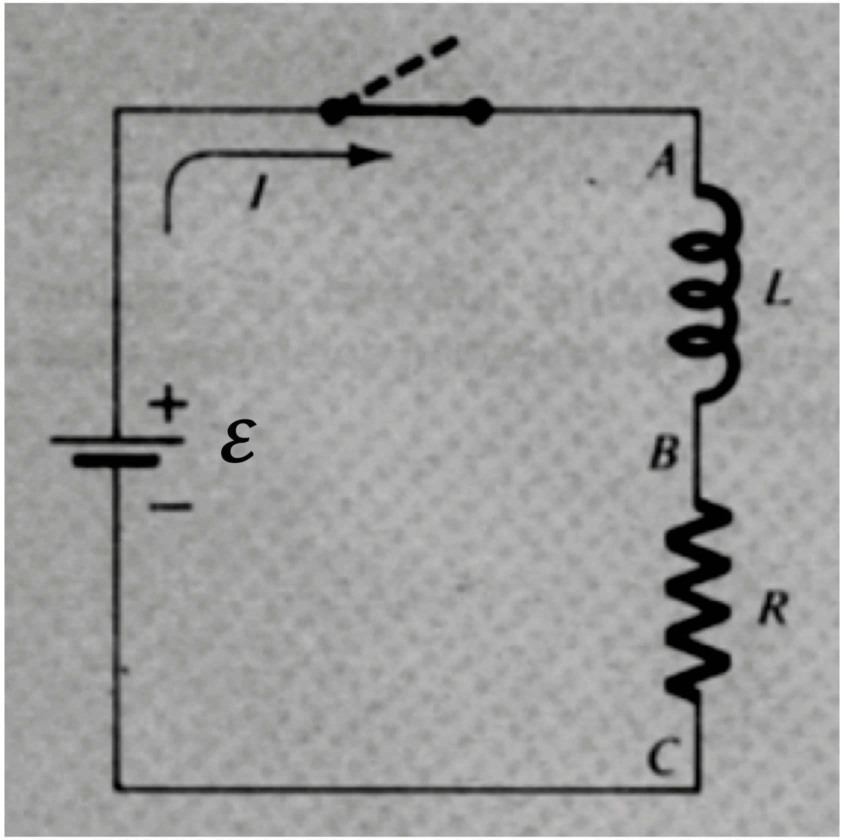
Circuitos con autoinductancias

- Supongamos el siguiente circuito que consta de una autoinductancia L y una resistencia R en serie.
- La resistencia R puede ser la de todo el circuito, no importa donde la ubique.
- L puede representar la autoinductancia de la bobina más la del circuito. No tiene resistencia.
- Un switch permite prender o apagar la corriente I.
- La batería tiene una FEM de valor $\mathcal{E}$



Circuitos con autoinductancias

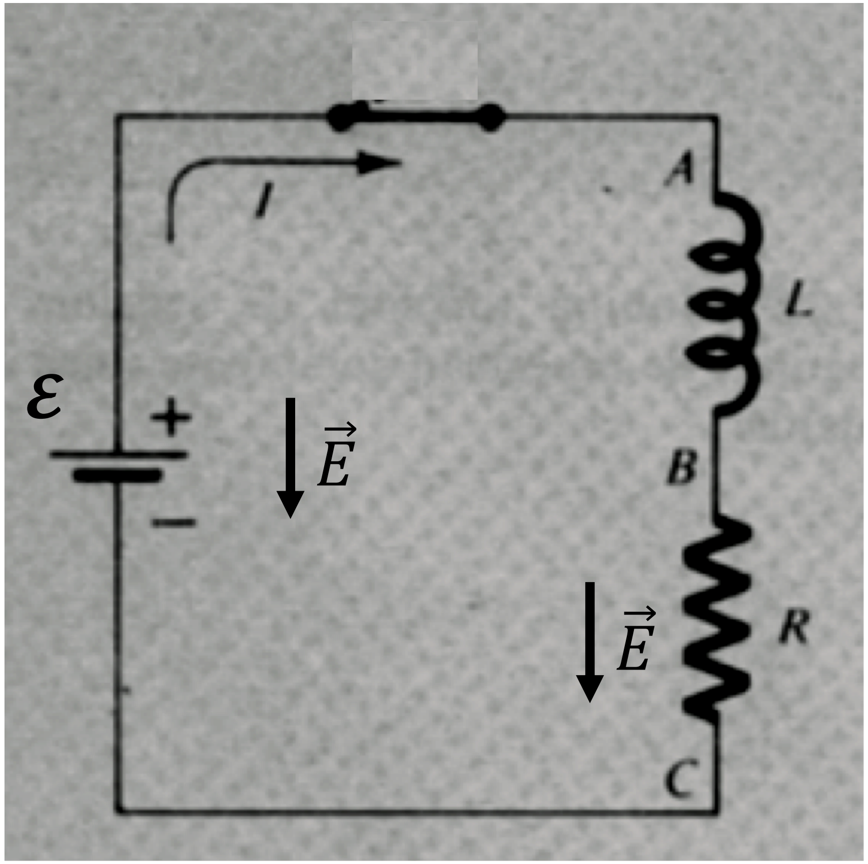
- Cerramos el switch.
- Si la corriente varía de la manera $\frac{dI}{dt}$ se inducirá una $FEM_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$.

- Entonces, la ley de Faraday queda:

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente tenemos:

$$-\boldsymbol{\varepsilon} + IR \ = -L\frac{dI}{dt}$$



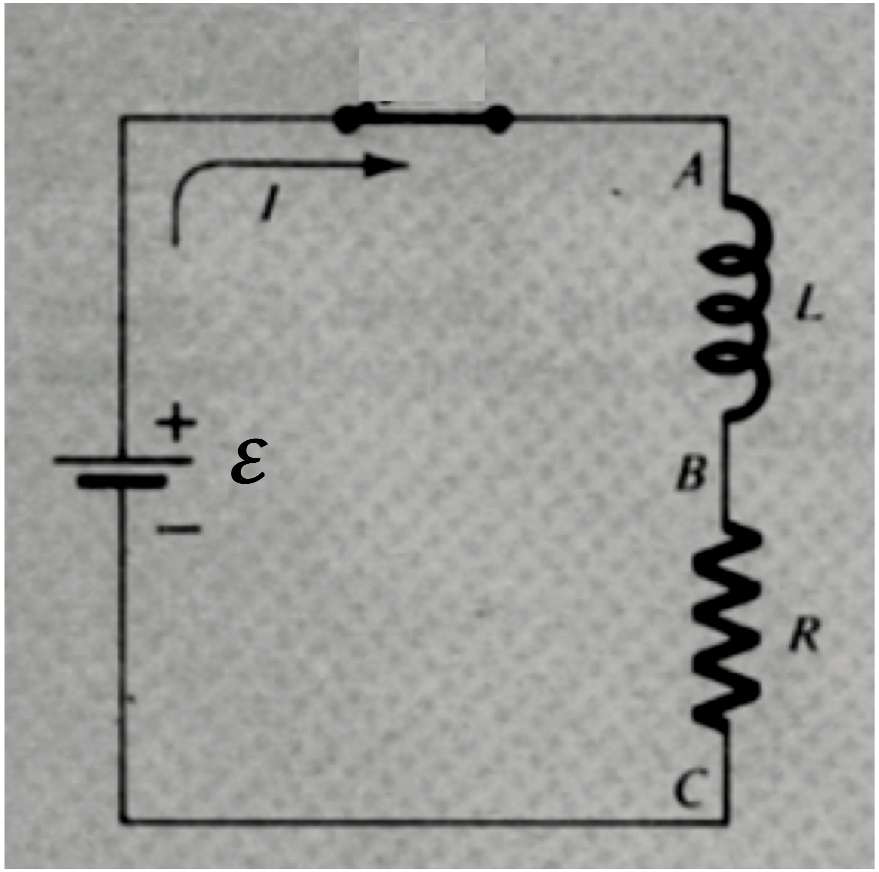
Circuitos con autoinductancias

- Formalmente esto es como una ley de Kirchhoff pero con los signos cambiados y ahora con un término dependiente de L.
- Multiplicando por -1 tenemos

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} - IR \;= L\frac{dI}{dt}$$

o bien

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} - IR \; - L\frac{dI}{dt} = 0$$



Circuitos con autoinductancias

- La ecuación diferencial ordinaria de primer orden inhomogénea

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$

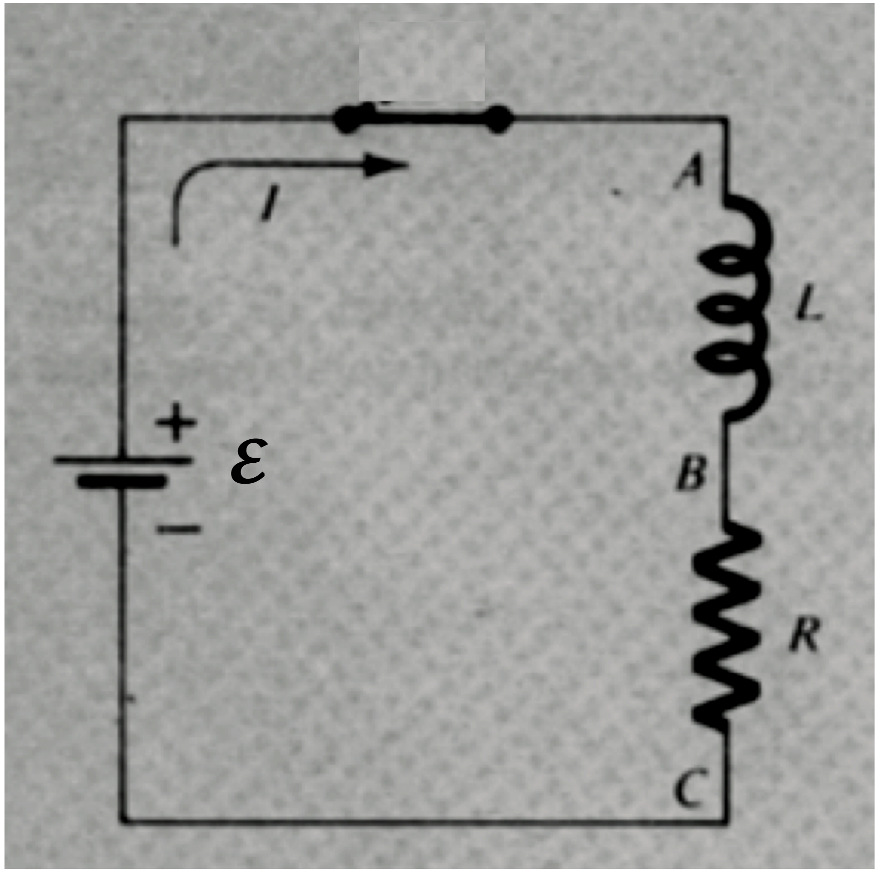
tiene como solución la suma de la solución general de la homogénea

$$\frac{dy_h}{dx} = ay_h$$

más una solución de la inhomogénea

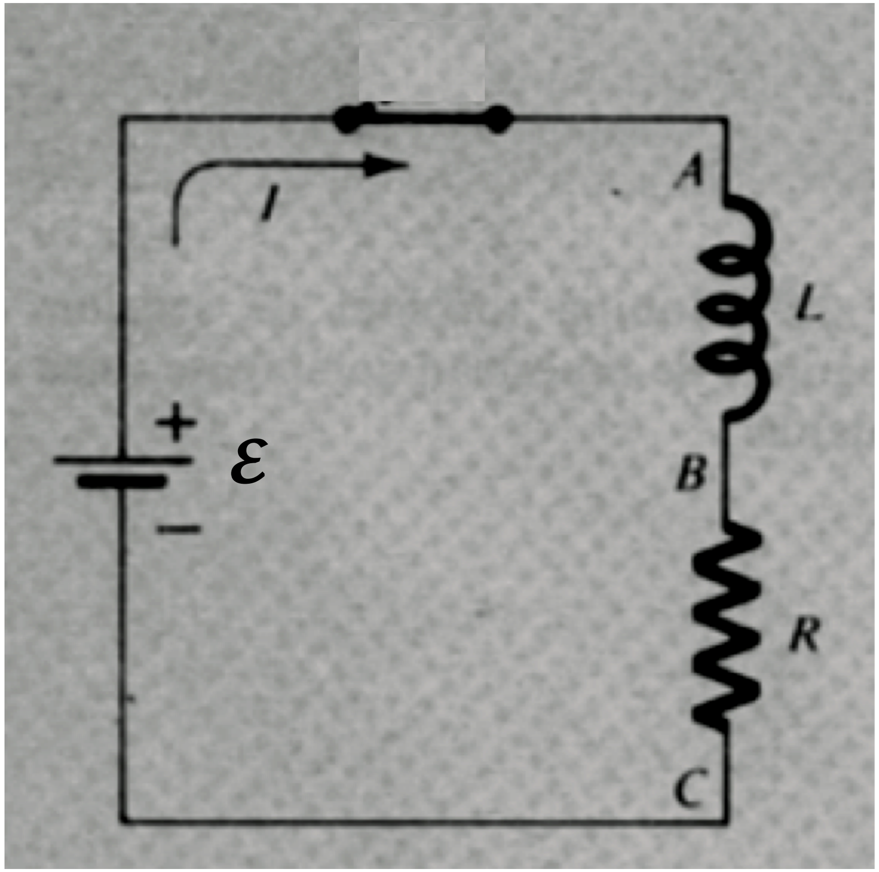
$$y = y_h + y_i$$

donde $y_i = -\frac{b}{a}$



Circuitos con autoinductancias

- En nuestro caso: $I = y, t = x, a = -\frac{R}{L}, b = \frac{\mathcal{E}}{L}$



La homogénea es

$$\frac{dI_h}{dt} = -\frac{R}{L} I_h$$

entonces

$$I_h = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

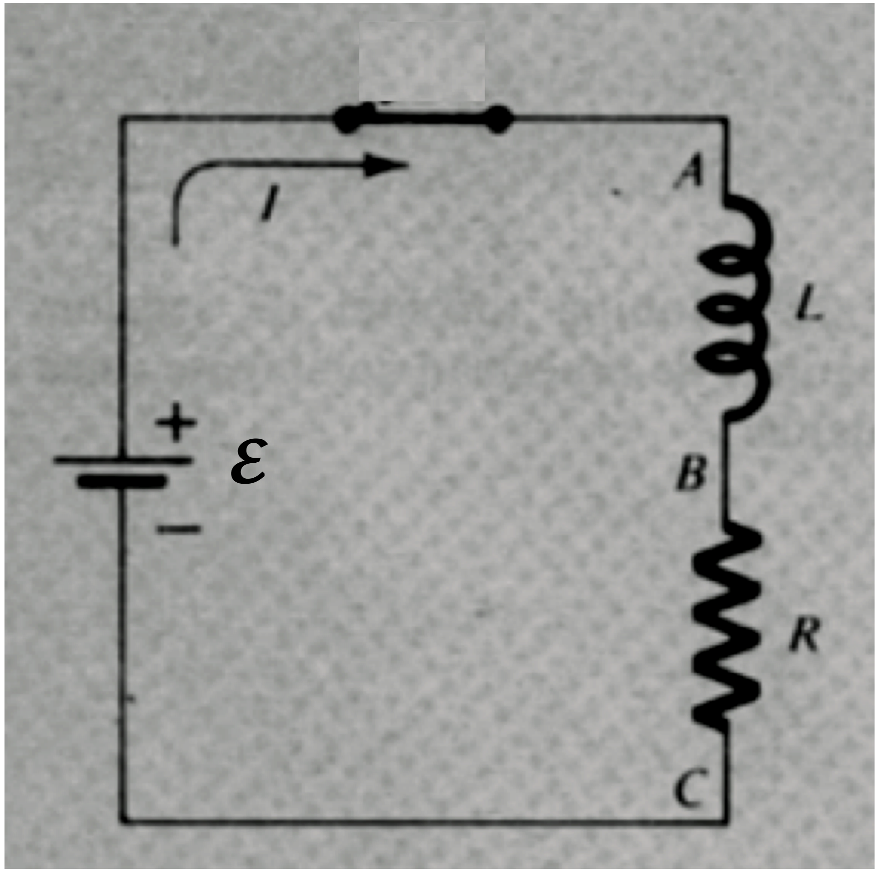
Circuitos con autoinductancias

- Por otro lado, una particular de la inhomogénea puede ser una constante:

$$I_i = -\frac{\frac{\mathcal{E}}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

entonces

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}$$



Circuitos con autoinductancias

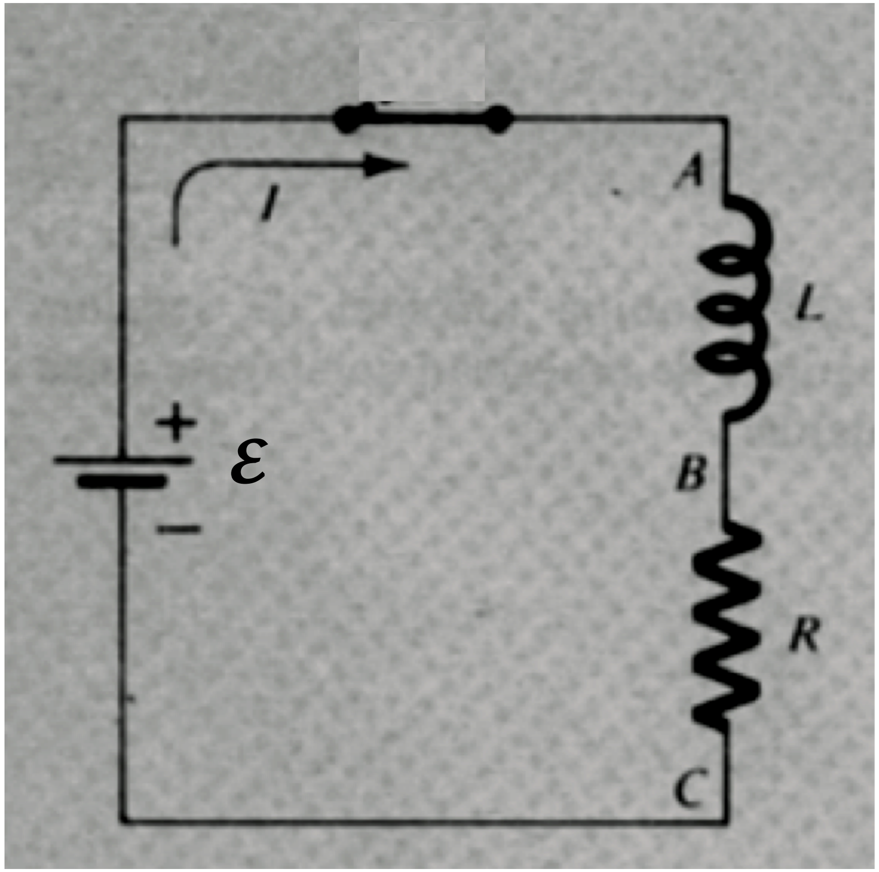
- Apliquemos las condiciones iniciales para despejar C
- En $t = 0$ cerramos el switch y todavía no hay corriente

$$I(0) = 0 = C + \frac{\mathcal{E}}{R}$$

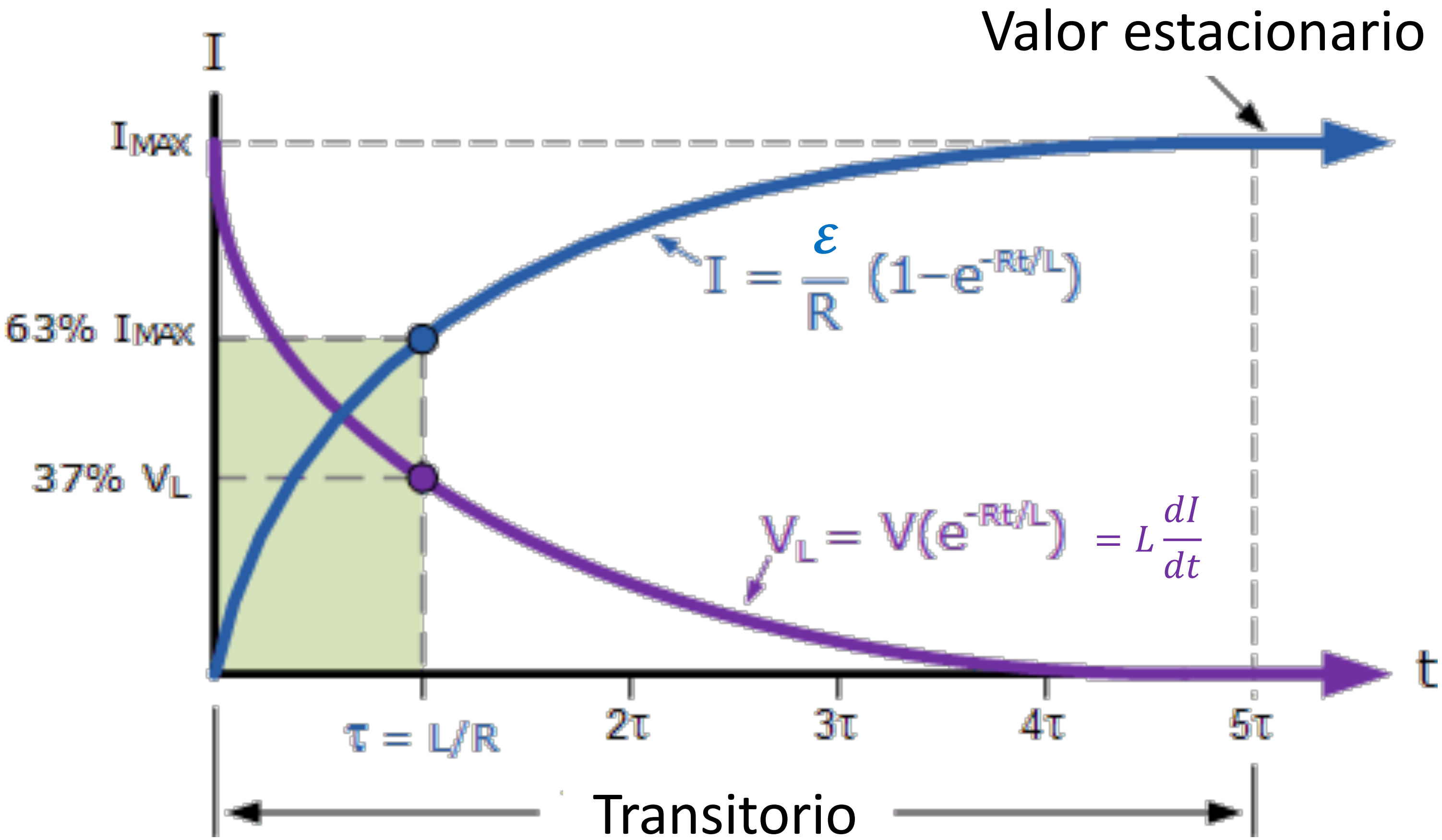
$$C = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Entonces la solución final es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Circuitos con autoinductancias

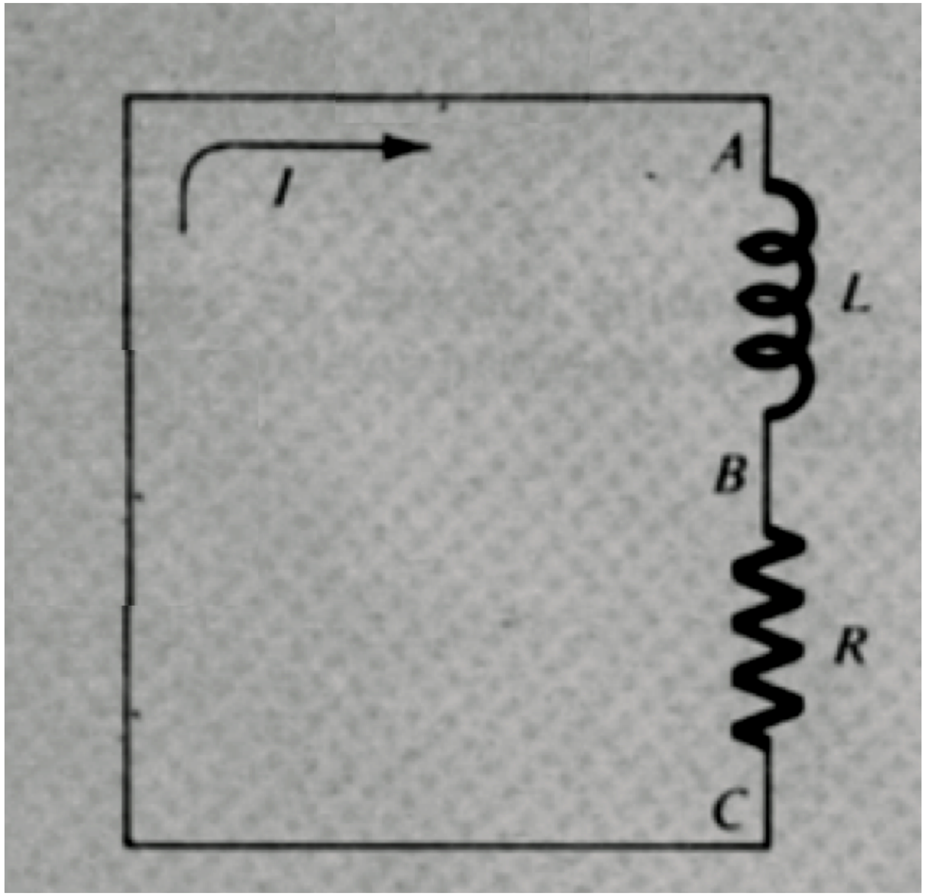


Circuitos con autoinductancias

- Tras cerrar el switch, el circuito demora en alcanzar el valor estacionario de la corriente $\frac{\mathcal{E}}{R}$
- Esta demora viene dada por $\frac{L}{R}$, cuanto más grande es este cociente, más se demora.
- Esto es porque la bobina se opone via ley de Faraday a que circule la corriente que la induce.
- Esta oposición también se puede ver como una FEM inducida que se opone a $\mathcal{E}$ a medida que el flujo crece en la bobina a una tasa $L\frac{dI}{dt}$ almacenando energía.

Descarga de un circuito RL

- ¿Qué ocurre si abrimos el switch una vez que circula la corriente estacionaria?
- ¡Tenemos que tener mucho cuidado porque $\frac{dI}{dt}$ sería infinito y podríamos tener un arco en el switch!
- Entonces, conviene quitar la batería cortocircuitando la combinación RL manteniendo cerrado el switch.



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR = L\frac{dI}{dt}$$

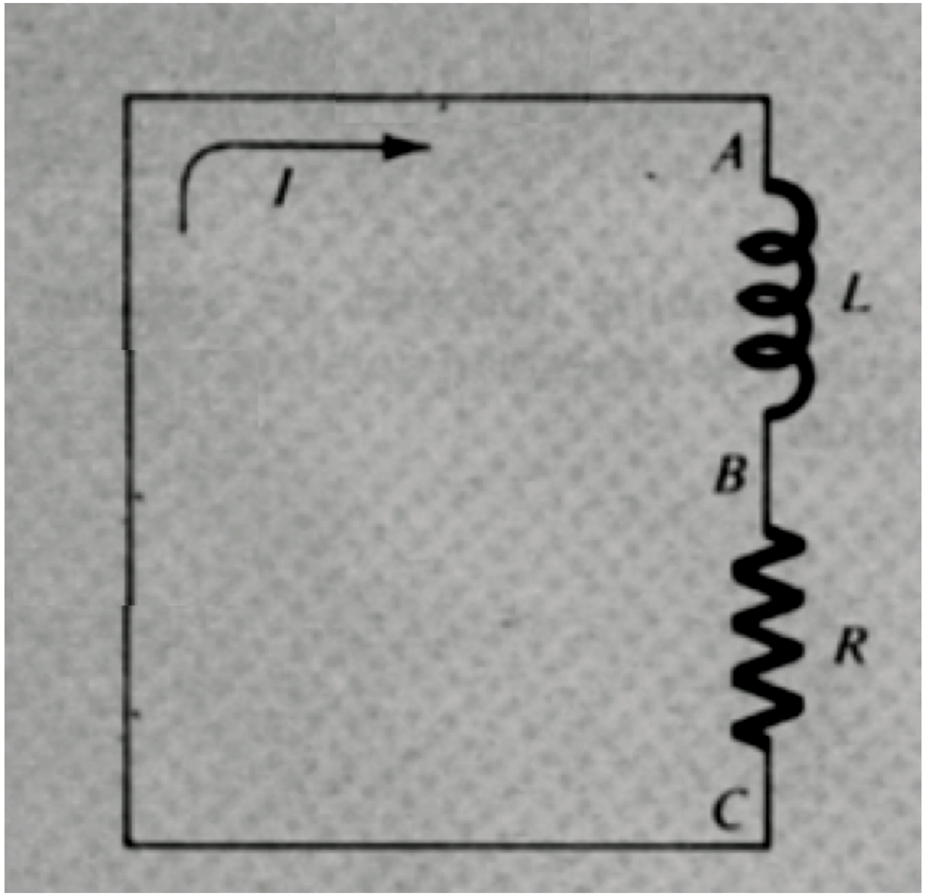
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR = L\frac{dI}{dt}$$

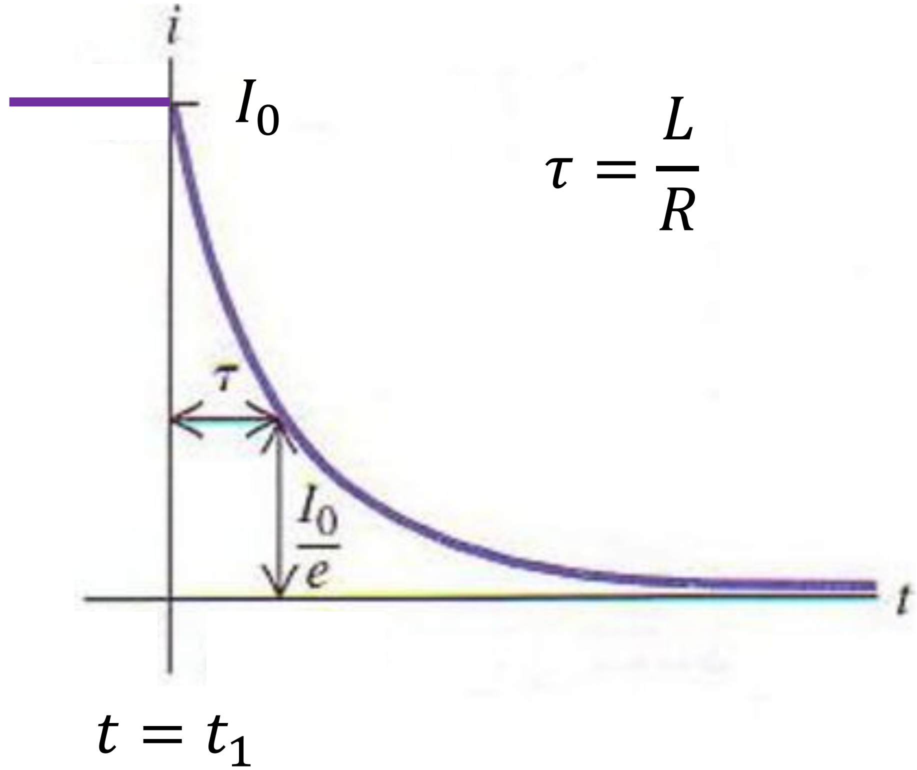
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



Almacenamiento de energía en una bobina

- Durante la descarga del circuito, la resistencia R disipa energía.

- Recordemos que la energía disipada por unidad de tiempo es
$$P = VI = I^2R$$

- Entonces, la energía disipada a partir del instante t_1
$$U = \int_{t_1}^{\infty} I^2R \; dt = I_0^2R \int_{t_1}^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}(t-t_1)} \, dt$$

reemplazando $x = t - t_1$ con $dx = dt$

Almacenamiento de energía en una bobina

- Reemplazando $x = \frac{2R}{L}(t - t_1)$ con $dx = \frac{2R}{L}dt$

$$U = I_0^2 R \frac{L}{2R} \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} L I_0^2$$

…ya que $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$

- Entonces, en general se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

- Es natural considerarla como la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

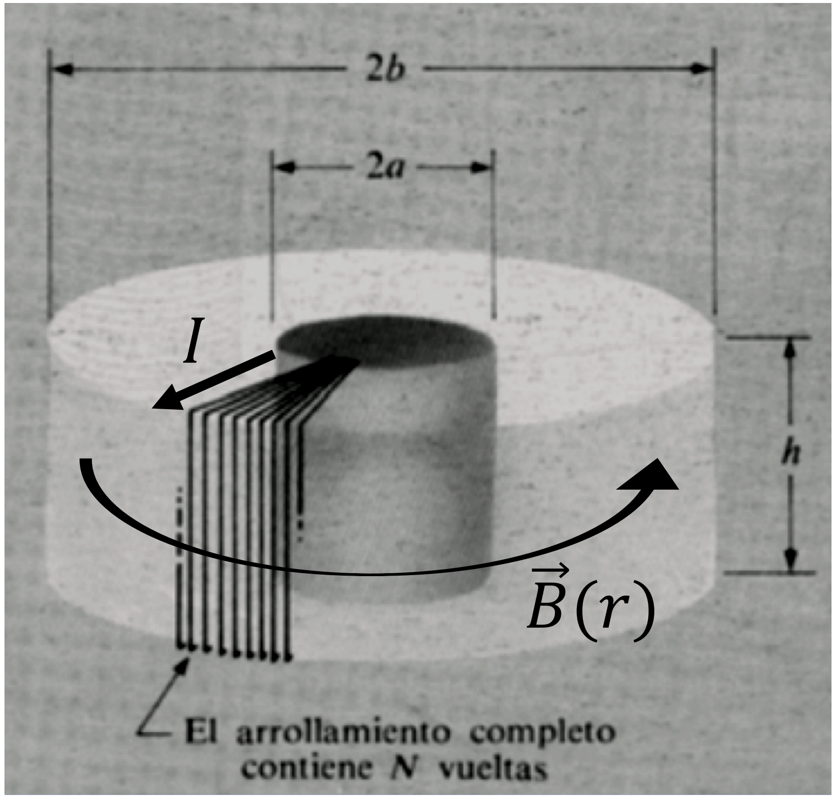
Almacenamiento de energía en una bobina

- Veamos para el caso de una bobina toroidal, la autoinductancia nos daba:

$$L = \frac{h\mu_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Por otro lado, el campo magnético a una distancia r

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



Almacenamiento de energía en una bobina

- Integremos B^2 en todo el volumen del toroide:

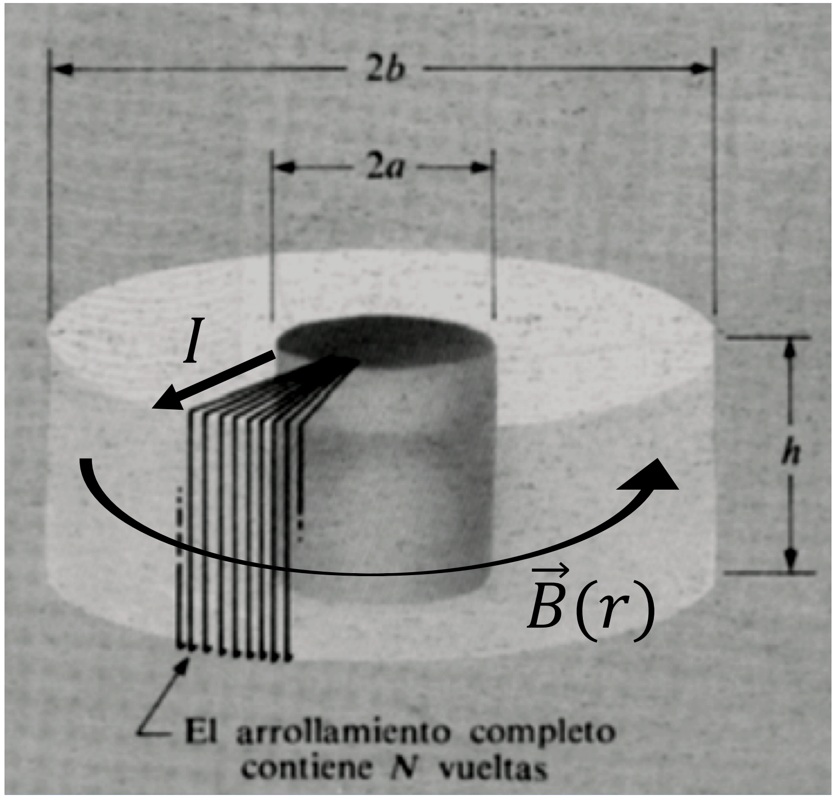
$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}\right)^2 2\pi r h\,dr = \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 h I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Vemos inmediatamente que:

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \tfrac{1}{2}LI^2$$

- Entonces:

$$\boxed{U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{el campo}}} B^2\,dv}$$



Densidad de energía magnética

- Entonces, la cantidad de energía magnética por unidad de volumen es:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

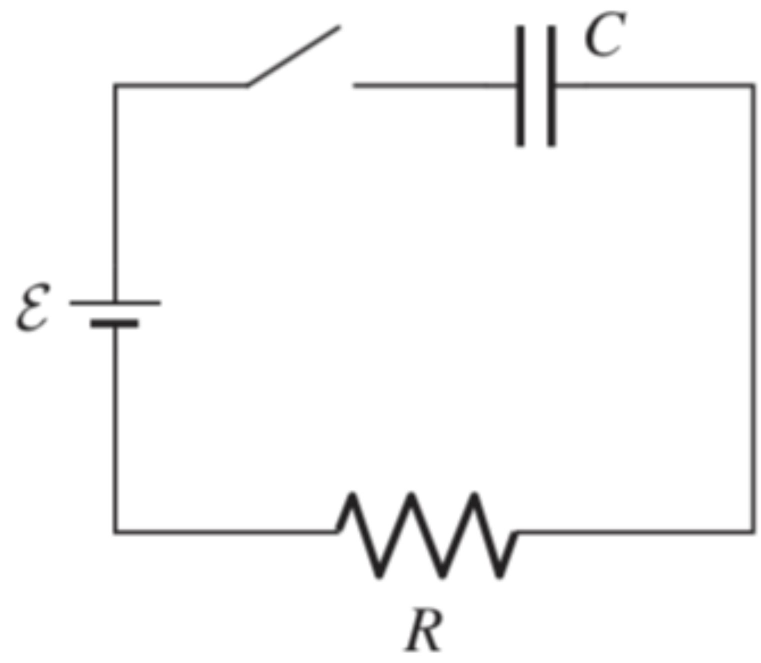
- Y la energía almacenada en un volumen V

$$\iiint_V u \, dv = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} \, dv$$

Otros circuitos con corrientes transitorias

Circuito RC

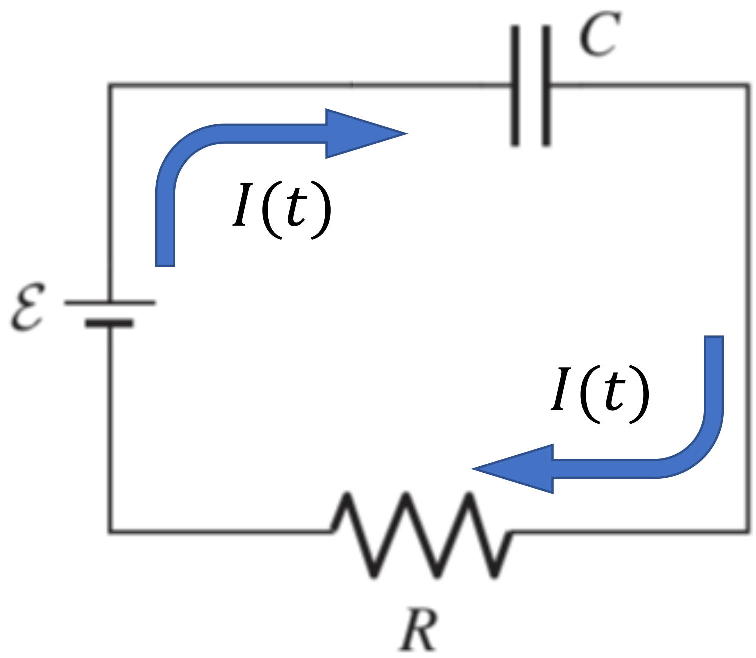
- Supongamos que colocamos una fuente de FEM = $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ conectada en serie a un capacitor C descargado y una resistencia R.
- El circuito está abierto de manera que no circula corriente.
- Estudiemos la respuesta del circuito en régimen transitorio desde que se cierra el switch y hasta que alcance un estado estacionario.



Circuito RC

- Al cerrarse el switch, una corriente $I(t)$ fluirá en el sentido de la flecha comenzando a cargar el capacitor.
- Del otro lado, una cantidad igual y opuesta de carga comenzará a acumularse dando lugar a una corriente $I(t)$ en el tramo que incluye a R.
- Por conservación de la carga, la carga en el capacitor y la corriente se relacionan como:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$



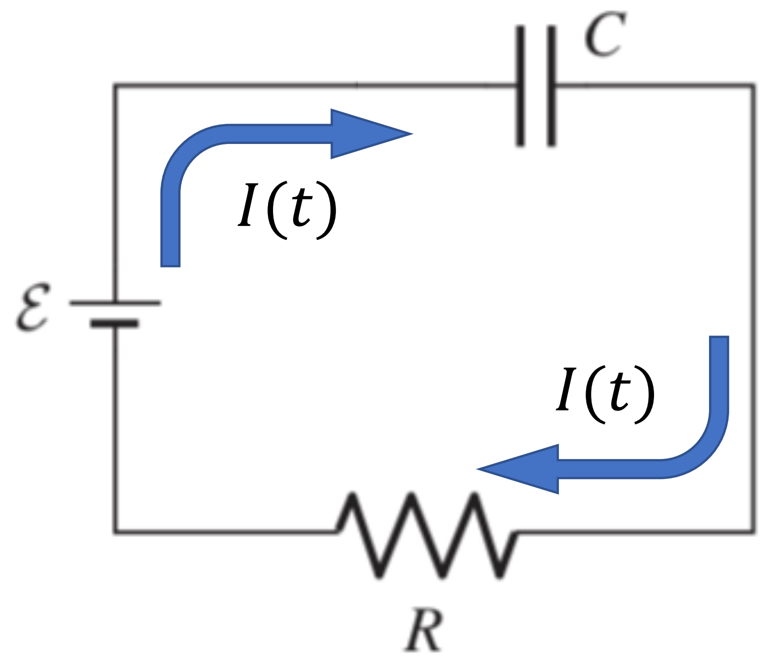
Circuito RC

- Como no hay bobina, las leyes de Kirchhoff y de Faraday coinciden y entonces en el sentido de la corriente escribo:

$$\varepsilon - V_c - I(t)R = 0$$

donde

$$V_c = \frac{Q(t)}{C}$$



con la carga $Q(t)$ variando a medida que el capacitor se carga.

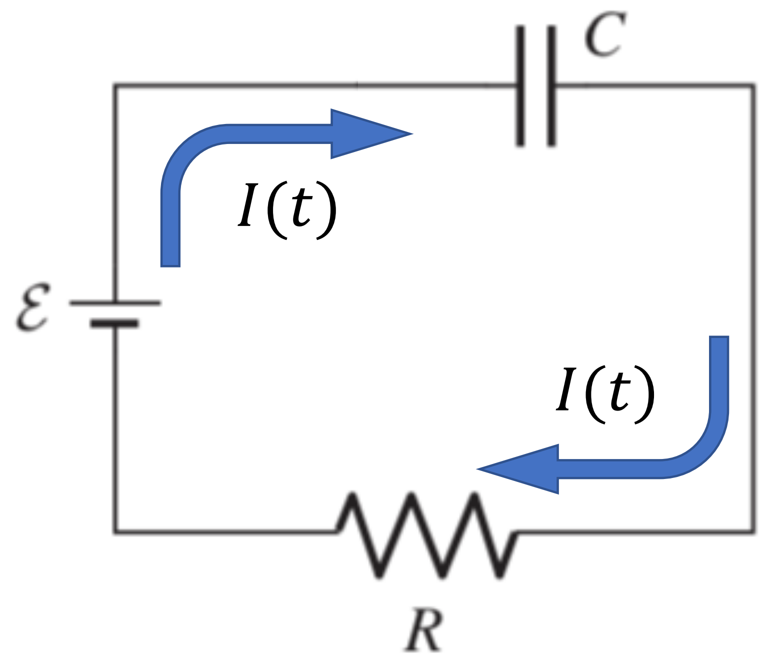
Circuito RC

- En términos de la carga, la ecuación anterior resulta:

$$\varepsilon - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

- Tenemos el mismo tipo de ecuación que resolvimos para el circuito RL

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$



Conservación de la carga y signos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

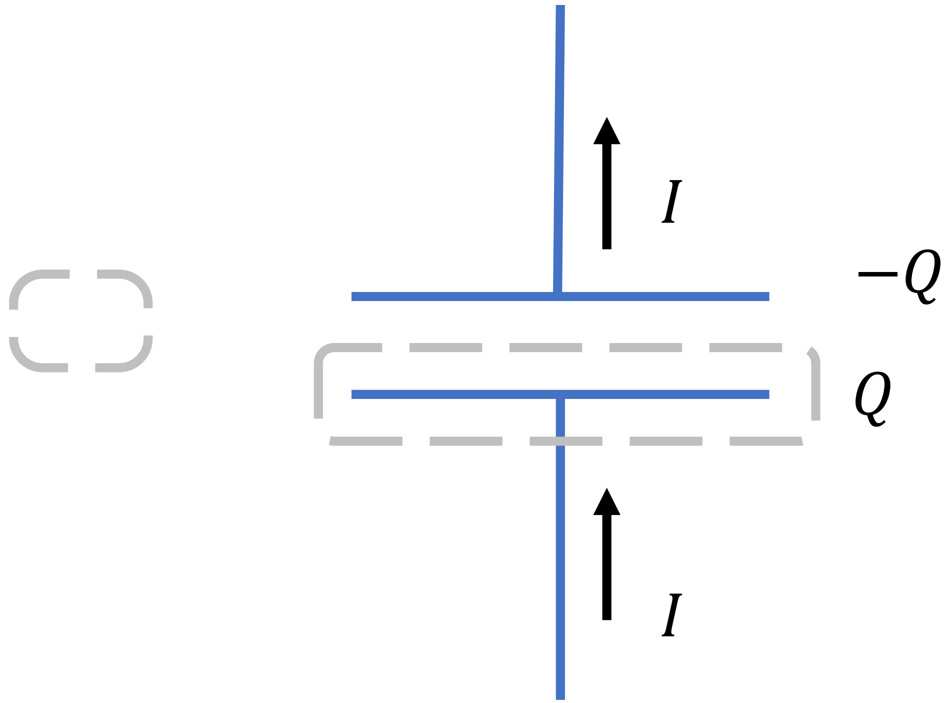
$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dv = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

- Flujo entrante a la superficie cerrada

$$-I = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho\, dv$$

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt}$$

$Q(t)$ es la carga en la placa



Circuito RC

- Ahora tenemos: $Q = y, t = x, a = -\frac{1}{RC}$,

y $b = \frac{\mathcal{E}}{R}$

- Entonces, la solución homogénea es:

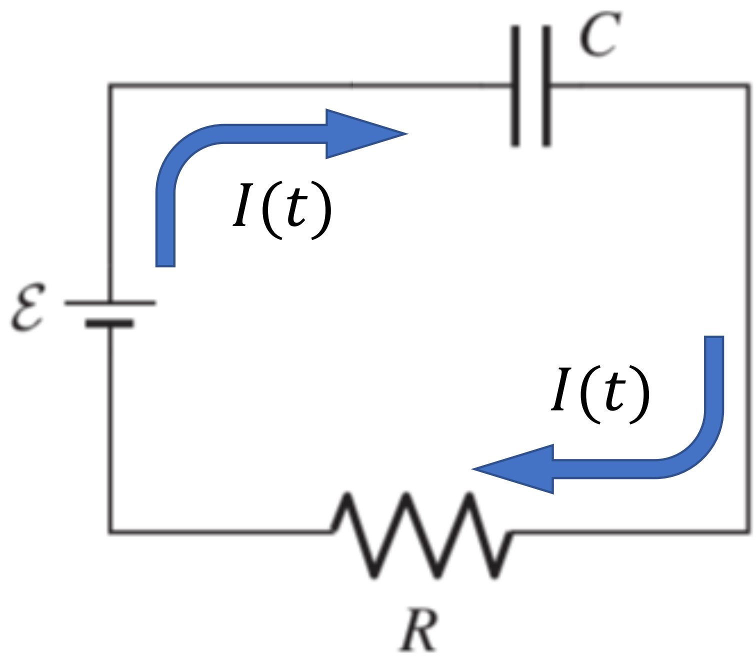
$$Q_h = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- A la cual le sumamos la solución particular de la inhomogénea que es

$$Q_i = \mathcal{E}C$$

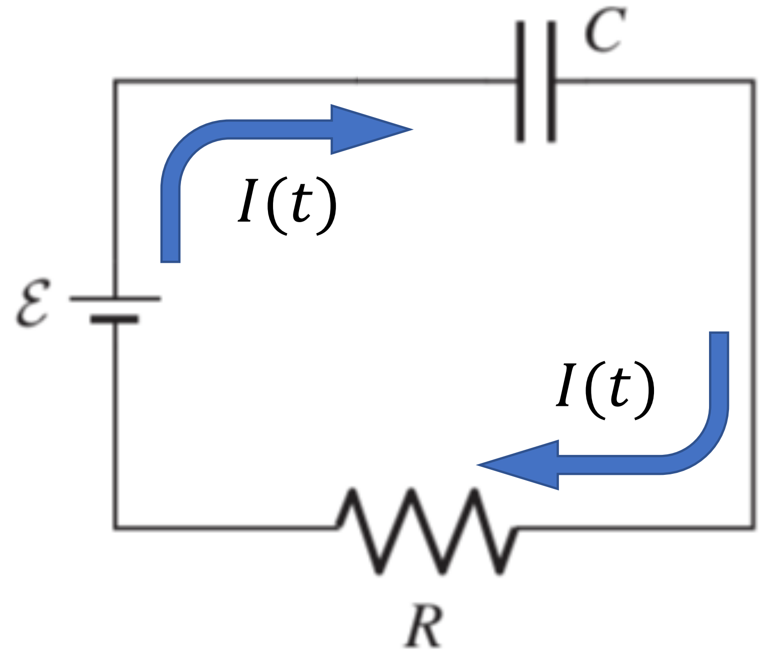
- Entonces

$$Q(t) = \mathcal{E}C + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

- Apliquemos ahora la condición inicial…



Pregunta

¿Cuál es la condición inicial para la carga en el capacitor?

Circuito RC

- Apliquemos ahora la condición inicial

$$Q(0) = 0$$

el capacitor está inicialmente descargado

- Entonces:

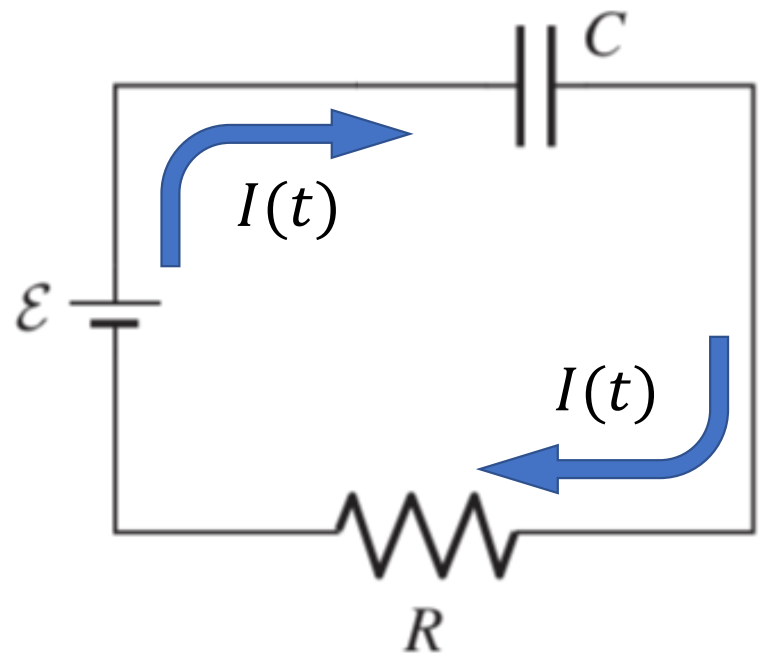
$$\boldsymbol{\mathcal{E}} C = -\ K$$
$$K = -\boldsymbol{\mathcal{E}} C$$

- Con lo cual la solución final es:

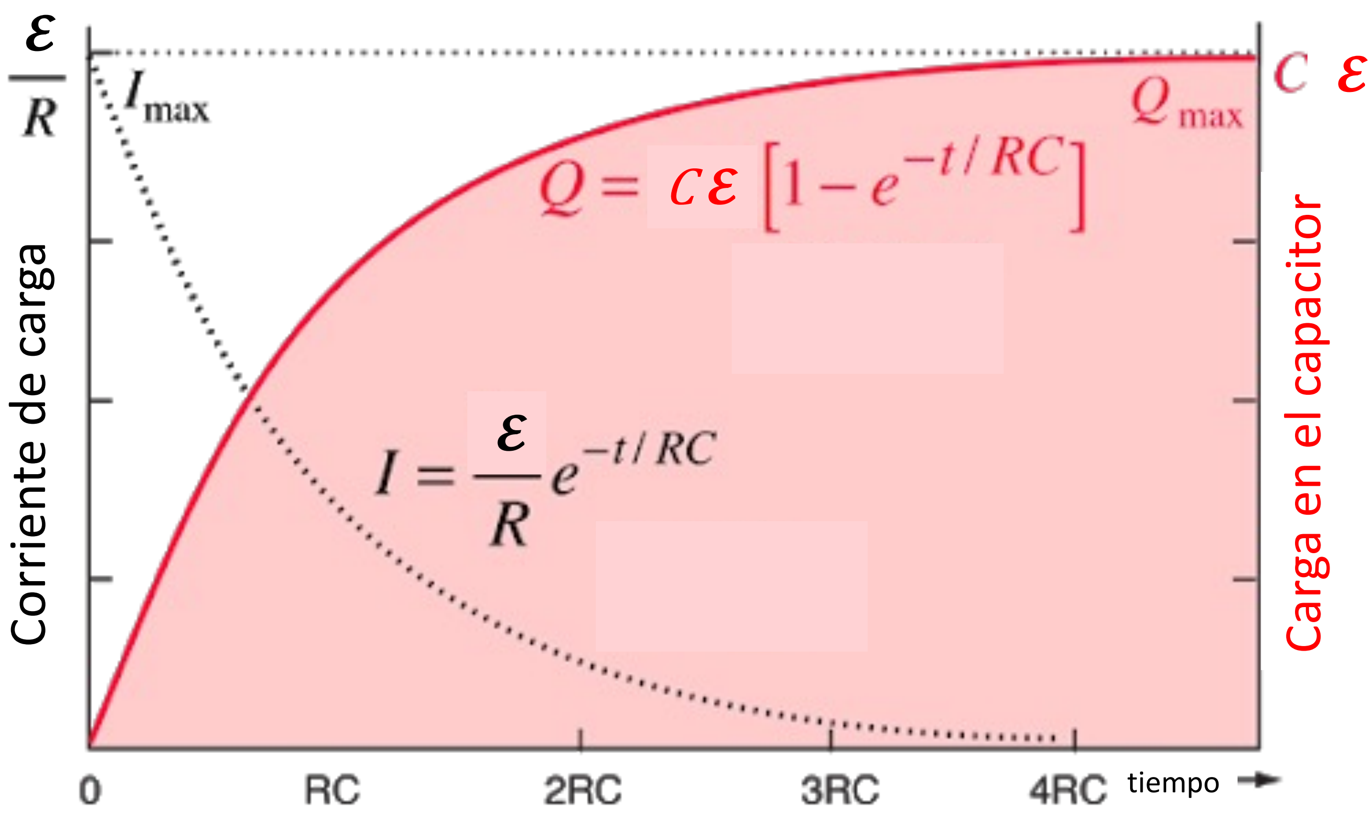
$$Q(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}} C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

y

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{R}\ e^{-\frac{t}{RC}}$$



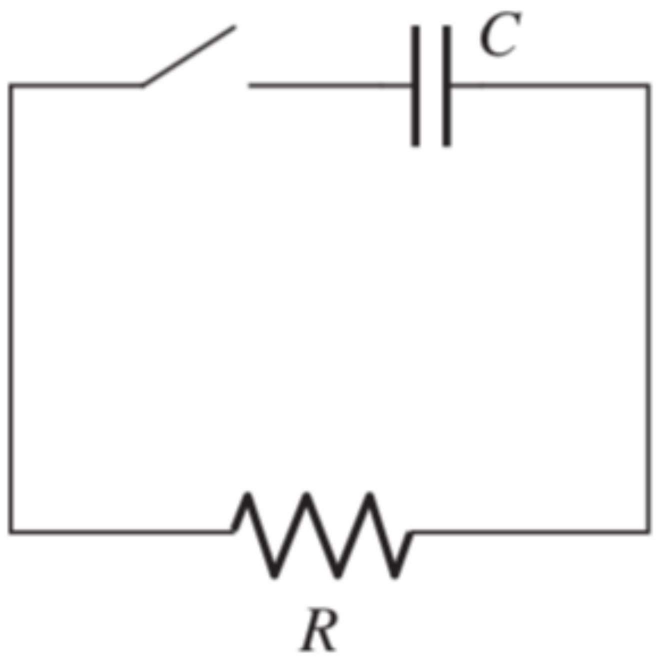
Circuito RC



$\frac{\varepsilon}{R}$
I_{max}
$C\ \varepsilon$
Q_{max}
$Q = C\varepsilon\left[1 - e^{-t/RC}\right]$
$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$
Corriente de carga
Carga en el capacitor
0
RC
2RC
3RC
4RC
tiempo

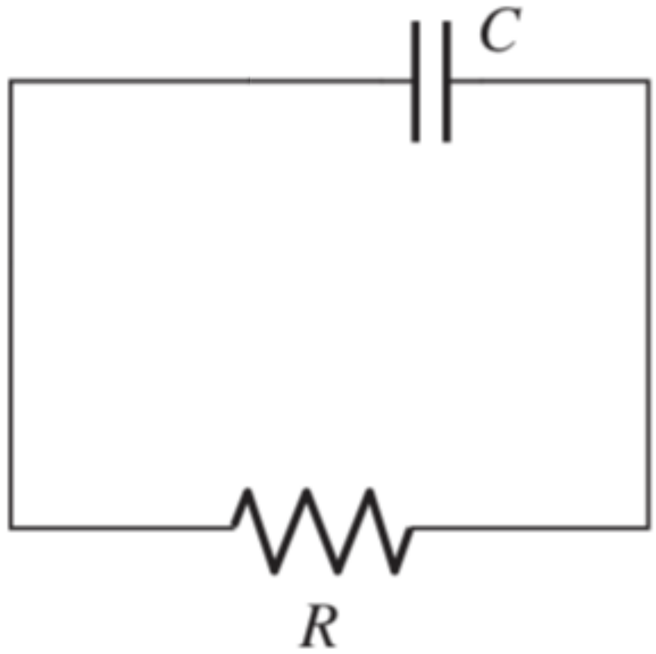
Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.



Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.
- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente I.



Pregunta

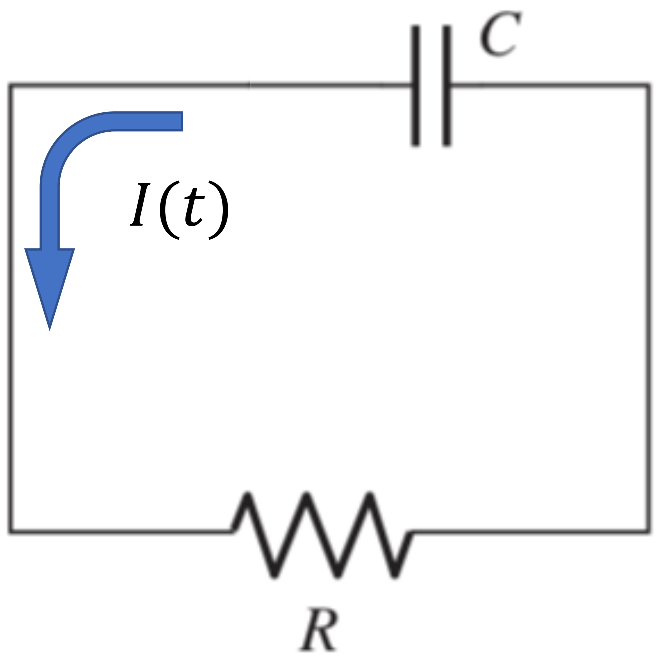
- ¿Podemos anticipar la dirección de I al cerrar el switch ?

Descarga de circuito RC

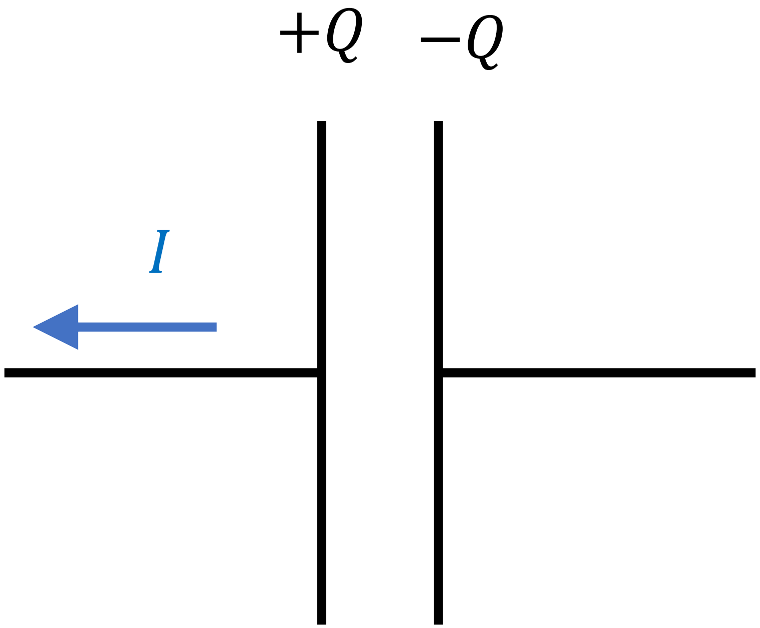
- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.

- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente $I(t)$.

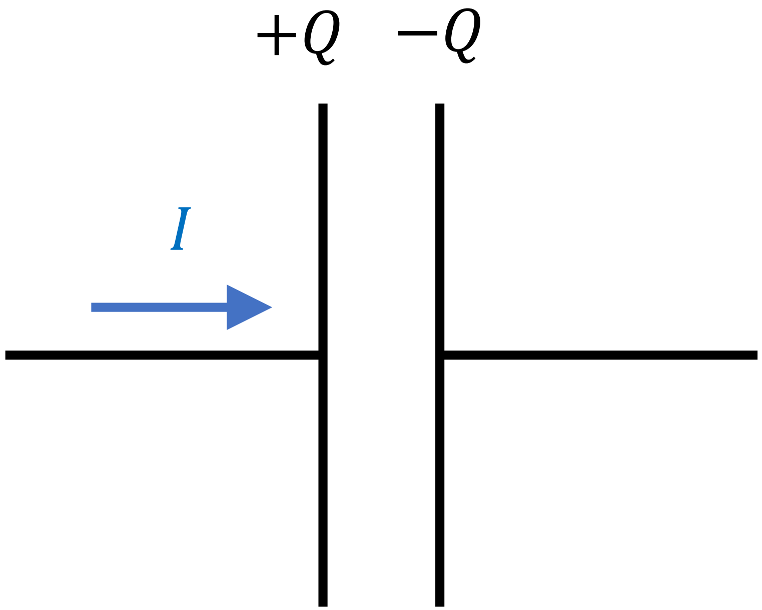
- La ley de Kirchhoff nos dice:
$$-\frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$



Conservación de la carga en capacitores



$$I = -\frac{dQ}{dt}$$



$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Descarga de circuito RC

- Y la solución ya la conocemos. Si comenzamos a contar desde un tiempo t_1:

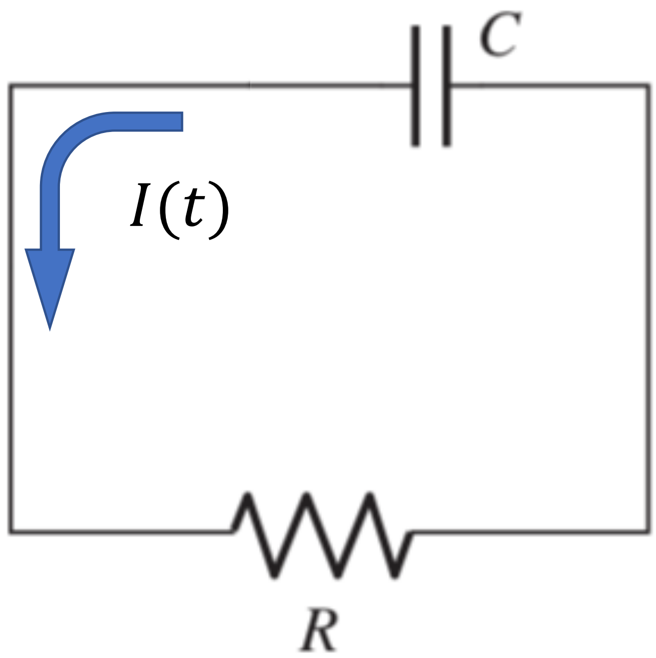
$$Q(t) = Ke^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- La carga inicial del capacitor va a ser la que terminamos teniendo al cargarlo. Retomando el resultado anterior:

$$Q(t_1) = K = \mathcal{E}C$$

- Entonces:

$$Q(t) = \mathcal{E}Ce^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



Descarga de circuito RC

- De la misma manera, la corriente decrecerá

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- De la misma manera el voltaje en el capacitor:

$$V_c = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$