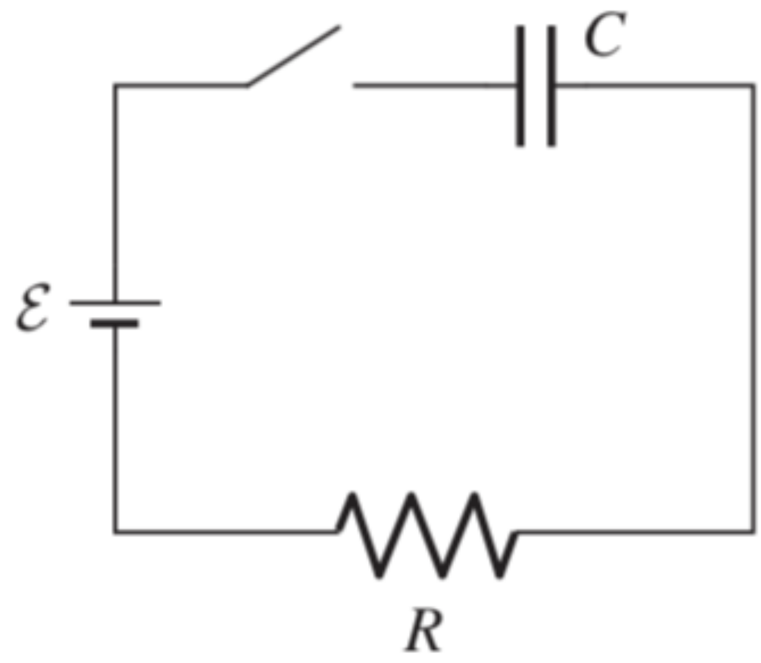
Circuito RC

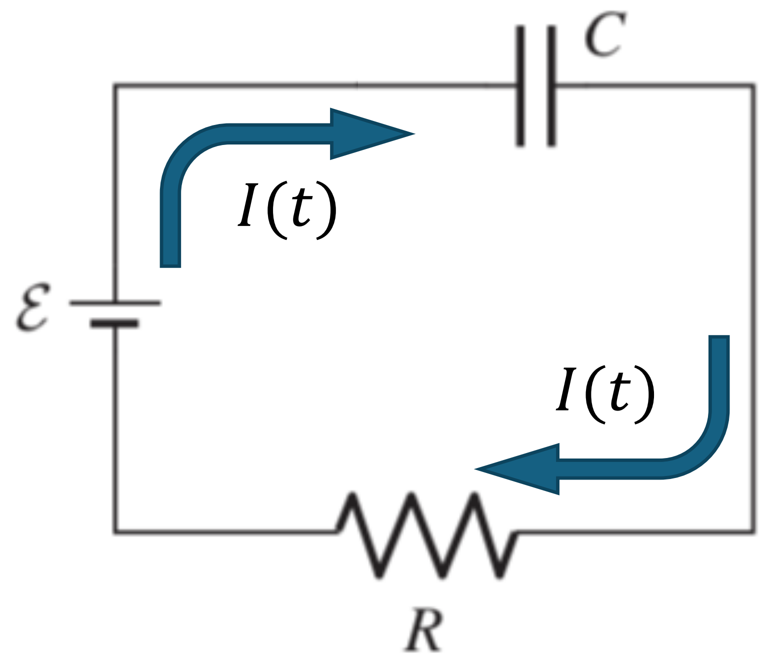
- Supongamos que colocamos una fuente de FEM = $\mathcal{E}$ conectada en serie a un capacitor C descargado y una resistencia R.
- El circuito está abierto de manera que no circula corriente.
- Estudiemos la respuesta del circuito en régimen transitorio desde que se cierra el switch y hasta que alcance un estado estacionario.



Circuito RC

- Al cerrarse el switch, una corriente $I(t)$ fluirá en el sentido de la flecha comenzando a cargar el capacitor.
- Del otro lado, una cantidad igual y opuesta de carga comenzará a acumularse dando lugar a una corriente $I(t)$ en el tramo que incluye a R.
- Por conservación de la carga, la carga en el capacitor y la corriente se relacionan como:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$



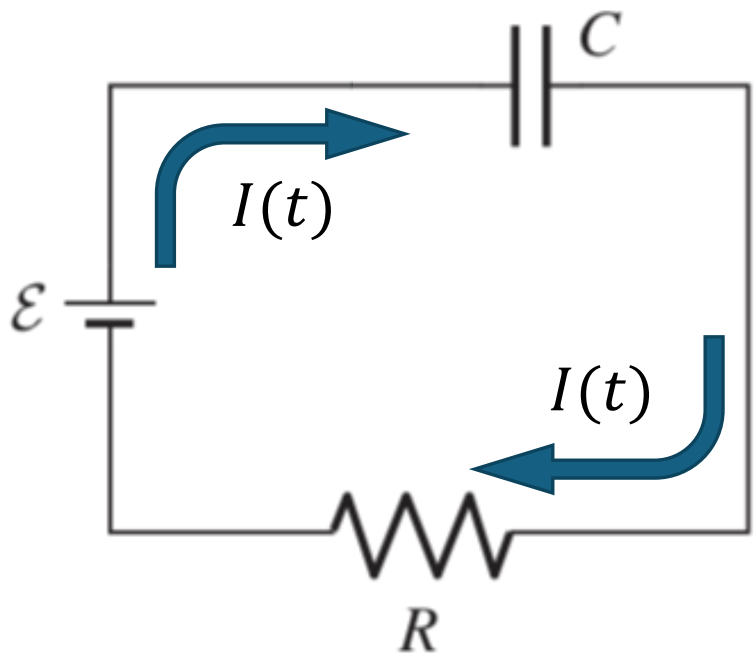
Circuito RC

- Como no hay bobina, las leyes de Kirchhoff y de Faraday coinciden y entonces en el sentido de la corriente escribo:

$$\varepsilon - V_c - I(t)R = 0$$

donde

$$V_c = \frac{Q(t)}{C}$$



con la carga $Q(t)$ variando a medida que el capacitor se carga.

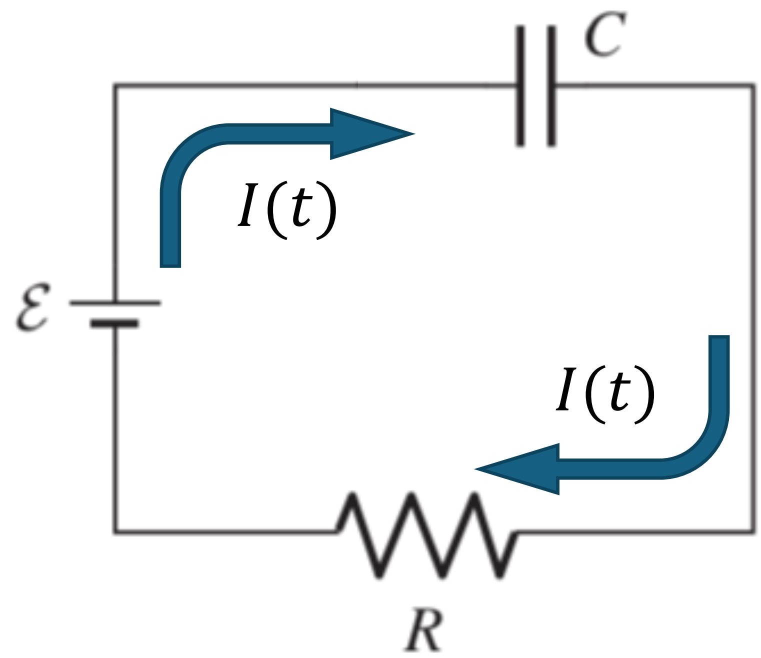
Circuito RC

- En términos de la carga, la ecuación anterior resulta:

$$\varepsilon - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

- Tenemos el mismo tipo de ecuación que resolvimos para el circuito RL

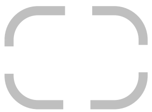
$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$



Conservación de la carga y signos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

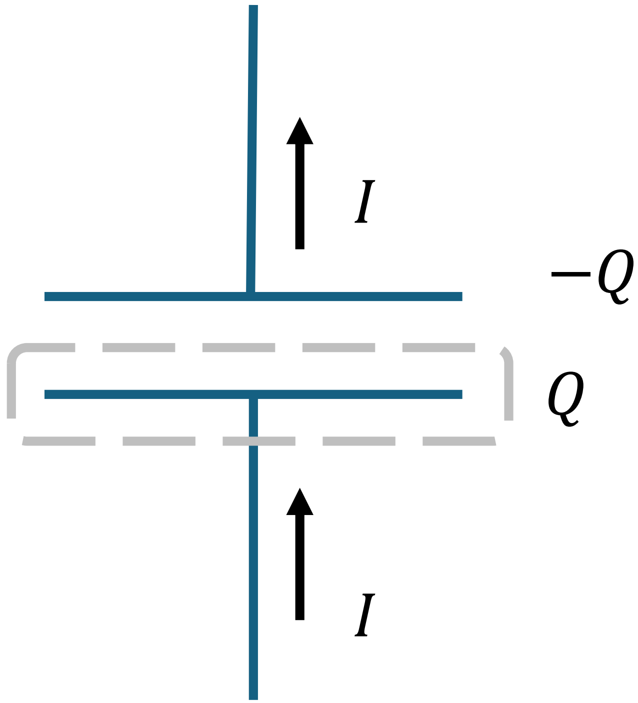
$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dv = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

- Flujo entrante a la superficie cerrada 

$$-I = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho\, dv$$

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt}$$

$Q(t)$ es la carga en la placa



Circuito RC

- Ahora tenemos: $Q = y, t = x, a = -\frac{1}{RC},$

y $b = \frac{\mathcal{E}}{R}$

- Entonces, la solución homogénea es:

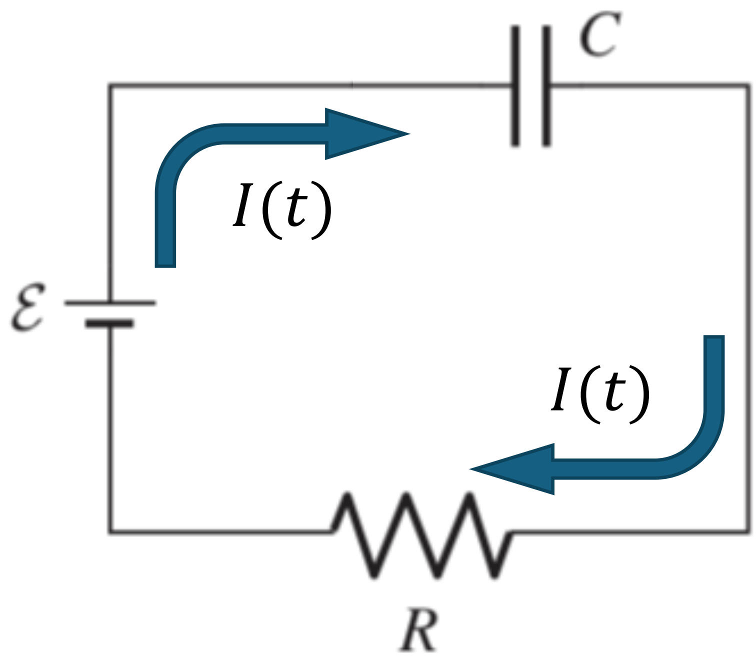
$$Q_h = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- A la cual le sumamos la solución particular de la inhomogénea que es

$$Q_i = \mathcal{E}C$$

- Entonces

$$Q(t) = \mathcal{E}C + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

- Apliquemos ahora la condición inicial

$$Q(0) = 0$$

el capacitor está inicialmente descargado

- Entonces:

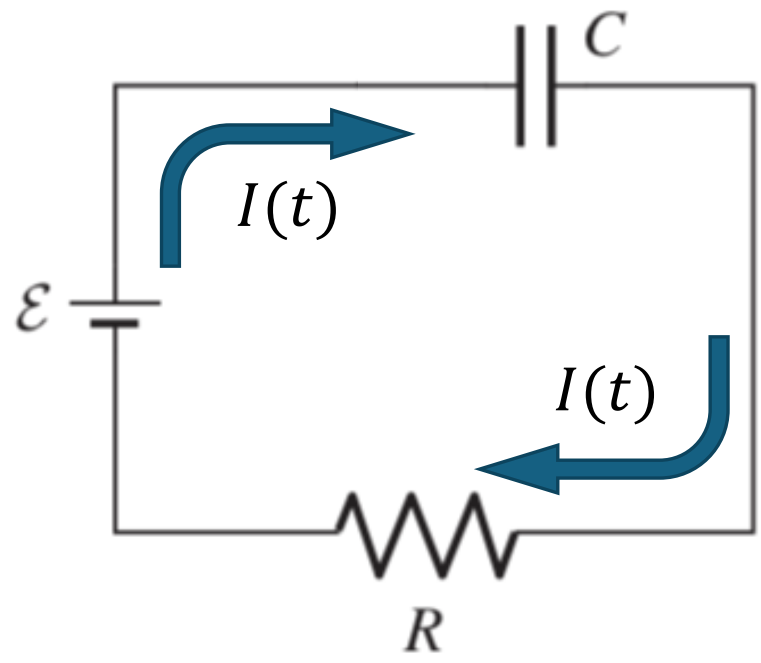
$$\mathcal{E}C = -\ K$$
$$K = -\mathcal{E}C$$

- Con lo cual la solución final es:

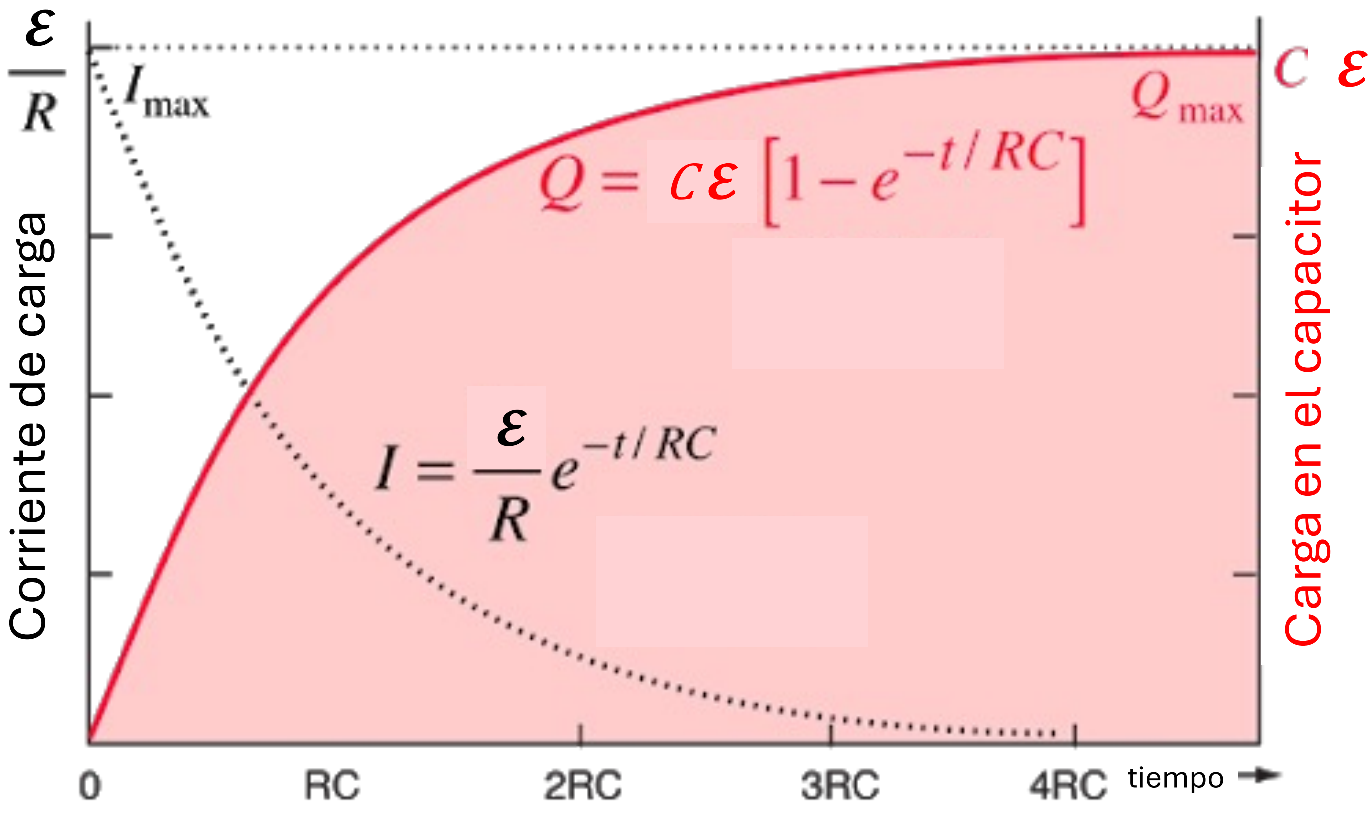
$$Q(t) = \mathcal{E}C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

y

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\ e^{-\frac{t}{RC}}$$



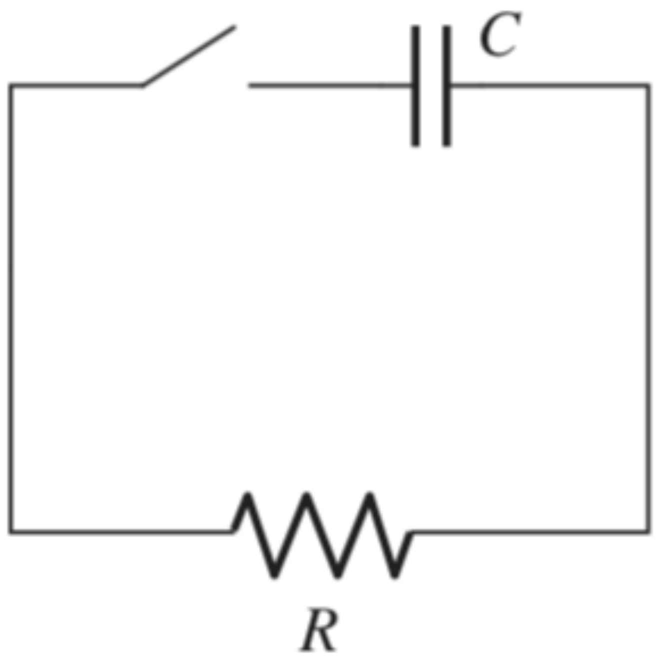
Circuito RC



$\frac{\varepsilon}{R}$
I_{max}
Corriente de carga
$C\varepsilon$
Q_{max}
Carga en el capacitor
$Q = C\varepsilon\left[1-e^{-t/RC}\right]$
$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$
0
RC
2RC
3RC
4RC
tiempo

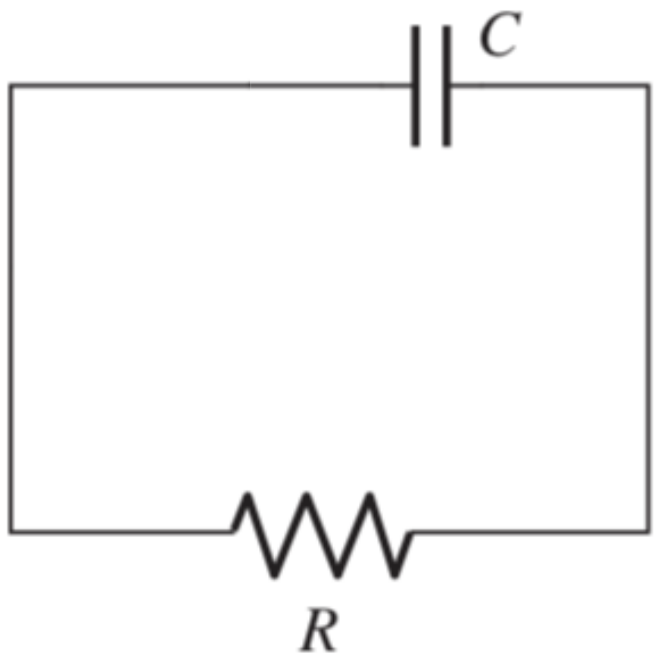
Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.



Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.
- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente I.



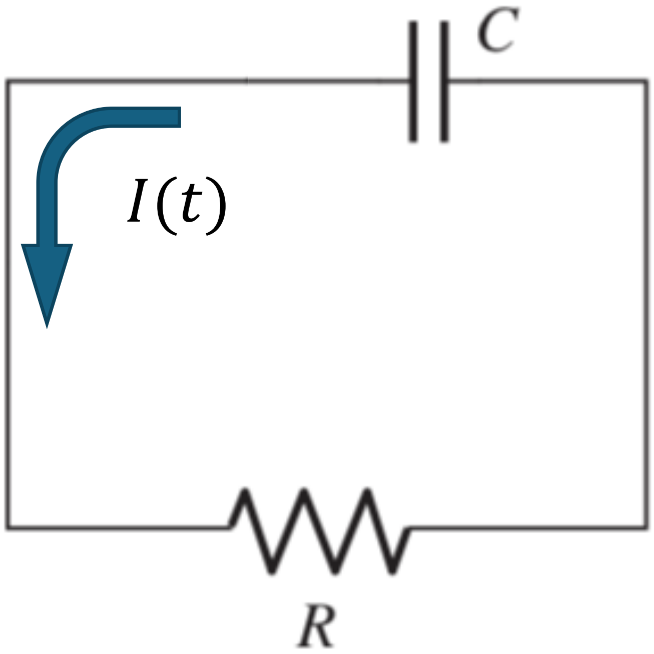
Pregunta

- ¿Podemos anticipar la dirección de I al cerrar el switch ?

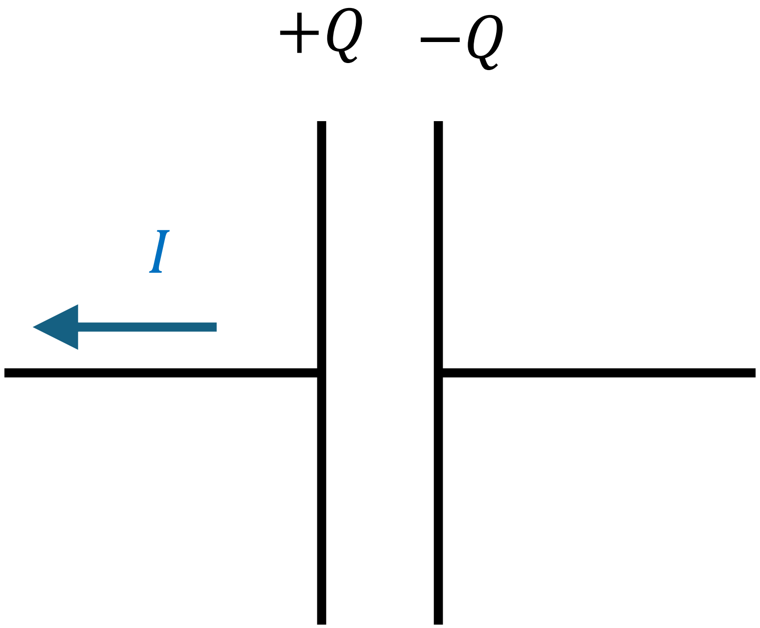
Descarga de circuito RC

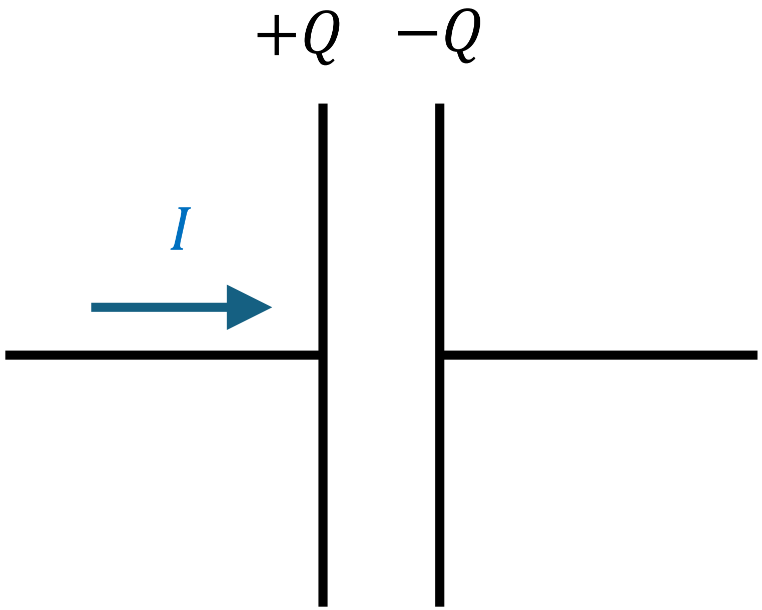
- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.
- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente $I(t)$.
- La ley de Kirchhoff nos dice:

$$-\frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$



Conservación de la carga en capacitores





$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Descarga de circuito RC

- Y la solución ya la conocemos. Si comenzamos a contar desde un tiempo t_1:

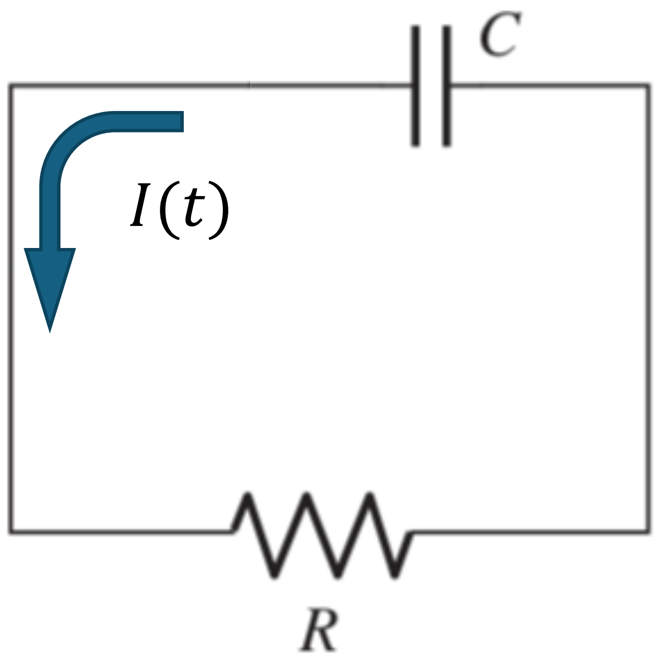
$$Q(t) = Ke^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- La carga inicial del capacitor va a ser la que terminamos teniendo al cargarlo. Retomando el resultado anterior:

$$Q(t_1) = K = \mathcal{E}C$$

- Entonces:

$$Q(t) = \mathcal{E}Ce^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



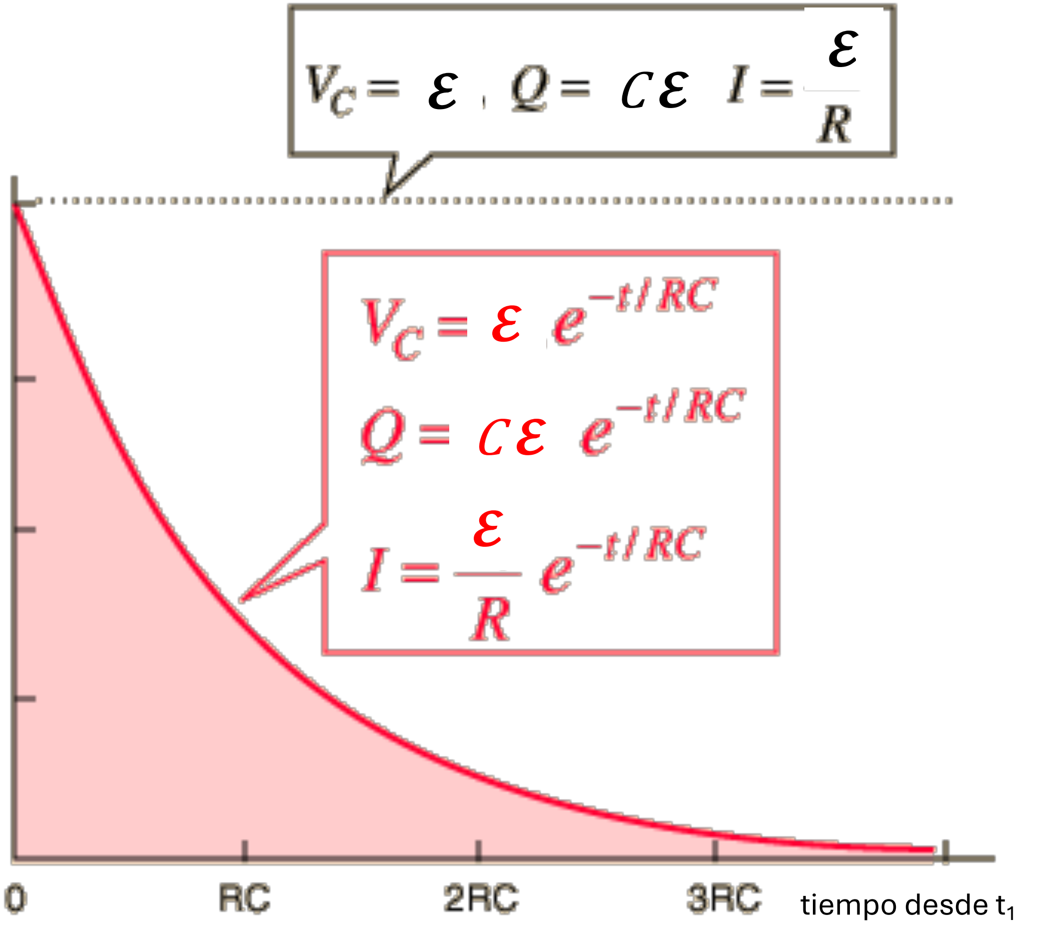
Descarga de circuito RC

- De la misma manera, la corriente decrecerá

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R}\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- De la misma manera el voltaje en el capacitor:

$$V_c = \frac{Q(t)}{C} = \boldsymbol{\varepsilon}\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Conocemos bien la ley de Ampère

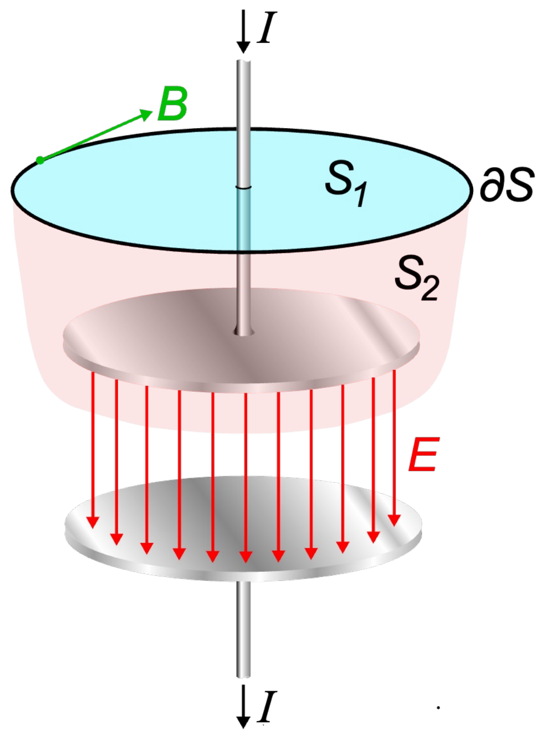
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- Supongamos un capacitor cargándose a una velocidad dada por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- La corriente I da lugar a un campo magnético $\vec{B}$ tal que si la superficie S_1 está limitada por el camino ∂S:

$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J}\cdot\vec{ds} = \mu_0 I$$

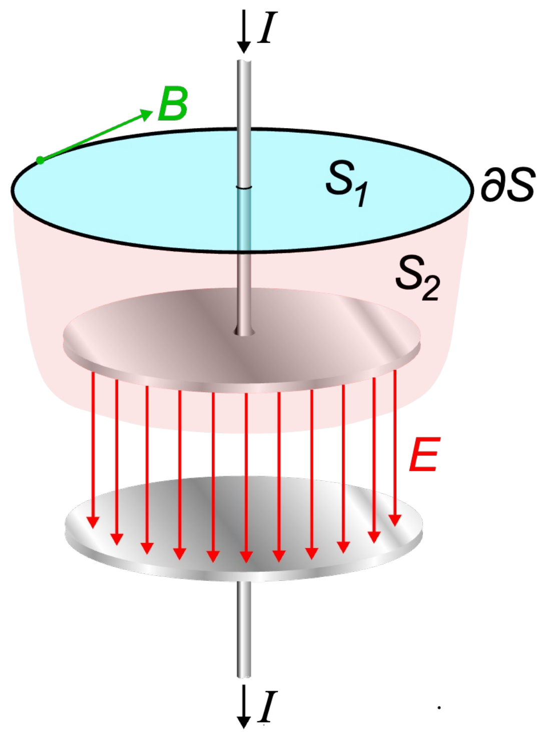


La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- El resultado debe valer para toda superficie limitada por ∂S incluyendo S_2 a través de la cual no pasa corriente !!

- Maxwell corrigió la ley de Ampère para salvar esta inconsistencia agregando un término dependiente del flujo de la derivada temporal del campo eléctrico $\vec{E}$:en el capacitor

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

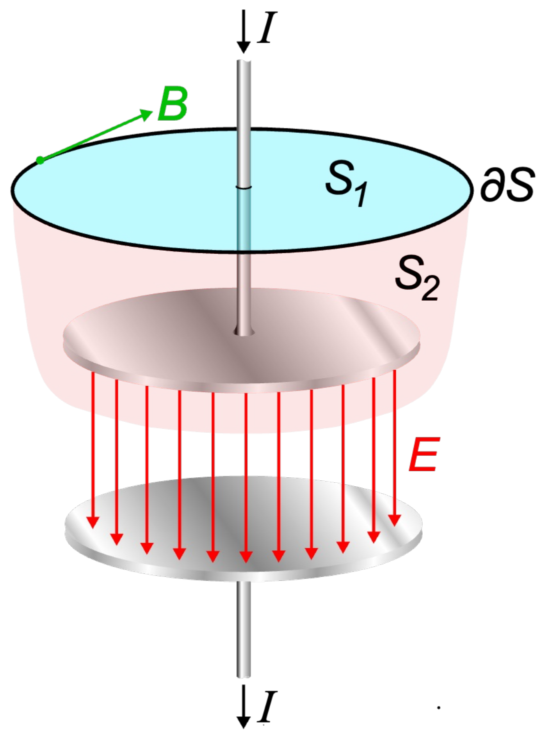


La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Con lo cual la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Como vemos el segundo término del segundo miembro sólo aparece en situaciones no estacionarias.



Circuito RLC en transitorio

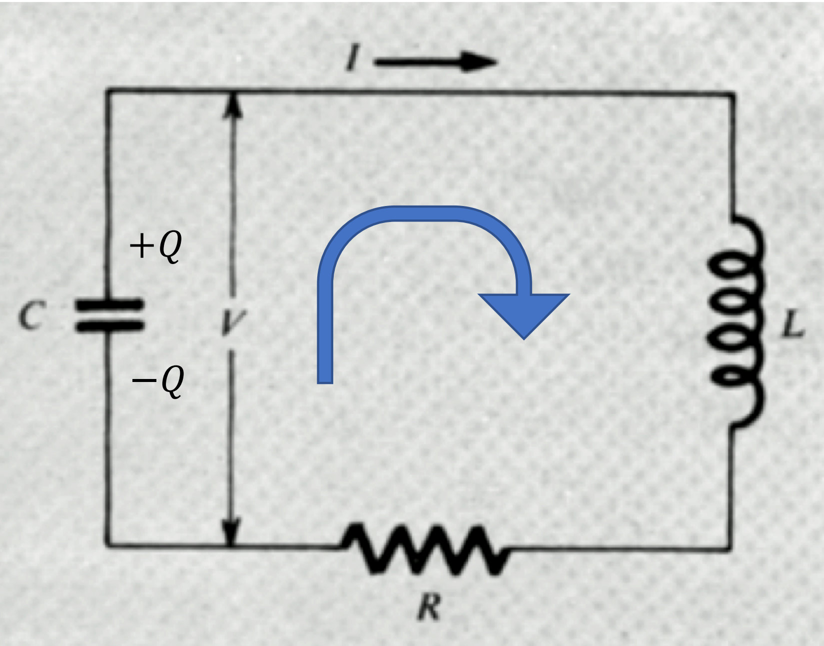
Circuito RLC en serie

- Supongamos el siguiente circuito con inductancia L, capacitor de capacidad C y resistencia R.
- Calculemos la diferencia de potencial V en el capacitor.
- Supogamos que el capacitor tiene una carga +Q en la placa superior y se descarga

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV$$

- Entonces Faraday en el sentido de I queda:

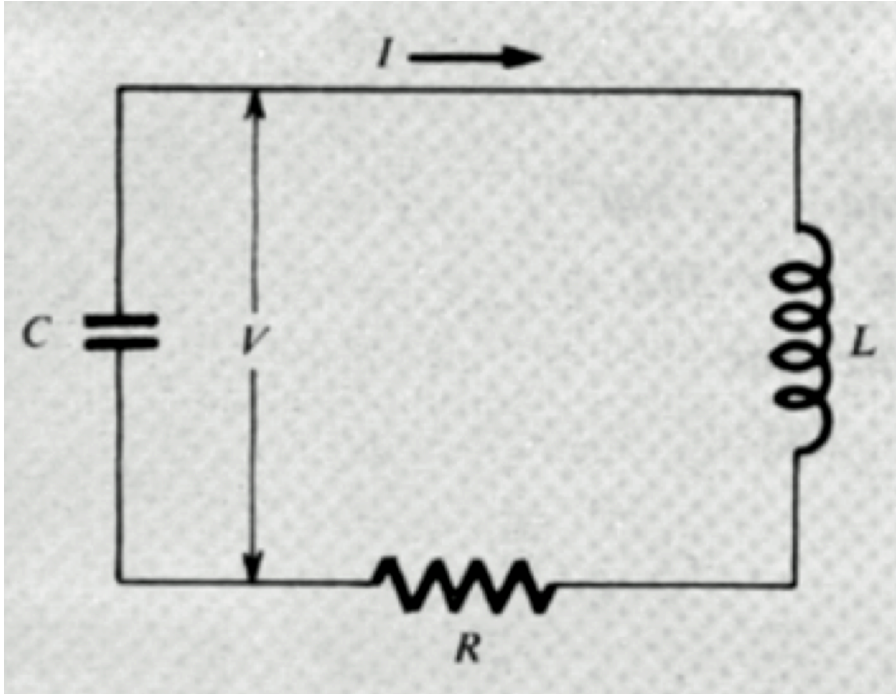
$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$



Circuito RLC en serie

- Poniendo todo en función de V llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0$$



Ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes (a, b, c)

$$\boxed{a y'' + b y' + c y = 0.}$$

$$\boxed{a r^2 + b r + c = 0}$$

Polinomio característico

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.}$$

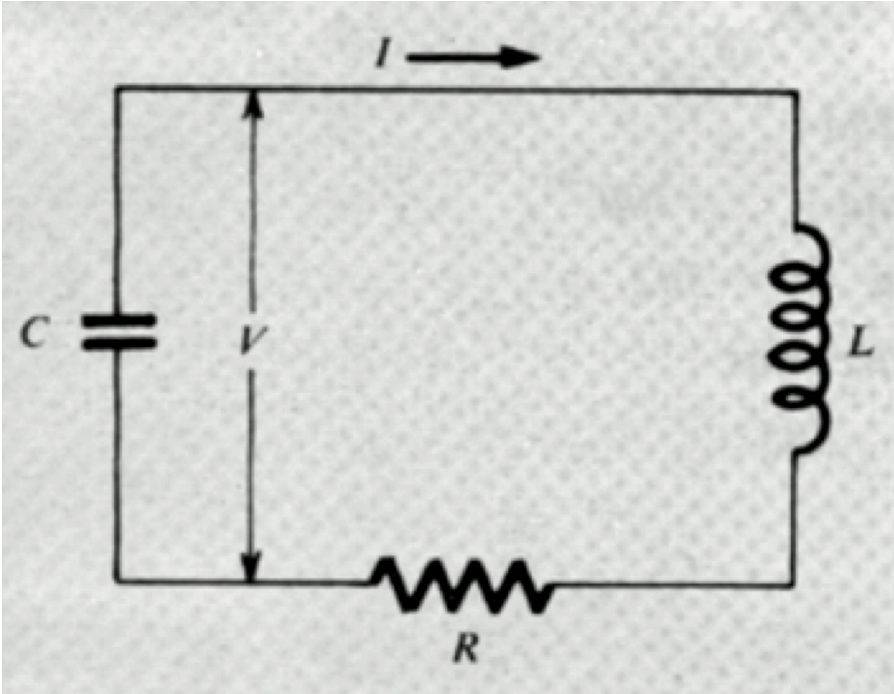
Donde $r = \lambda \pm i\mu$ con $\mu > 0$ son las dos raices complejas del polinomio característico

Circuito RLC en serie

- Entonces la solución general es

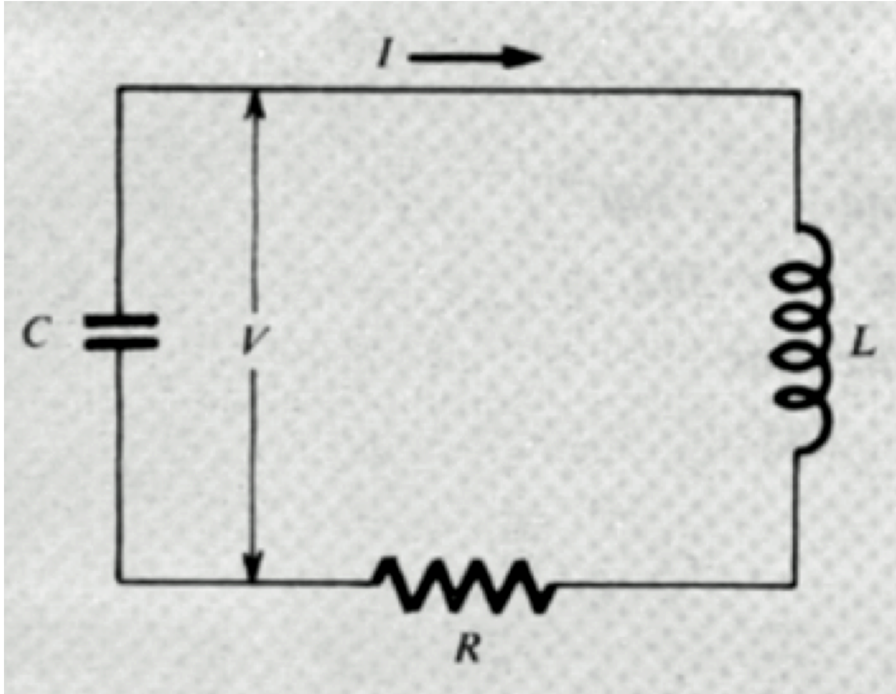
$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \text{ sen } \omega t)$$

- Donde -$\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- De hecho, dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$



Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución



$$V = Ae^{-\alpha t}\cos \omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha \cos \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t]$$

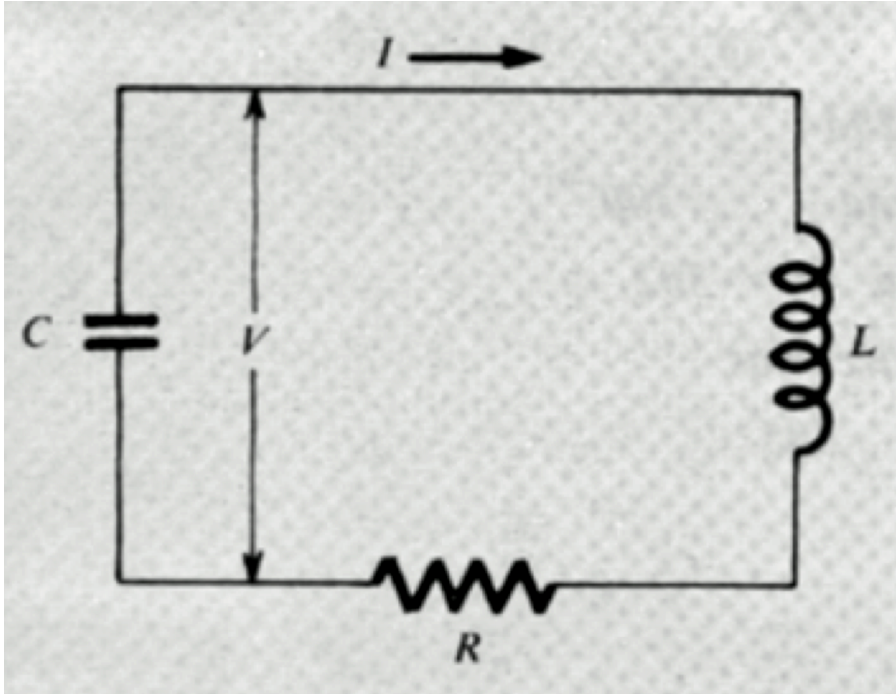
$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen} \omega t]$$

Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen}\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0$$

- Esto puede satisfacerse para todo t si los coeficientes que acompañan a $\sin\omega t$ y $\cos\omega t$ son ambos cero.



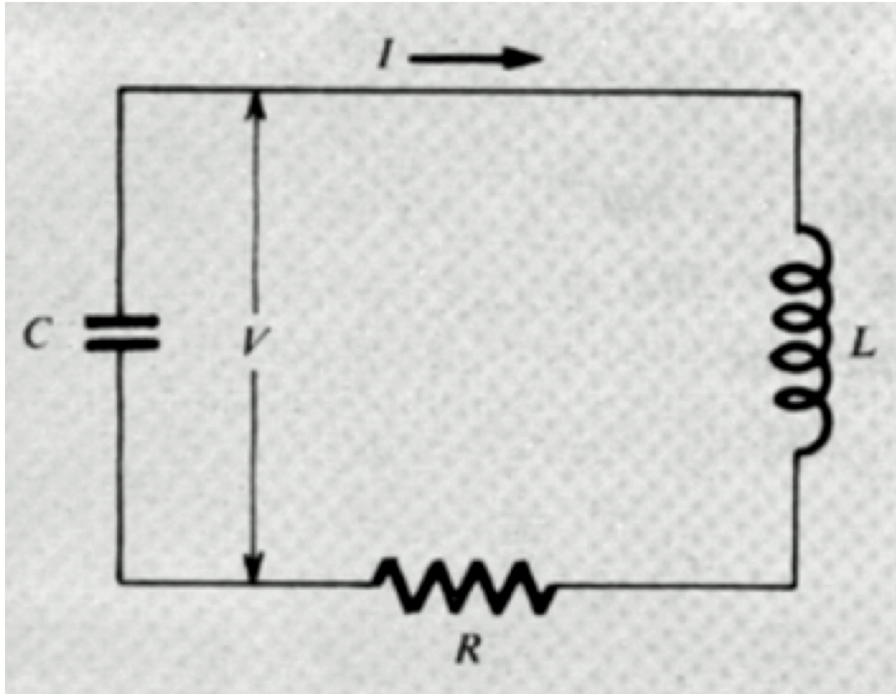
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



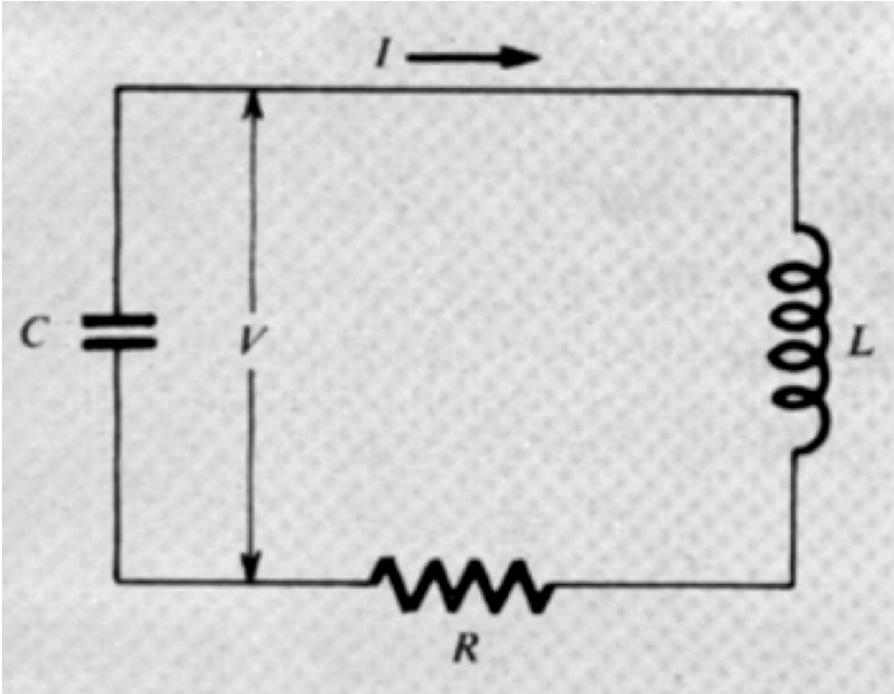
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

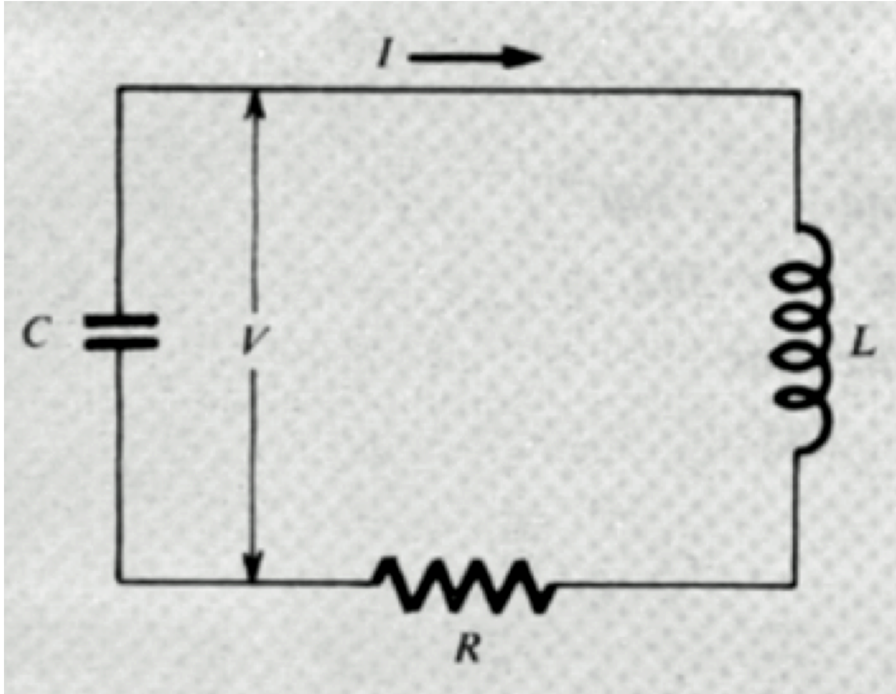
- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que
$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$
- Si tomamos el caso tal que usamos el > tenemos el caso de bajo amortiguamiento:
$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Circuito RLC en serie

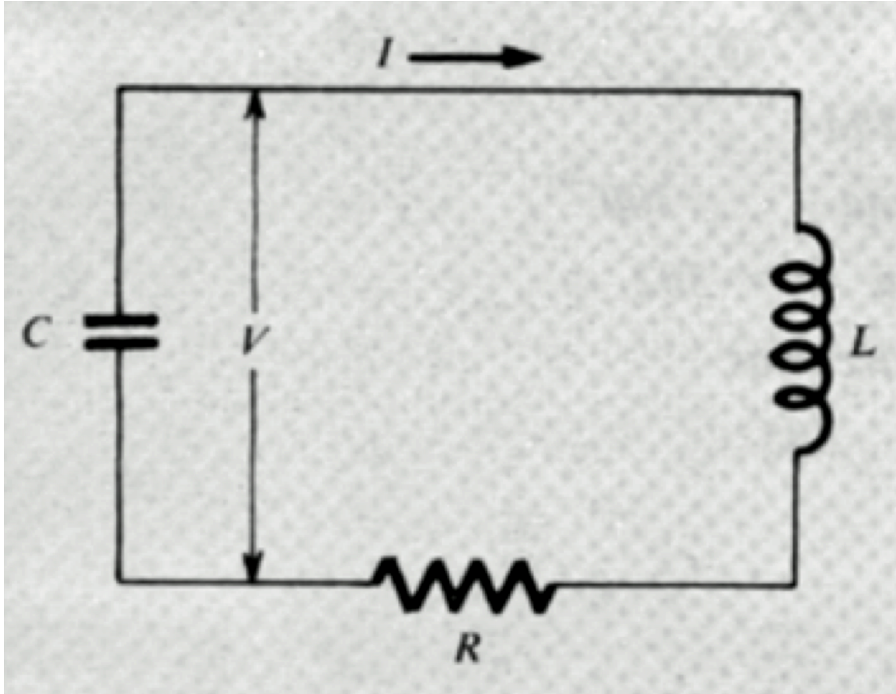
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t}\left[\sin\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right]$$



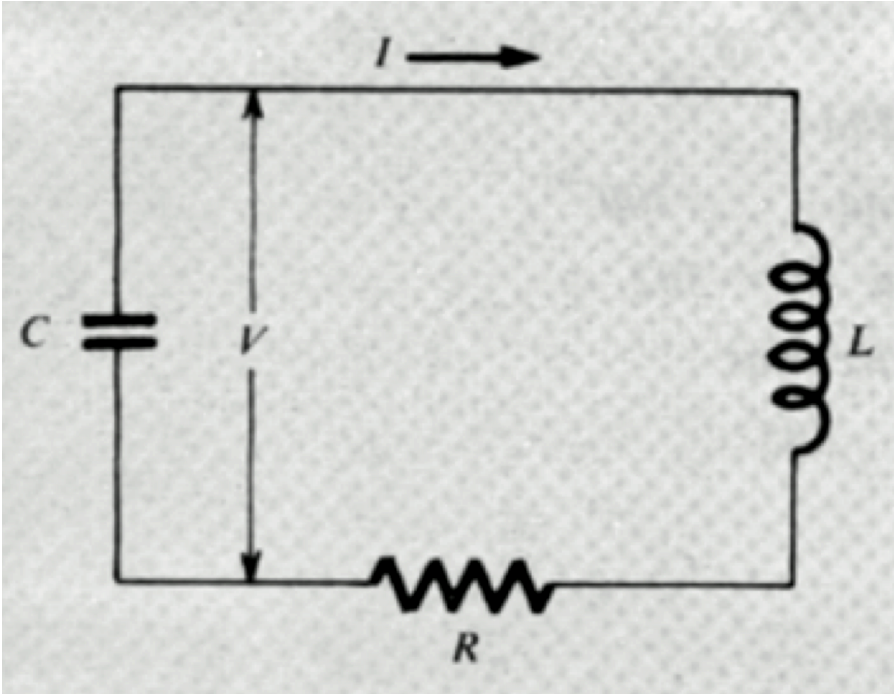
Circuito RLC en serie

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

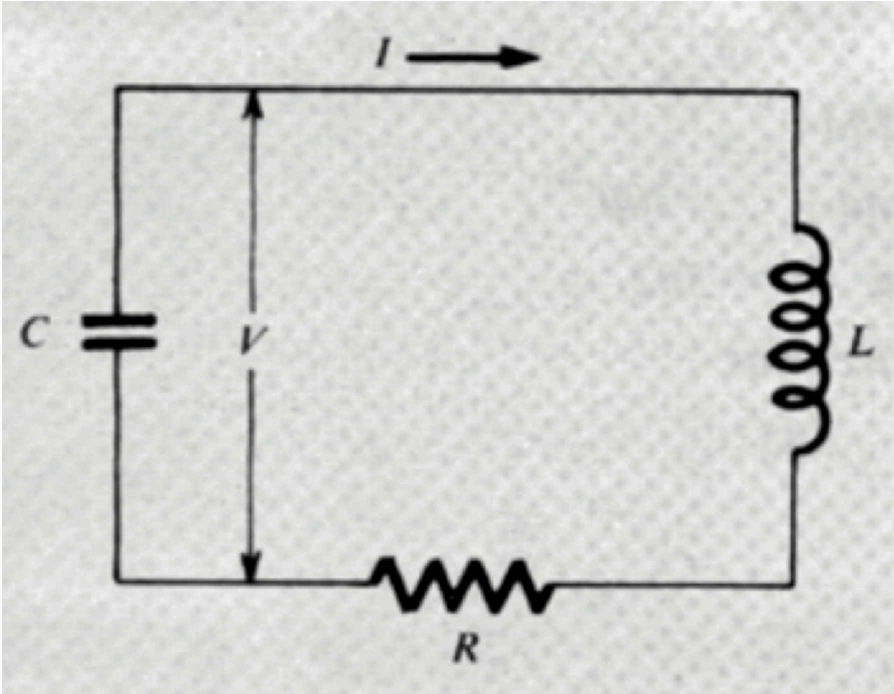
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaiga considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

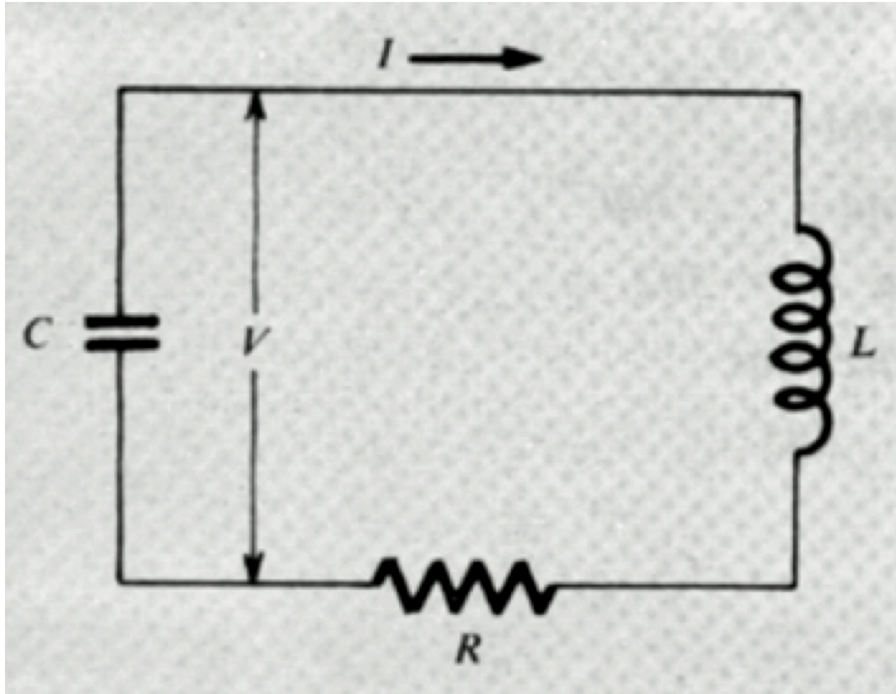


Circuito RLC en serie

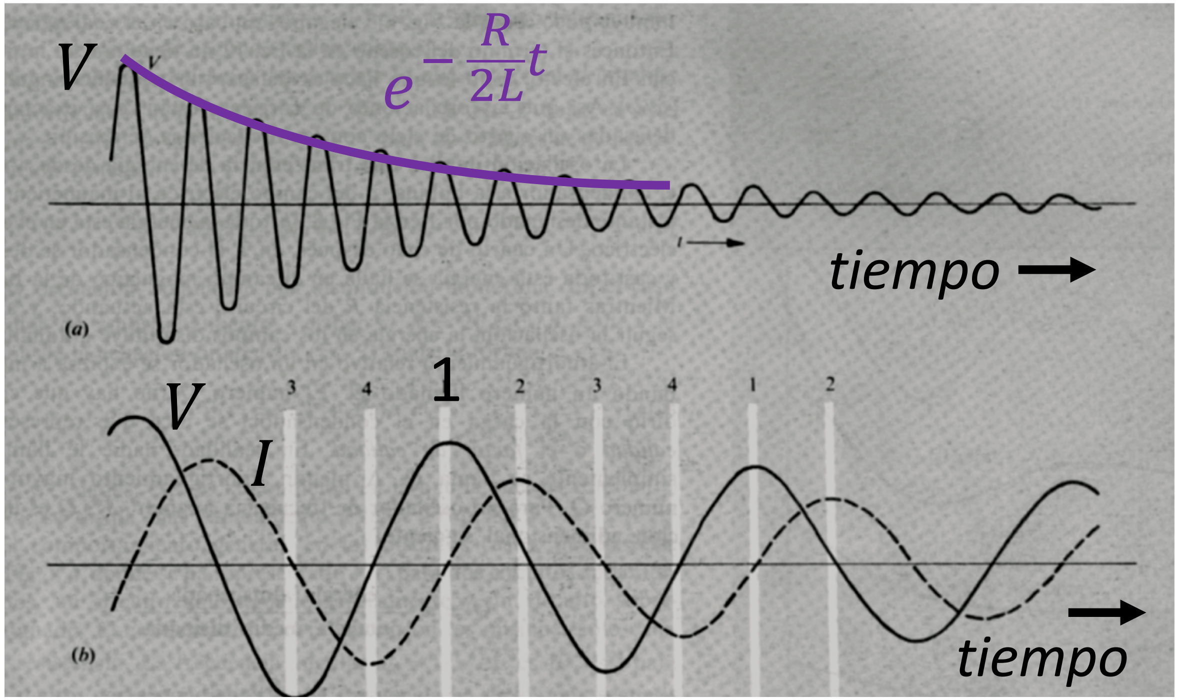
- Existe un desfasaje entre V e I.

- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,
$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t}[\sin \omega t]$$

- Y el desfasaje en ese caso es de un cuarto de ciclo ($^{\pi}/_{2}$).

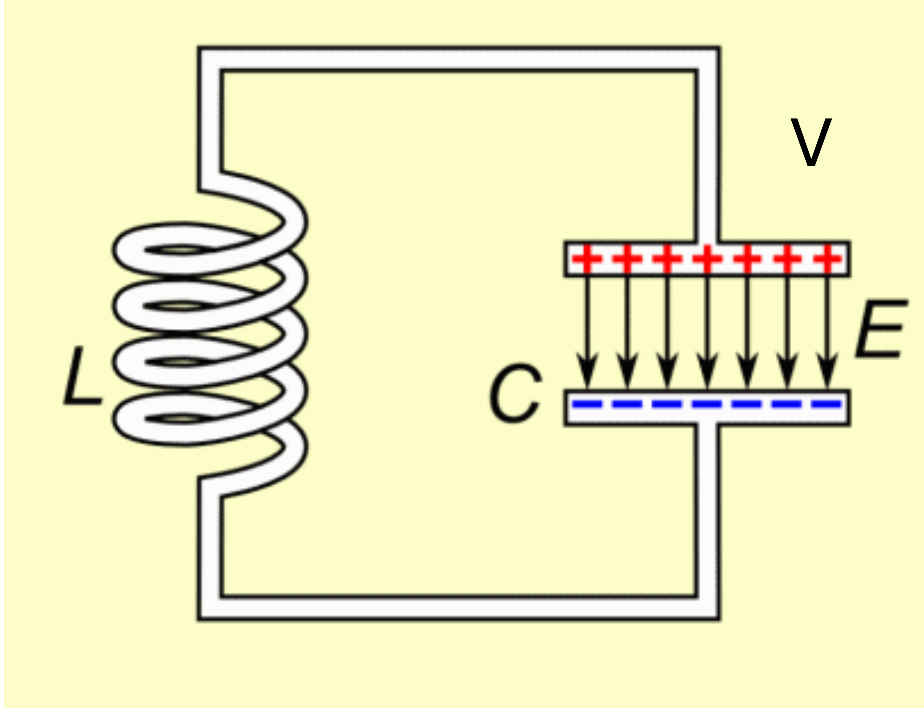


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

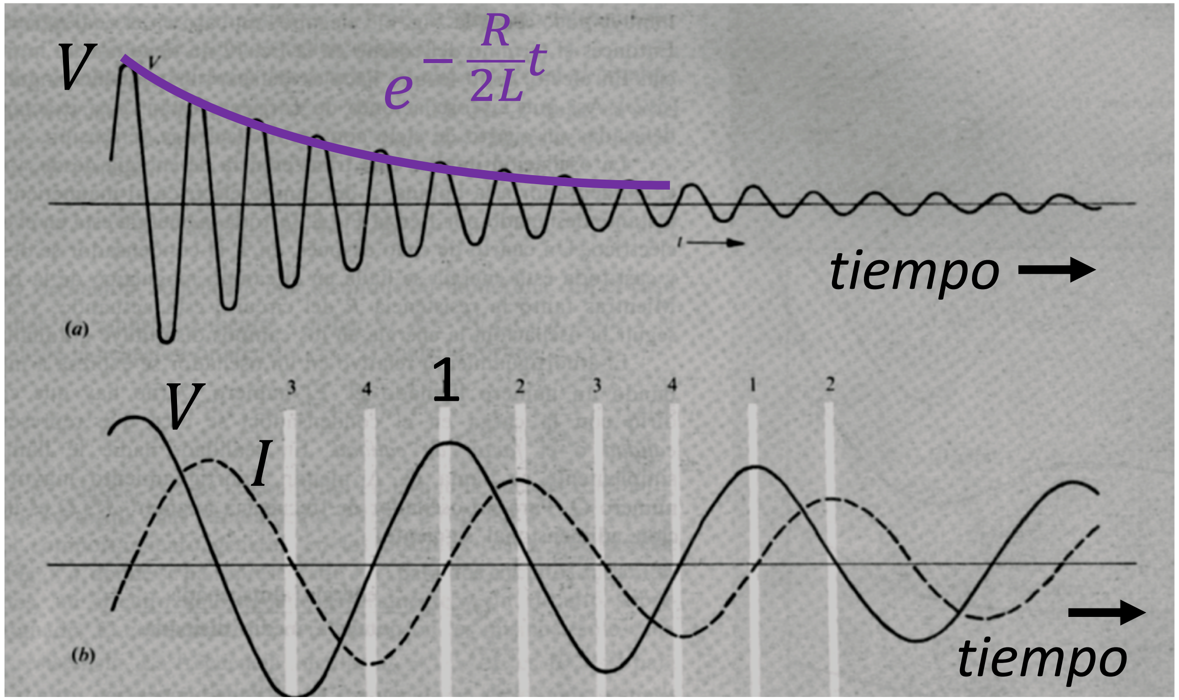


1. Capacitor cargado, corriente cero

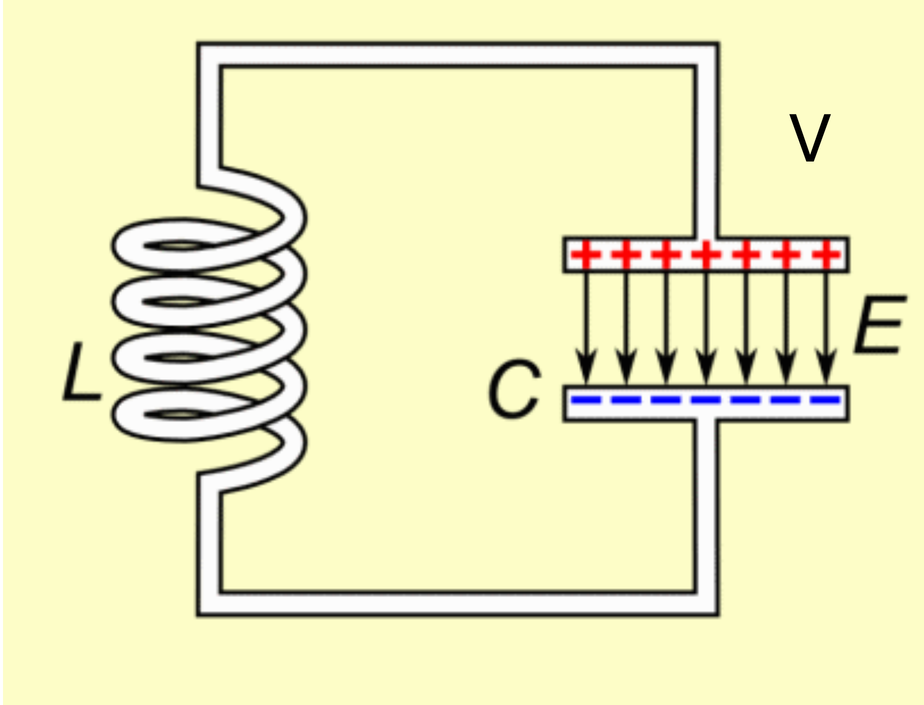
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

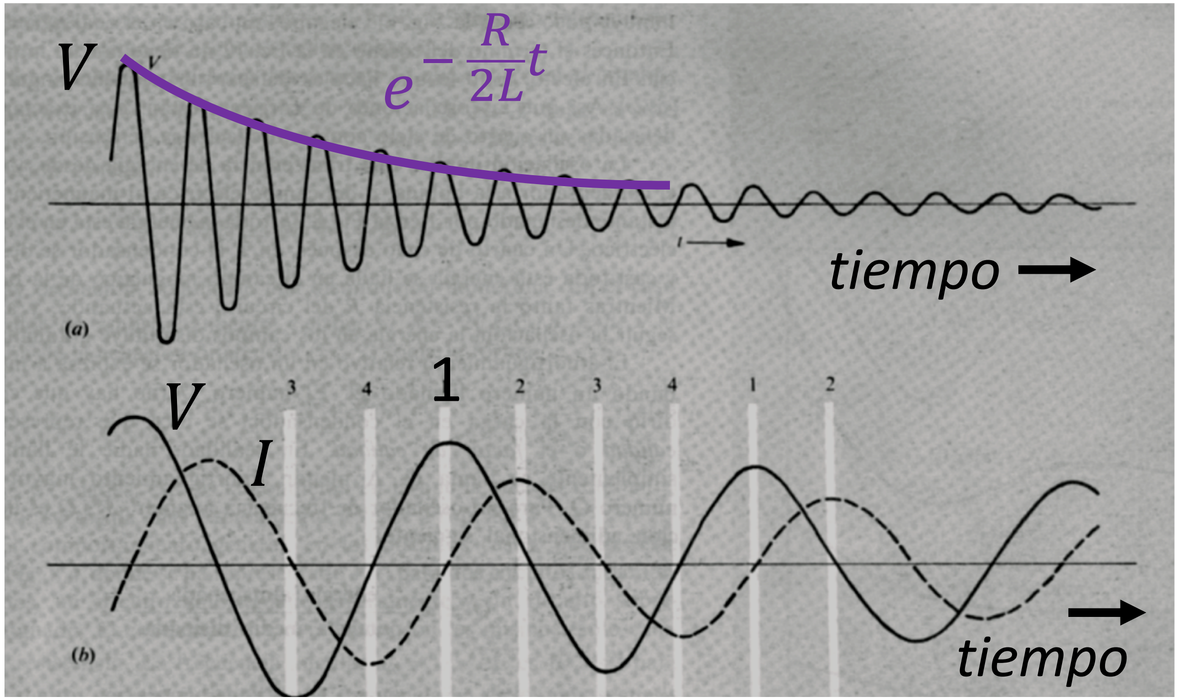


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

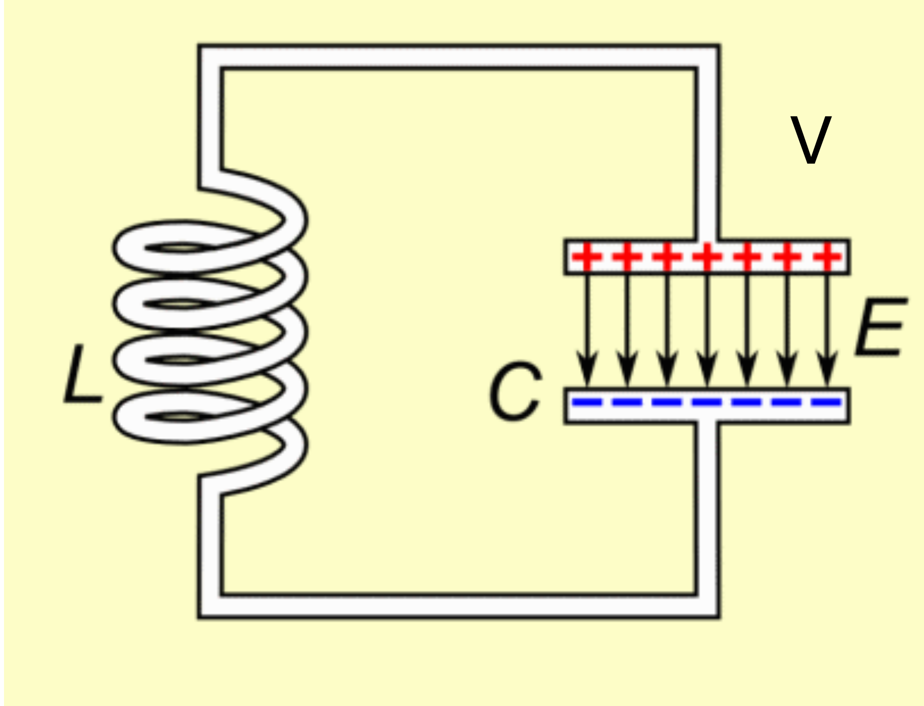


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

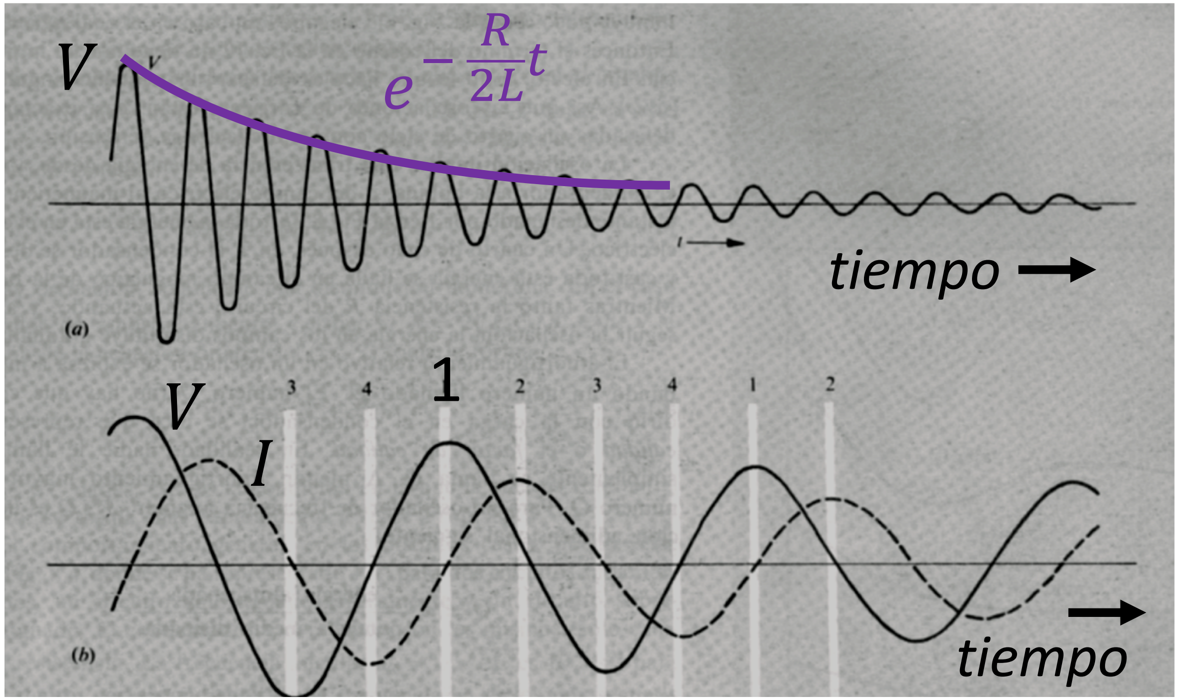


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

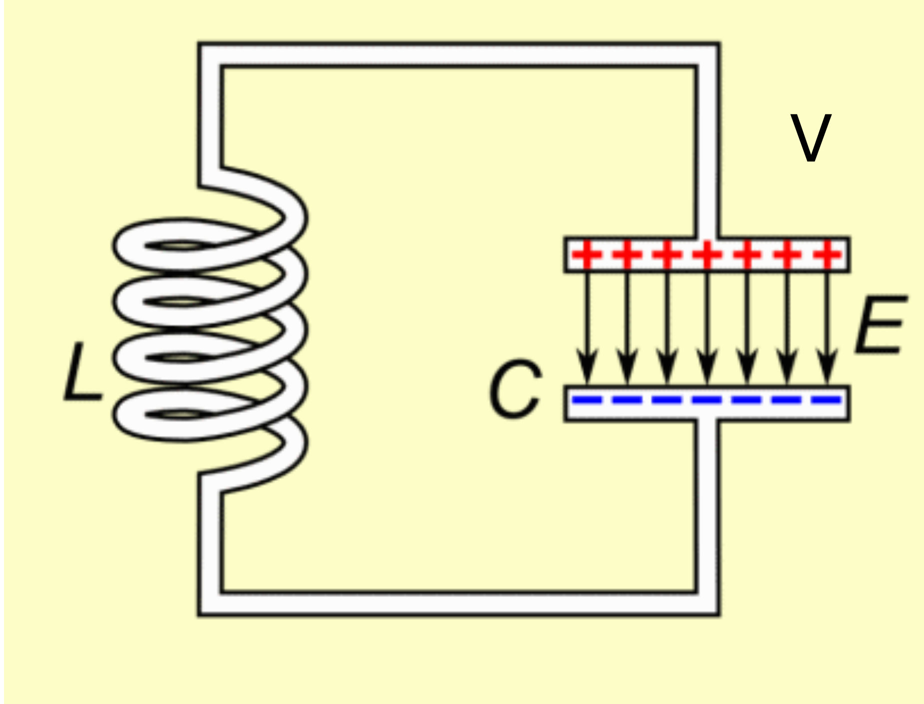


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.