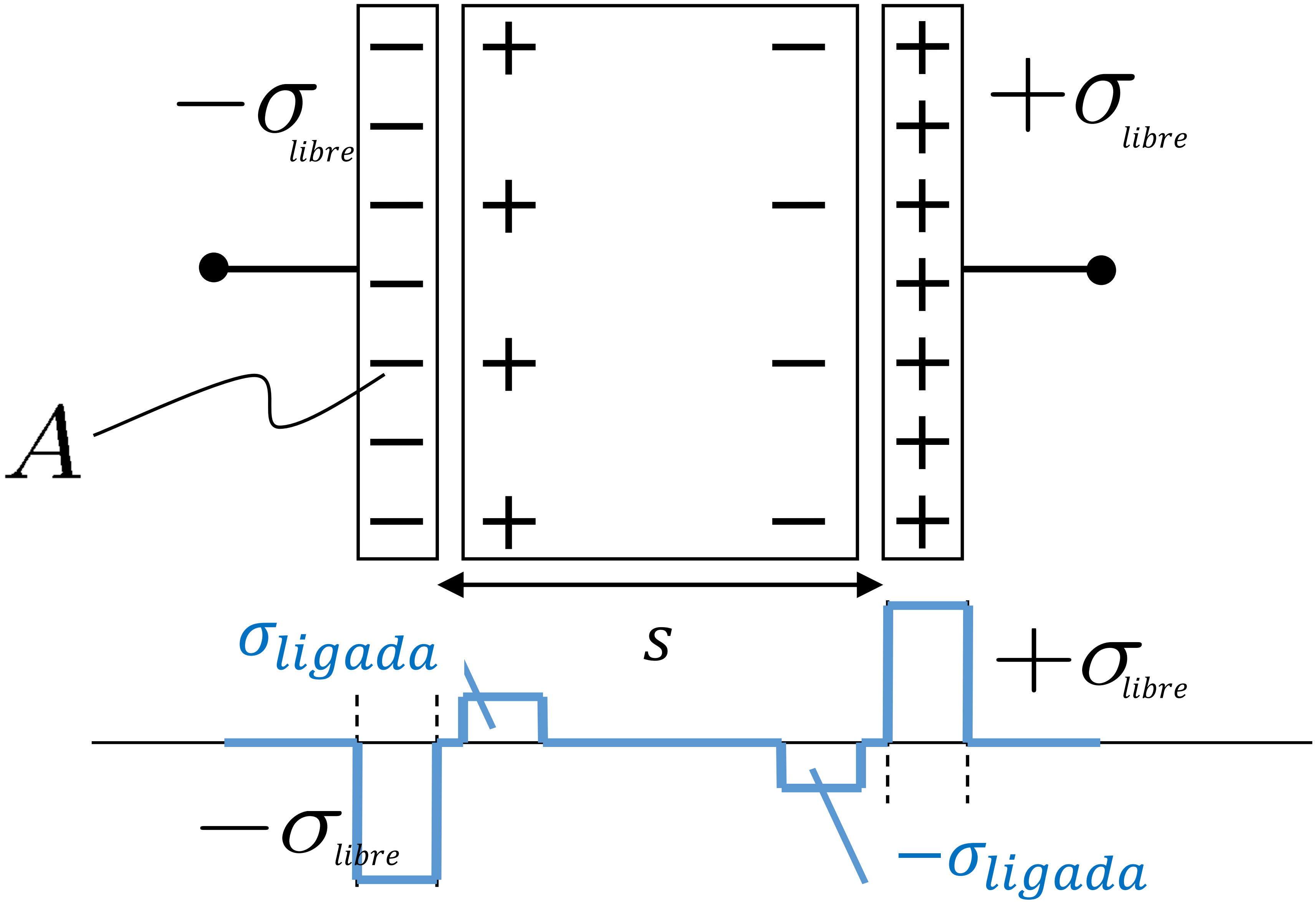
Cargas ligadas

- Por oposición a la carga libre en los conductores, se denomina carga ligada a la carga asociada a la polarización.

- Su distribución volumétrica ρ_{ligada} se define como:

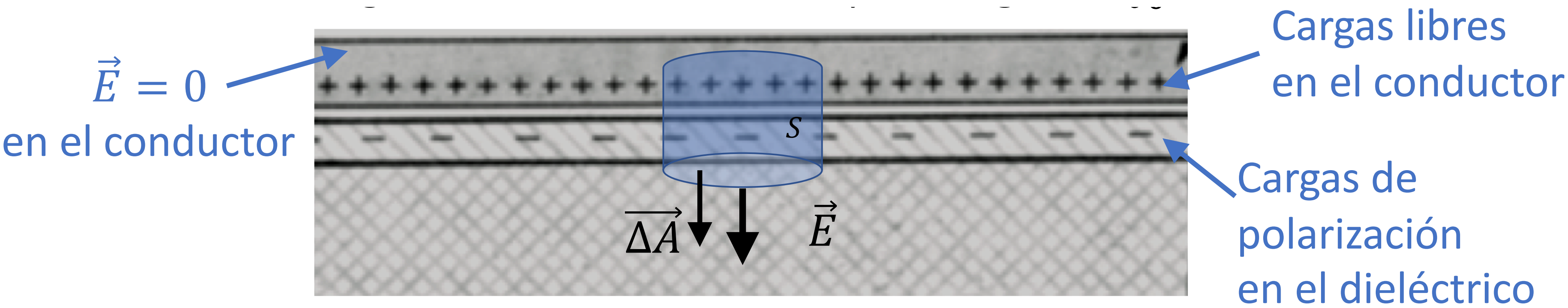
$$\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- Definida así, en el caso del capacitor plano tenemos, σ_{ligada} es un exceso de carga superficial negativa de polarización frente a la placa conductora cargada positivamente y viceversa.



$-\sigma_{libre}$
$+\sigma_{libre}$
A
s
σ_{ligada}
$+\sigma_{libre}$
$-\sigma_{libre}$
$-\sigma_{ligada}$

Ley de Gauss para Dieléctricos



- Volviendo a nuestra superficie cerrada de Gauss:

$$\oiint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint \left(\rho_{libre} + \rho_{ligada}\right) dv$$

- Como $\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\oiint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint \left(\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) dv$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Por teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{P}\, dv$$

- Entonces

$$\oiint \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot \overrightarrow{da} = \iiint \rho_{libre}\, dv$$

- El campo $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se llama corriente de desplazamiento. Entonces:

$$\oiint \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint \rho_{libre}\, dv$$

Ley de Gauss
para Dieléctricos

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Para dieléctricos lineales $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

- Donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa \geq \varepsilon_0$

- Entonces la **Ley de Gauss para dieléctricos lineales** dada una superficie cerrada S que encierra un volumen V:

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint_V \rho_{libre} \, dv$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

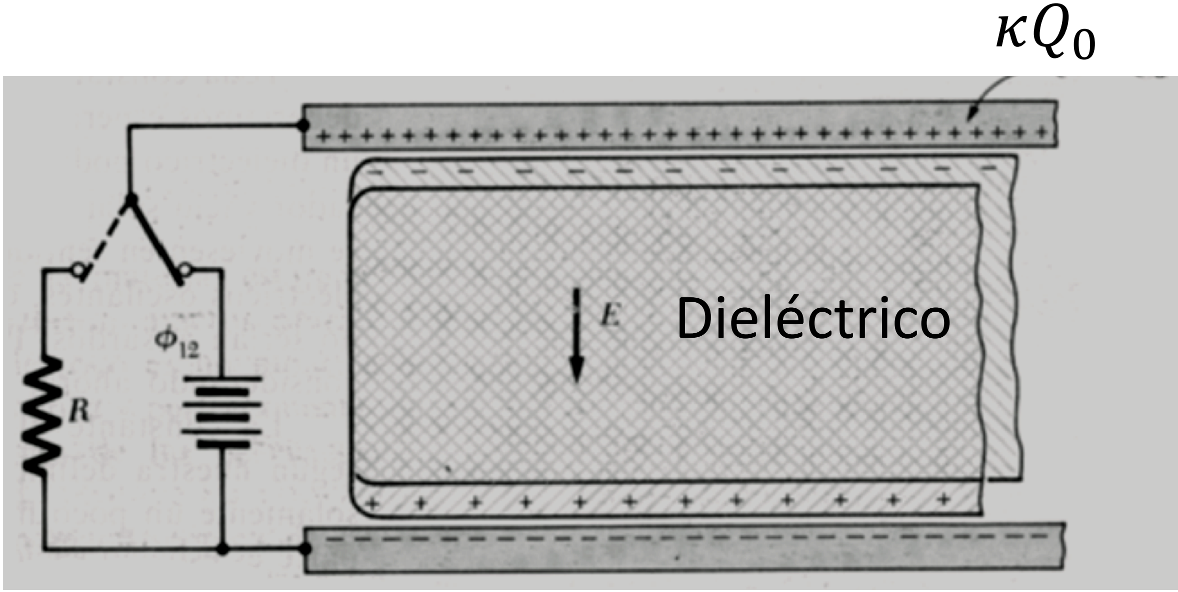
- Recordando el teorema de la divergencia, otra forma de escribir la ley de Gauss es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Esta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, nos dice que las cargas son manantiales o sumideros de campo eléctrico

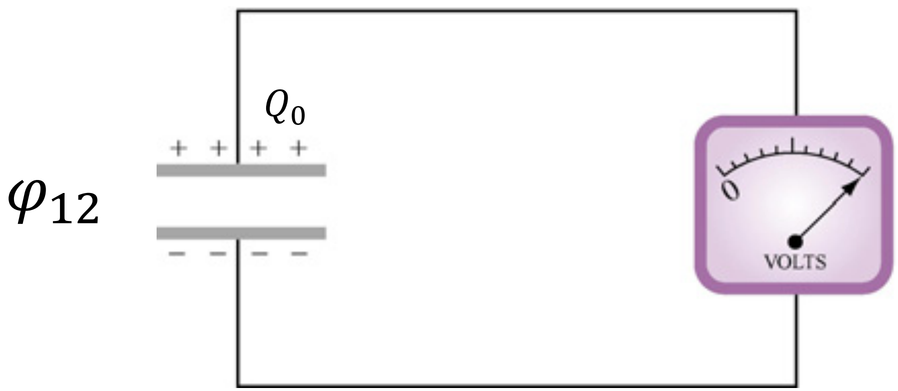
Dieléctrico en capacitor a potencial constante

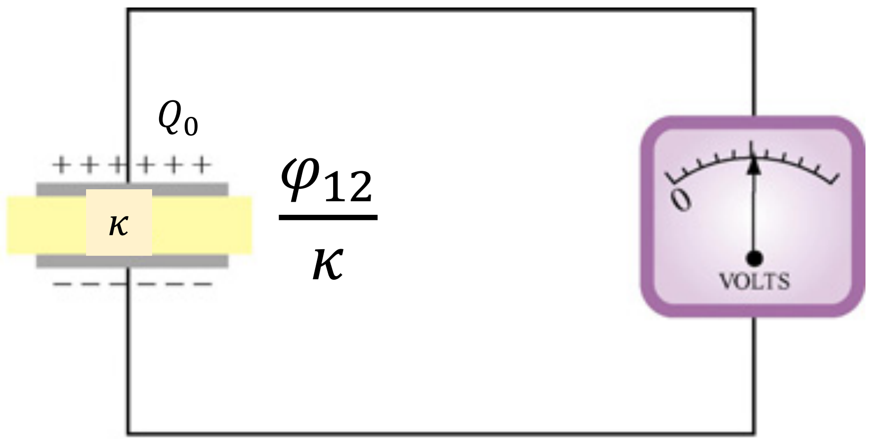
- Colocamos un dieléctrico de constante κ llenando el espacio entre placas a potencial constante φ_{12}
- La carga en el conductor aumenta un factor κ.
- Al mantenerse el potencial en φ_{12}, la capacidad aumenta a κC.
- El campo total $E = \varphi_{12}/s$ en el dieléctrico no cambia



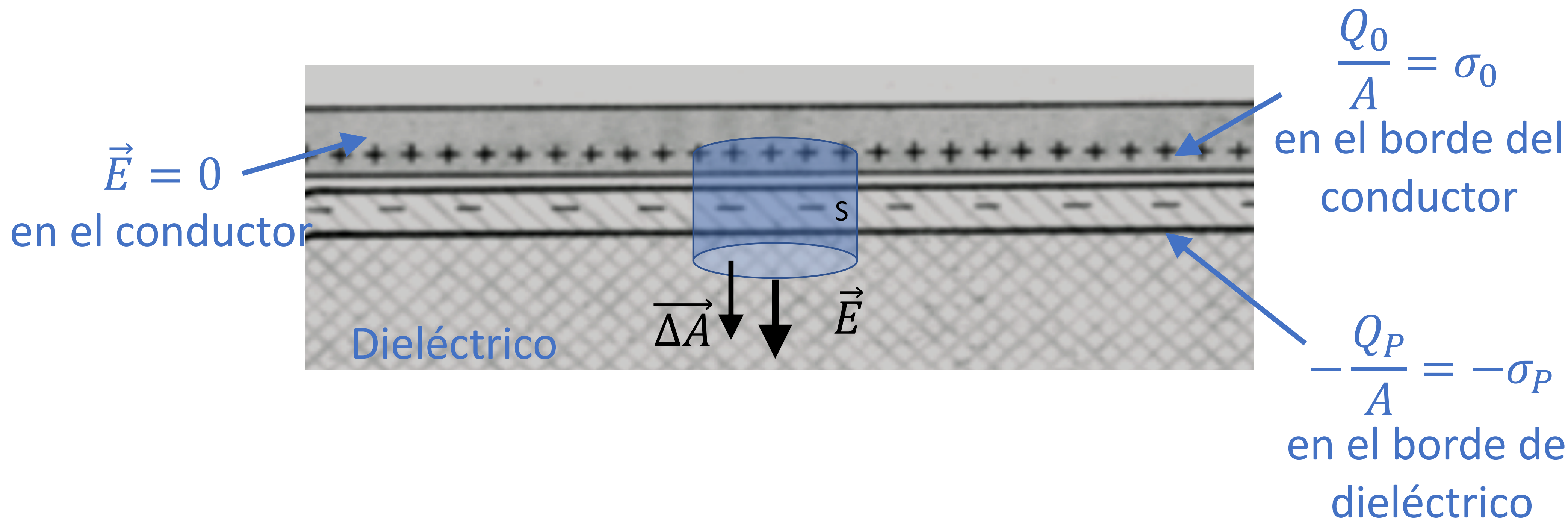
Dieléctricos en capacitor a carga constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ manteniendo la carga Q_0.
- Experimentalmente se ve que el potencial cae a $\frac{\varphi_{12}}{\kappa}$, con lo cual, el campo cae a $\frac{\varphi_{12}}{s\kappa}$.
- La capacidad aumenta a κC.





Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)



$$\oint\!\!\!\oint_S \varepsilon\vec{E}\cdot\overrightarrow{da} = \varepsilon\vec{E}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = \varepsilon E\Delta A = \iiint \rho_{libre}dv = Q_0\frac{1}{A}\Delta A$$

Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

- Simplificando, tenemos $E = \frac{Q_0}{\varepsilon A} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \kappa A}$
- Para el caso sin dieléctrico el campo vale $E\kappa = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$
- Entonces, juntando las dos últimas expresiones para E:

$$\frac{Q_0}{\kappa \varepsilon_0 A} = \frac{Q_0 - Q_P}{\varepsilon_0 A} \Longrightarrow \frac{Q_0}{\kappa} = Q_0 - Q_P$$

- con lo cual la carga de polarización es

$$Q_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] Q_0, \text{ ó } \ \sigma_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \sigma_0$$

Energía en capacitores con dieléctricos

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico

- La energía almacenada en un capacitor venía dada por:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta\varphi^2$$

- Al colocar un dieléctrico, se espera que esta cantidad cambie:
  - A potencial constante
  - A carga constante

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (con batería)

- Supongamos un capacitor de capacidad inicial C_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo el potencial constante.
- La energía pasa de un valor inicial (subíndice i)

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta\varphi_i^2$$

- A un valor final (subíndice f)

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta\varphi_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \Delta\varphi_i^2 > U_i \qquad \Delta\varphi_f = \Delta\varphi_i$$

Pregunta

- ¿De dónde sale la energía que ingresa al sistema al colocar el dieléctrico a voltaje constante?

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (sin batería)

- Sea un capacitor de capacidad inicial C_i y diferencia de potencial $\Delta\varphi_i$ que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo la carga constante.
- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta\varphi_i^2$$

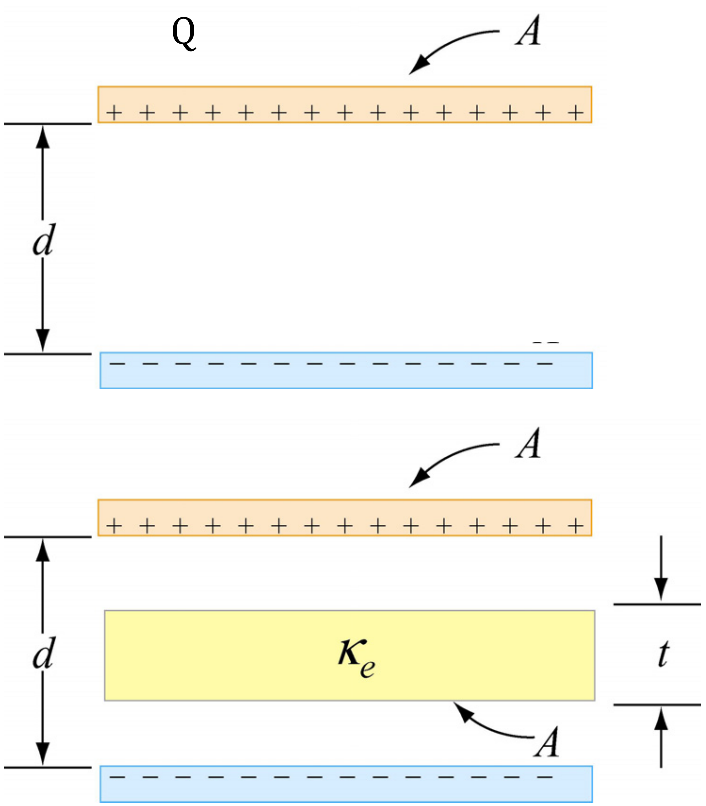
- A un valor final donde $C_f = \kappa C_i$ y $\Delta\varphi_f = \frac{\Delta\varphi_i}{\kappa}$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta\varphi_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \left[\frac{\Delta\varphi_i}{\kappa}\right]^2 = \frac{U_i}{\kappa} < U_i$$

Pregunta

- ¿A dónde va la energía que ya no está en el estado final?

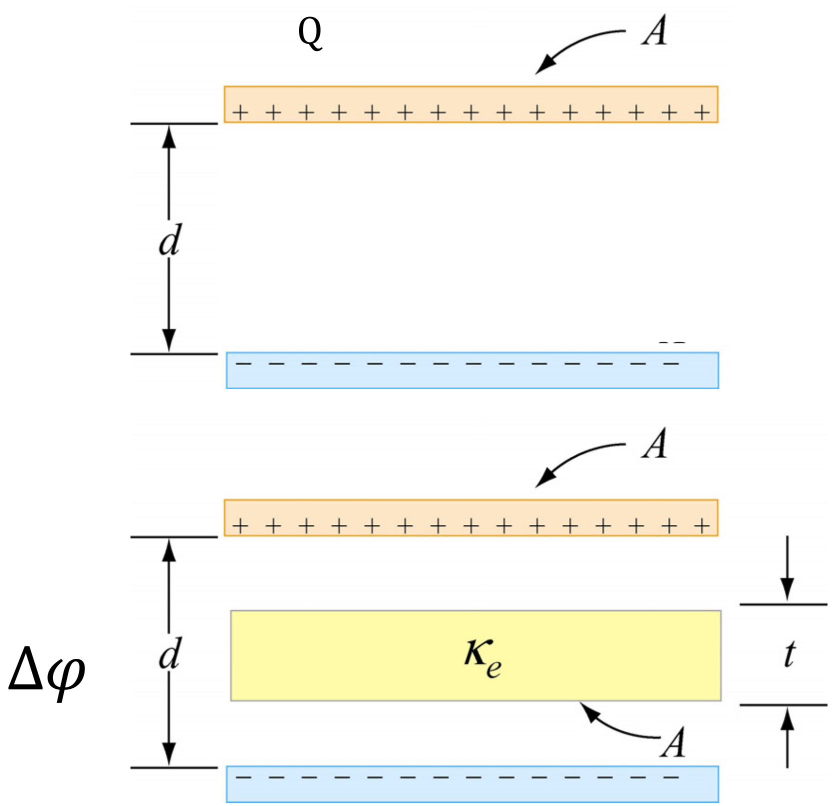
Capacitores con dieléctricos (1)



- Dado un capacitor plano de área *A* y espesor *d*, metemos un dieléctrico de constante κ_e y espesor *t* < *d*.
- La carga Q en el conductor permanece constante.
- Queremos ver cómo cambia la capacidad.
- Inicialmente, la capacidad es:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



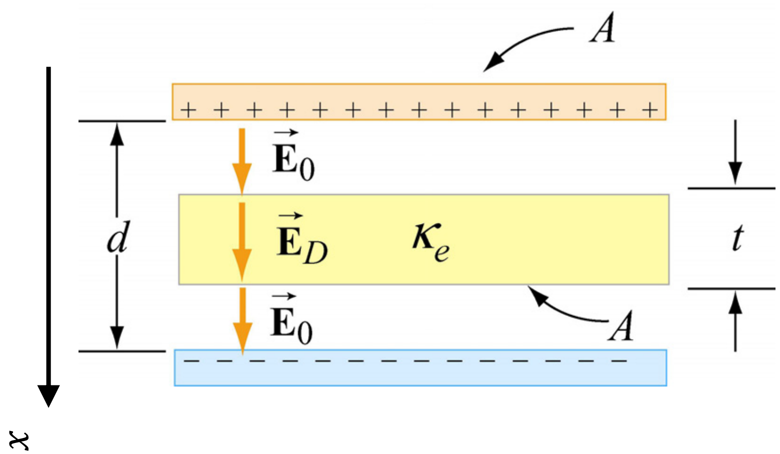
- La capacidad del capacitor con el dieléctrico vendrá dada por

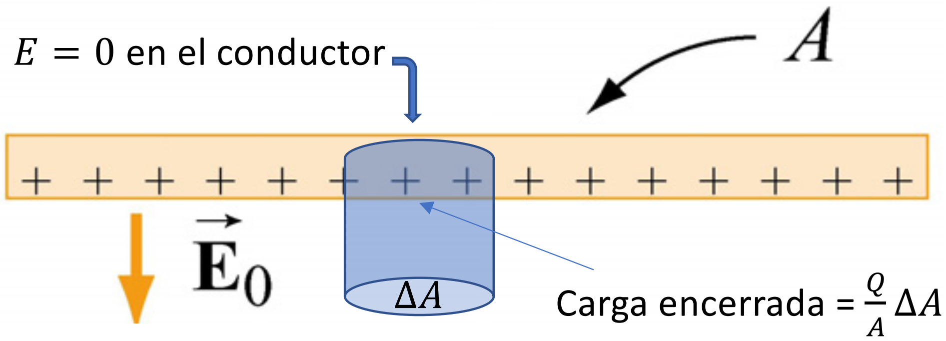
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$$

donde $\Delta\varphi$ es la diferencia de potencial entre las placas una vez que metimos el dieléctrico.

- Como Q no varía, sólo tenemos que calcular $\Delta\varphi$.

Capacitores con dieléctricos (1)





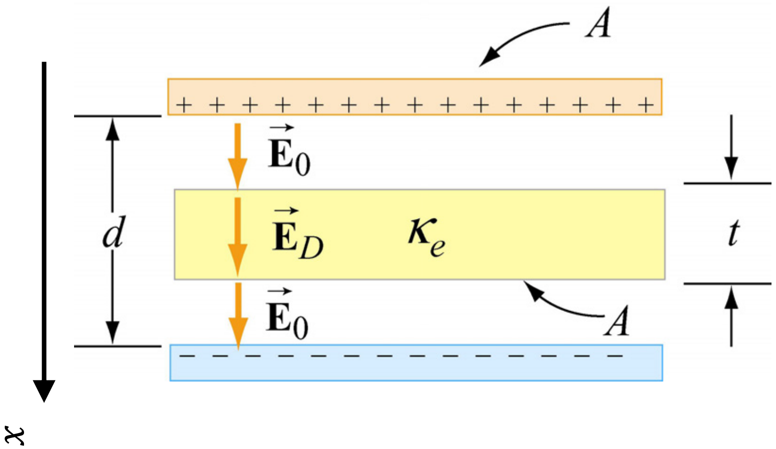
- Calculemos entonces el campo en el espacio entre las placas.

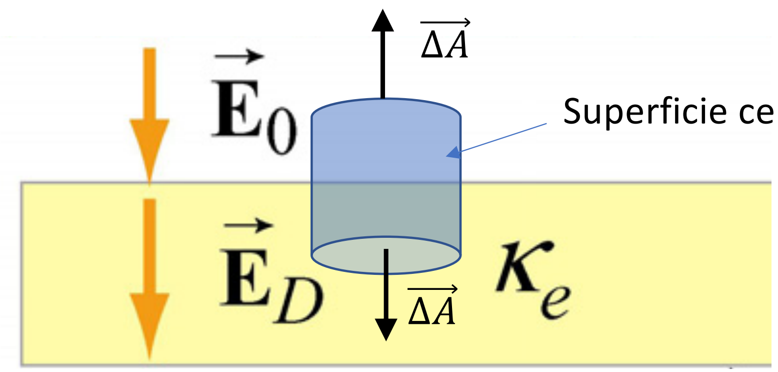
- Por ley de Gauss, En la capa de vacío de arriba el campo es simplemente

$$E_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ o } \vec{E}_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{x}$$

- En la capa de vacío de abajo, el valor del campo es el mismo.

Capacitores con dieléctricos (1)





- Para el campo $\vec{E}_D$ en el dieléctrico usemos la ley de Gauss para dieléctricos:

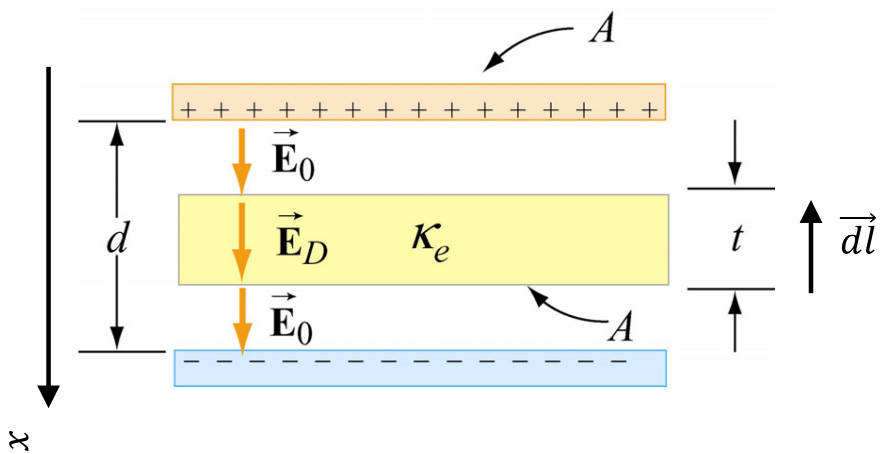
$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = 0 \qquad \text{(no hay cargas libres)}$$

$$\epsilon E_D \Delta A - \epsilon_0 E_0 \Delta A = 0$$

entonces como $\epsilon = \kappa_e \ \epsilon_0$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_e}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



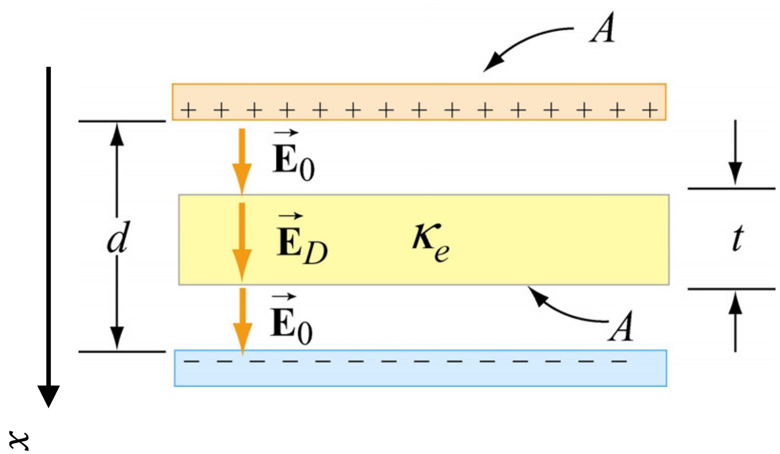
- La diferencia de potencial entre las placas es

$$\Delta\varphi = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- la integral de camino da:

$$\Delta\varphi = E_0(d-t) + E_D\, t$$
$$= \frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}\, t$$

Capacitores con dieléctricos (1)



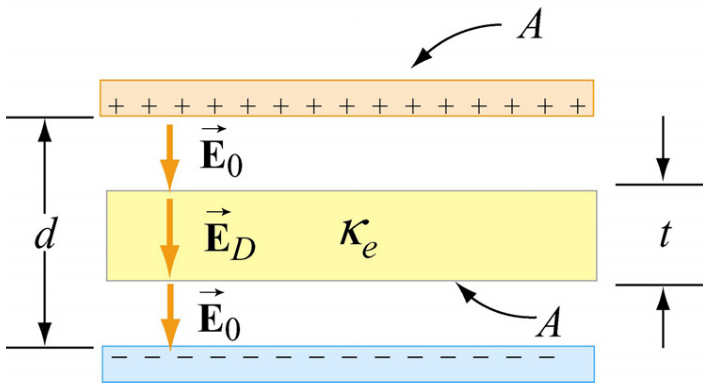
- Calculemos ahora la capacidad del capacitor con el dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}t}$$

- simplificamos y reacomodamos el denominador

$$C = \frac{1}{\frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}}$$

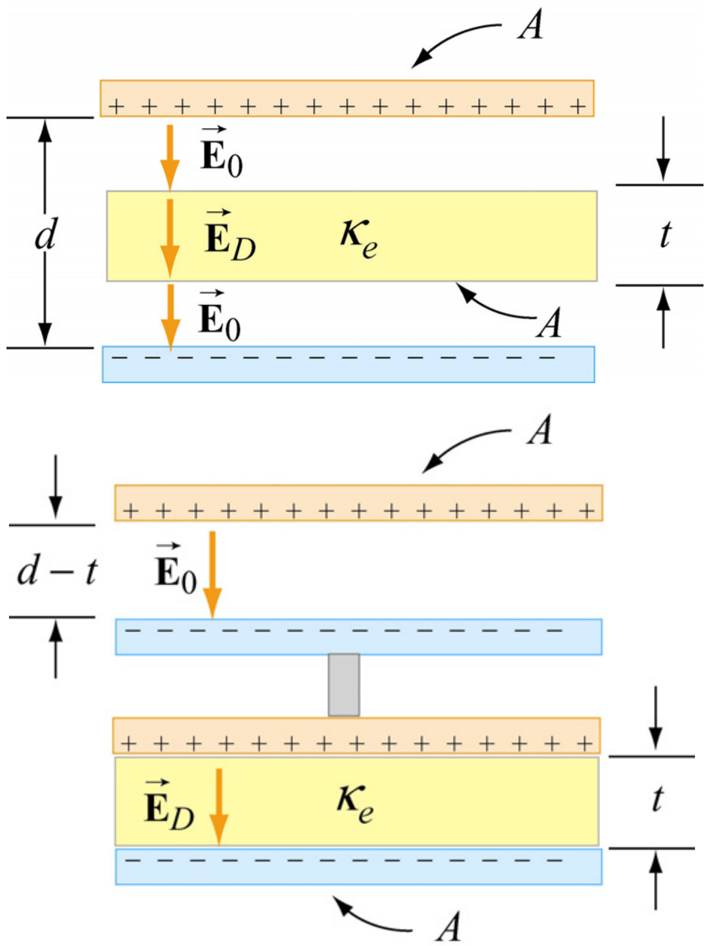
Capacitores con dieléctricos (1)



- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (1)

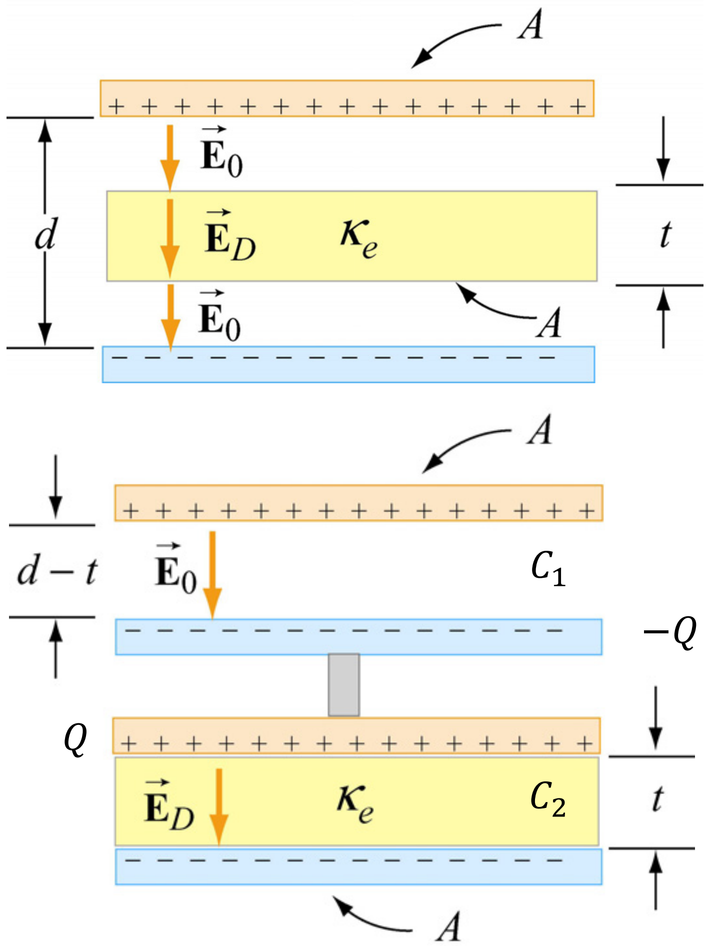


- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

- Esto es la suma de las inversas de las capacidades de un capacitor en el vacío de espesor $d - t$ y de otro con dieléctrico de espesor t, ambos con carga Q.

Capacitores con dieléctricos (1)



- En otras palabras:
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

- Los capacitores tienen un conductor en común que es un equipotencial, de un lado tiene carga Q del otro $-Q$.

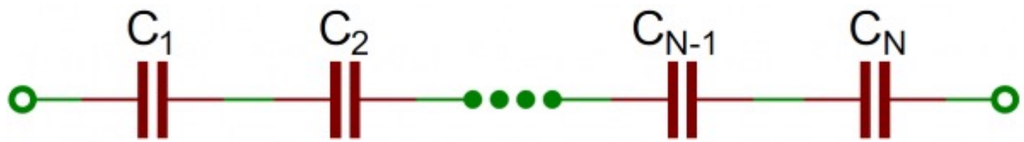
- Esta configuración se denomina *'en serie'*

Capacitores en serie

- El resultado anterior:

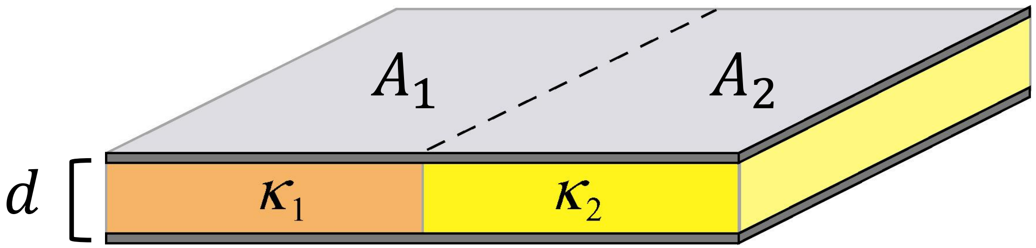
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Puede extenderse a los capacitores en el vacío trivialmente ($\kappa_e = 1$) y a un número arbitrario de capacitores en serie.



$$\frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_{N-1}} + \frac{1}{C_N}$$

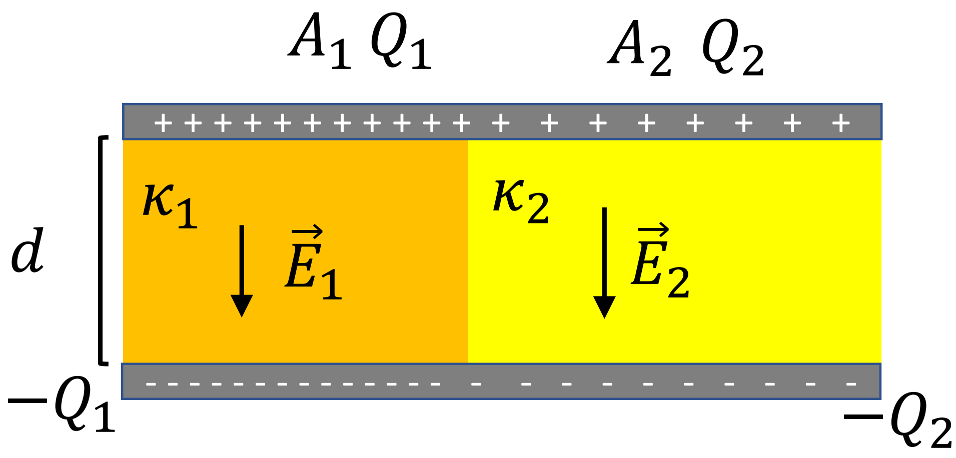
Capacitores con dieléctricos (2)



- Supongamos ahora un capacitor de área A y espesor d pequeño con carga Q, y diferencia de potencial $\Delta\varphi$.

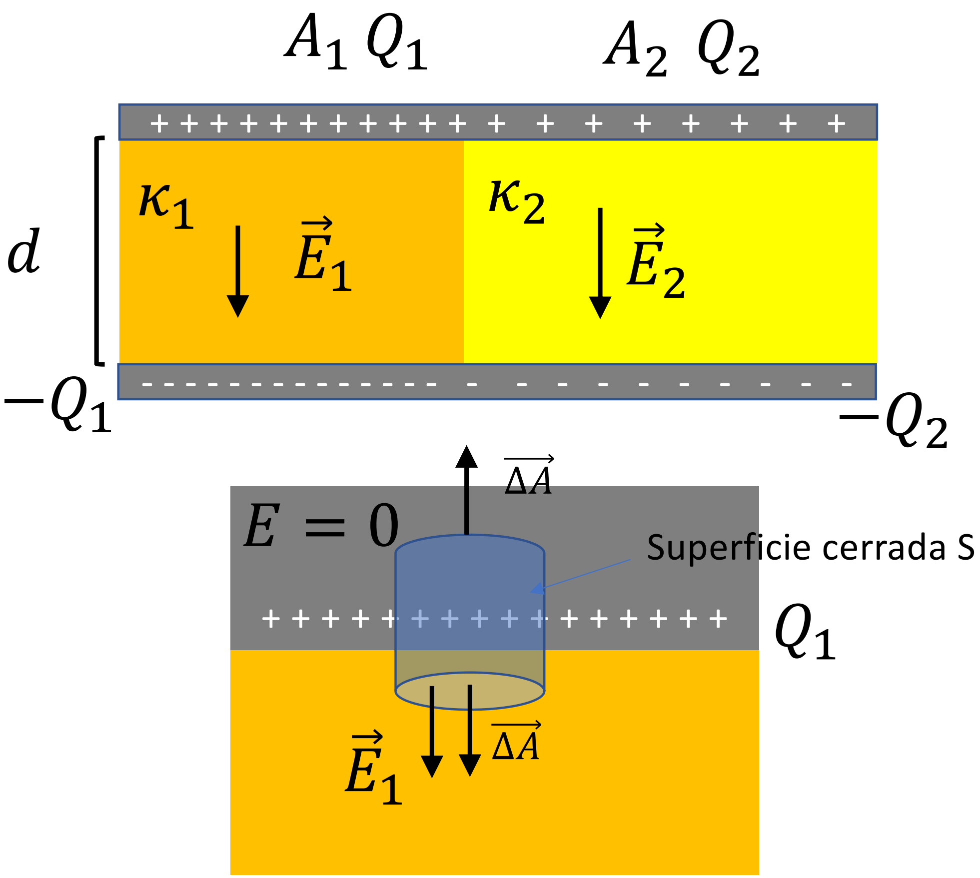
- Se llena todo el espacio entre placas con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 de áreas A_1+ $A_2 = A$.

Capacitores con dieléctricos (2)



- La superficie de cada conductor es una equipotencial.
- Por lo tanto la diferencia de potencial para cada dieléctrico es la misma
- Vamos a permitir que la carga total en cada placa se redistribuya sobre cada dieléctrico $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitores con dieléctricos (2)



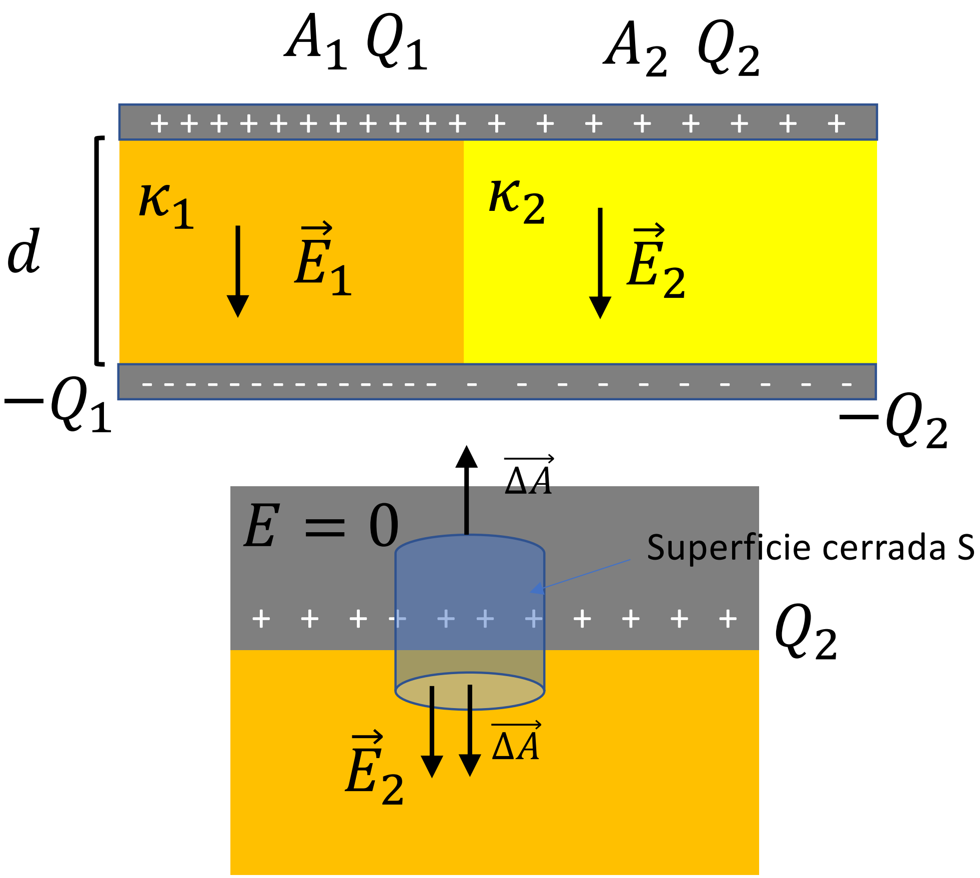
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \Delta A = \frac{Q_1}{A_1} \Delta A$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



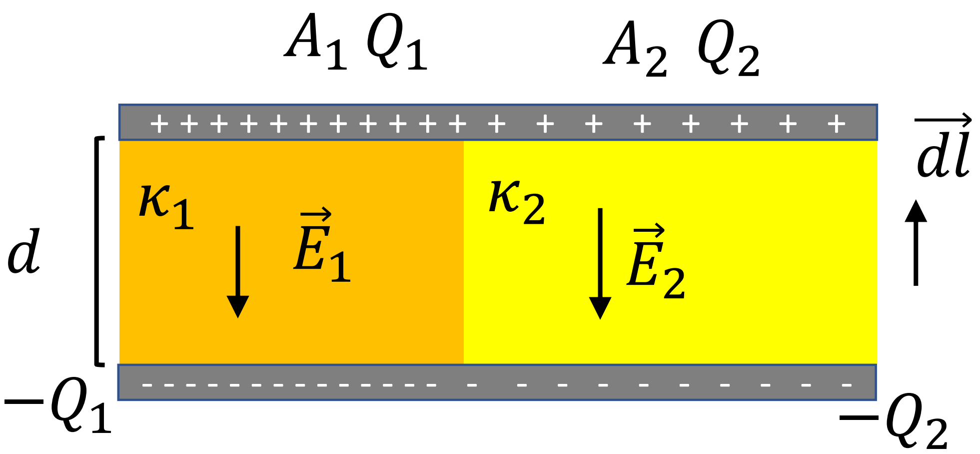
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_2 \epsilon_0 E_2 \Delta A = \frac{Q_2}{A_2} \Delta A$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



- Como la diferencia de potencial es la misma para ambos dieléctricos

$$-\int_{-}^{+} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{-}^{+} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\Delta V = E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0} = \frac{Q_2 d}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)

- De la cuenta anterior:

$$Q_2 \ = A_2\kappa_2\frac{Q_1}{A_1\kappa_1}$$

- Entonces, la capacidad total es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{Q_1 d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}}$$

- Reemplazando Q_2 tenemos

Capacitores con dieléctricos (2)

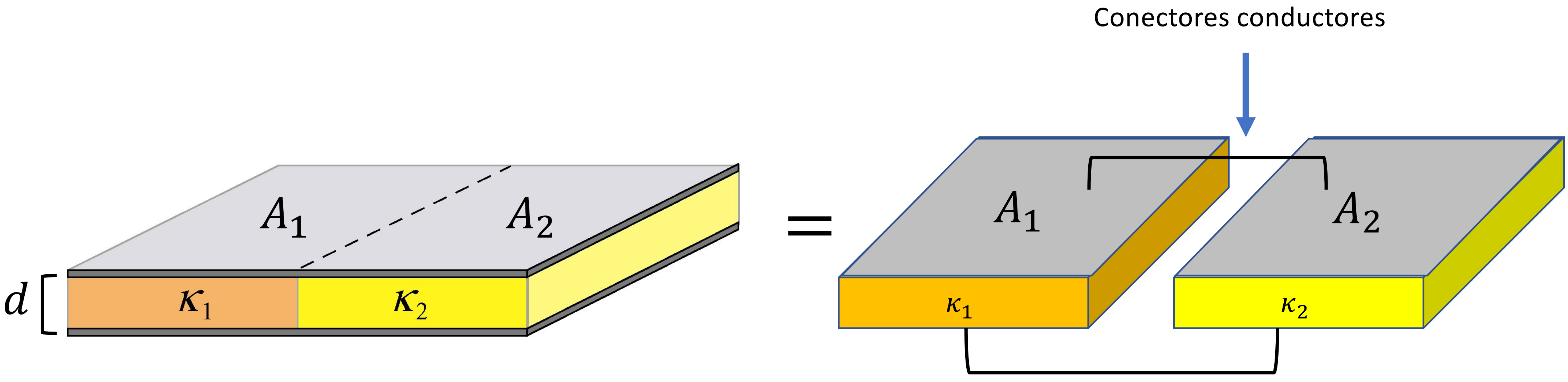
- Reemplazando Q_2 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + A_2\kappa_2 \frac{Q_1}{A_1\kappa_1}}{\frac{Q_1 d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}}$$

- Entonces

$$C = \frac{1 + A_2\kappa_2 \frac{1}{A_1\kappa_1}}{\frac{d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0 + A_2\kappa_2 \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{A_1\kappa_1}}{d} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{d} + \frac{A_2\kappa_2\epsilon_0}{d}$$

Capacitores en paralelo



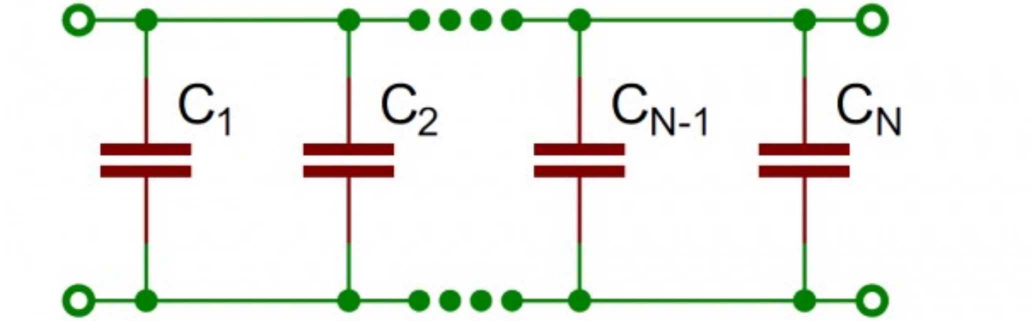
$$C = C_1 + C_2$$

Capacitores en paralelo

- Entonces, en general, la capacidad equivalente C de dos capacitores 'en paralelo' (C_1y C_2) tenemos:

$$C = C_1 + C_2$$

- Extendido a N capacitores



$$C_{Tot} = C_1 + C_2 + \ldots + C_{N-1} + C_N$$