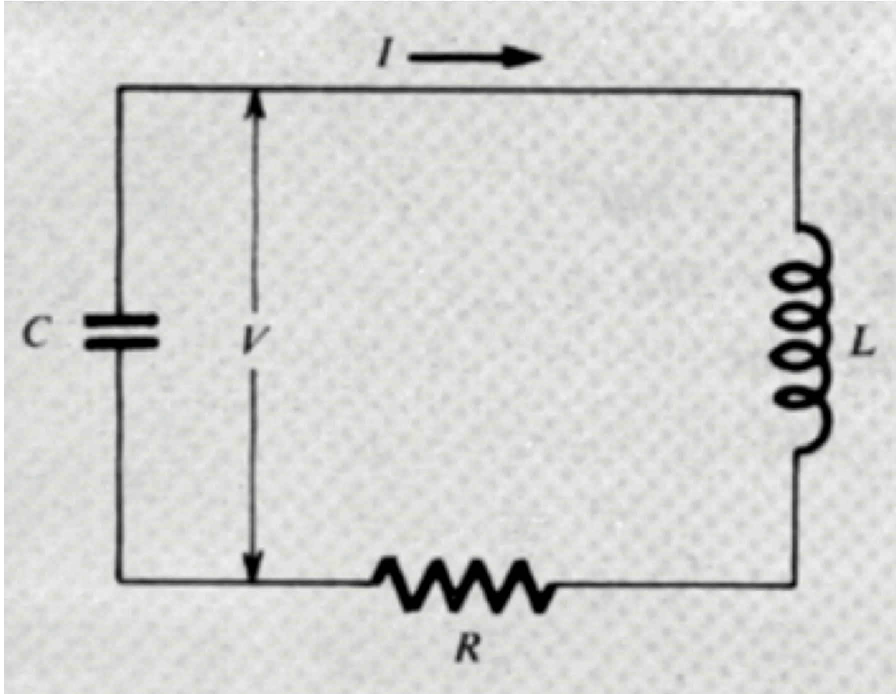
Circuito RLC en serie

- Recordemos la solución general para el voltaje en el capacitor

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

- Donde -$\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- Dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo, es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$



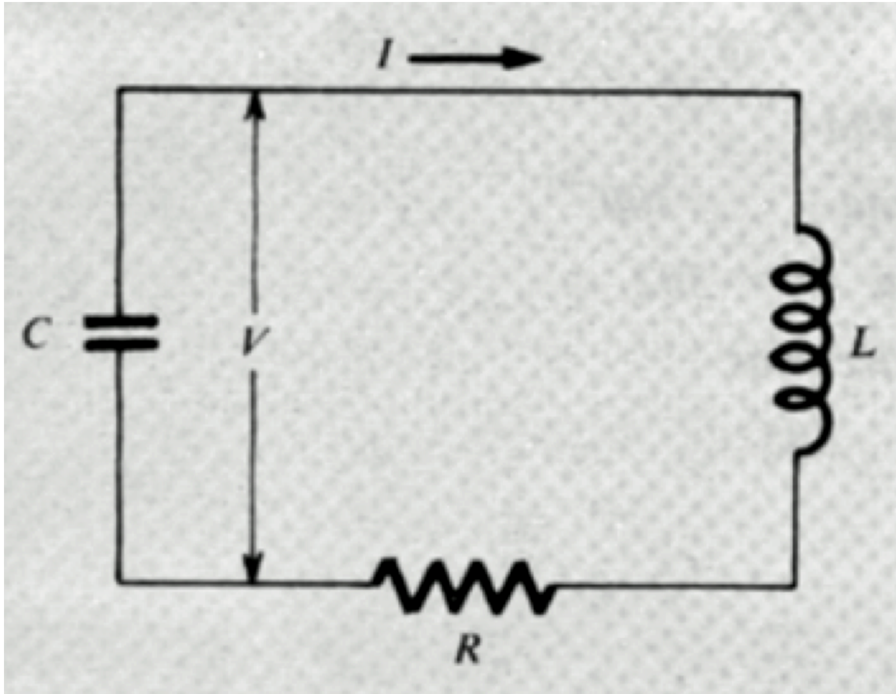
Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución

$$V = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha\cos\omega t - \omega\,\text{sen}\,\omega t]$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\,\text{sen}\,\omega t]$$

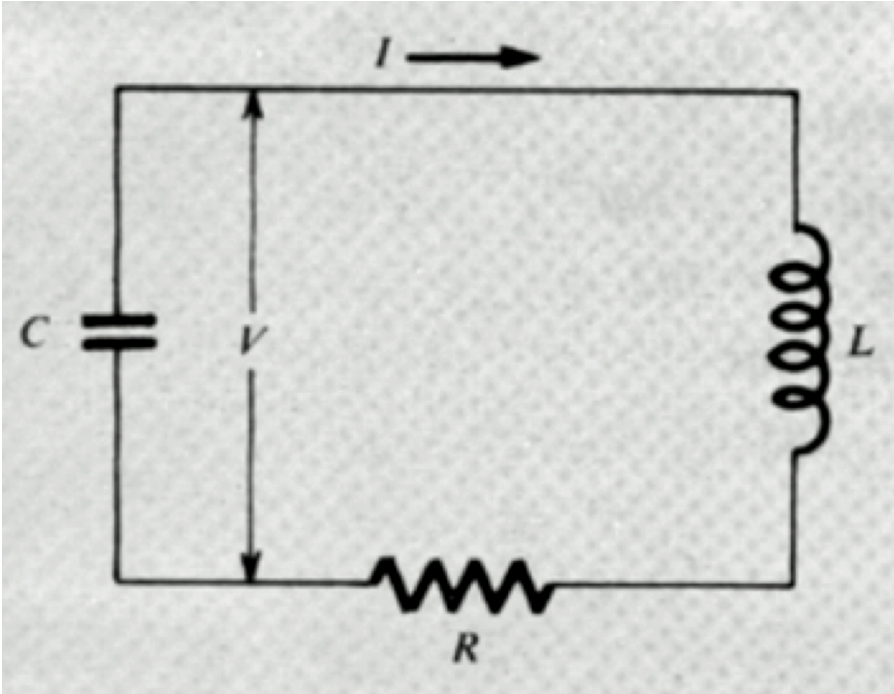


Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen}\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0$$

los coeficientes que acompañan a $\sin\omega t\;\; y\;\; \cos\omega t$ son ambos cero.



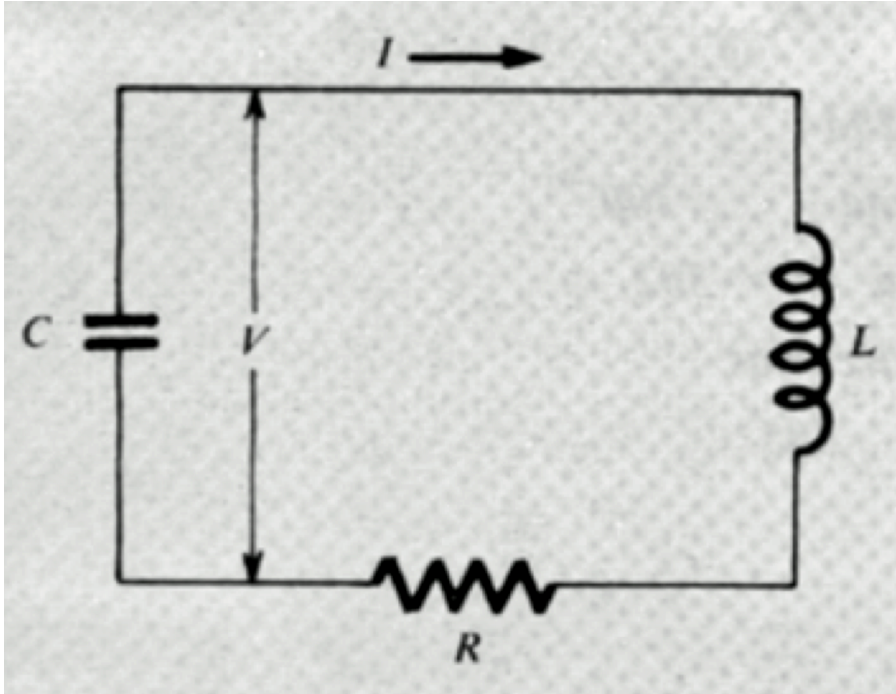
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



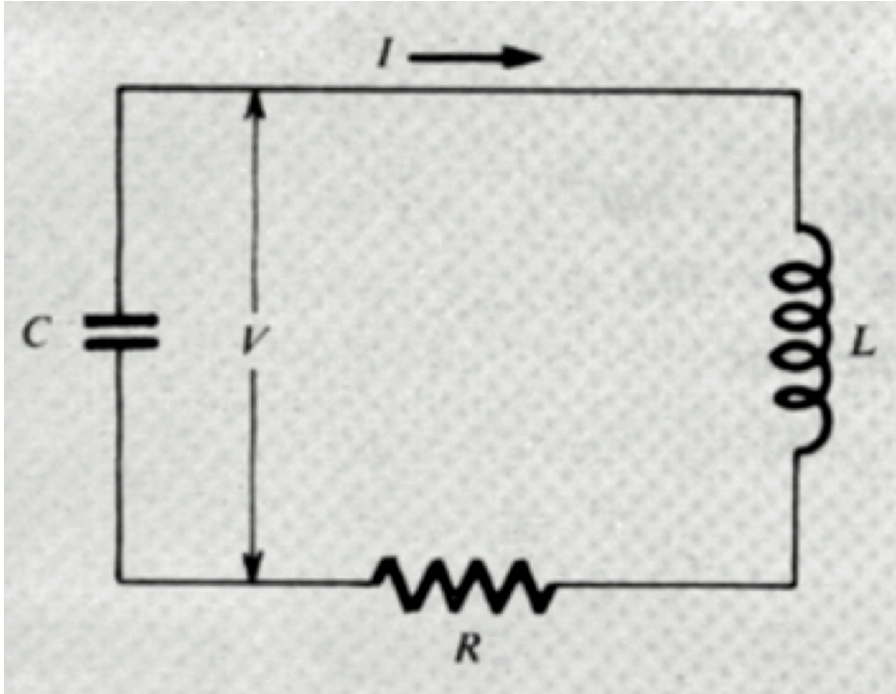
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



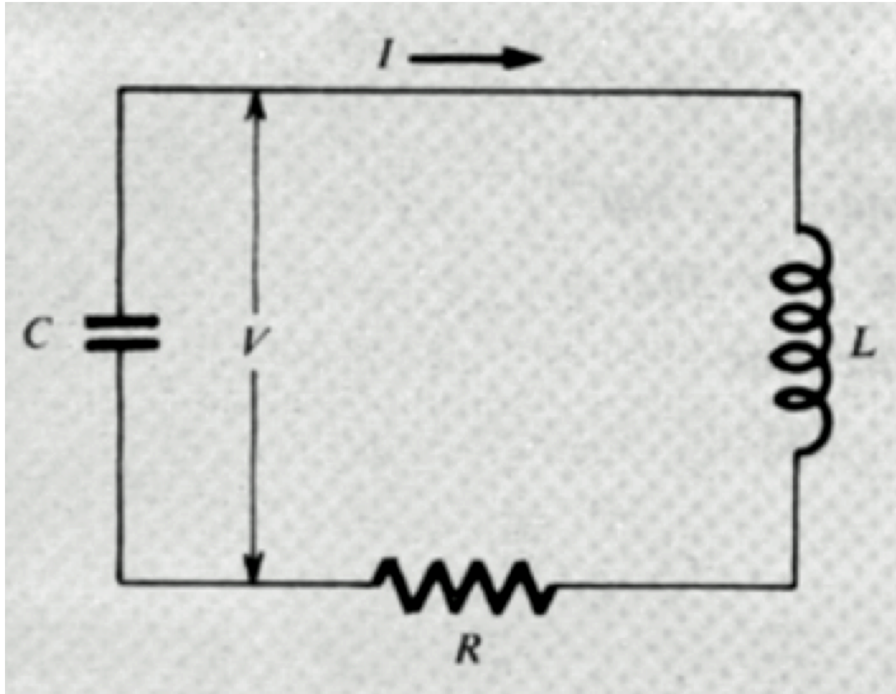
Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que

$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$

- Si tomamos el caso tal que usamos el > tenemos el caso de bajo amortiguamiento:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Circuito RLC en serie

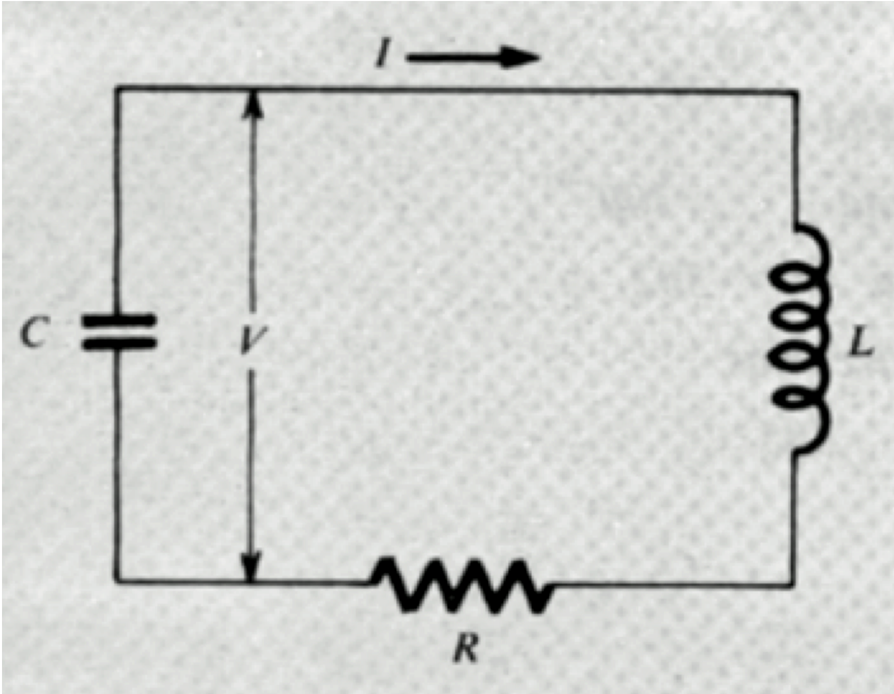
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t}\left[\sin\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right]$$



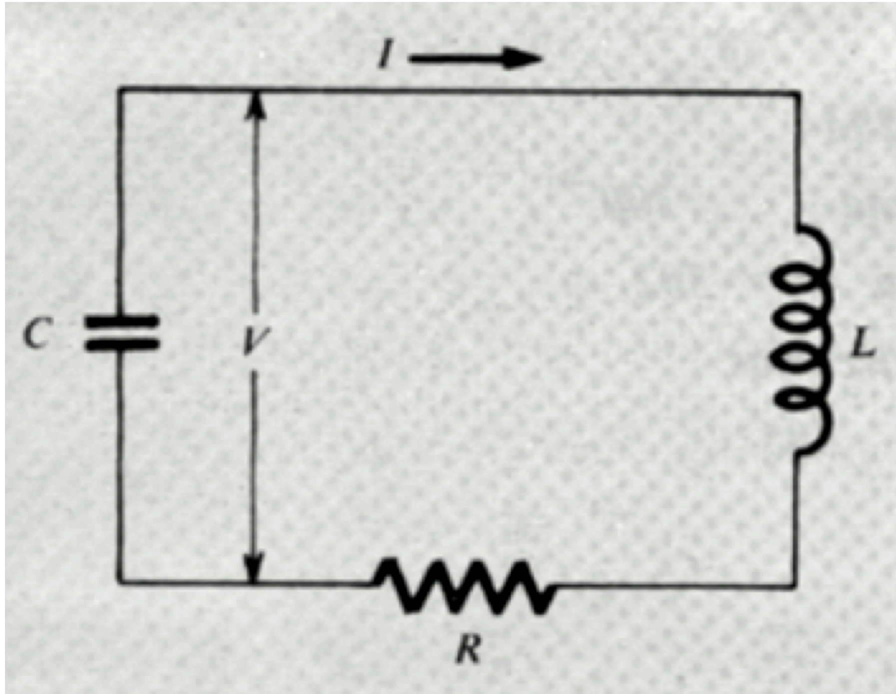
Circuito RLC en serie

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

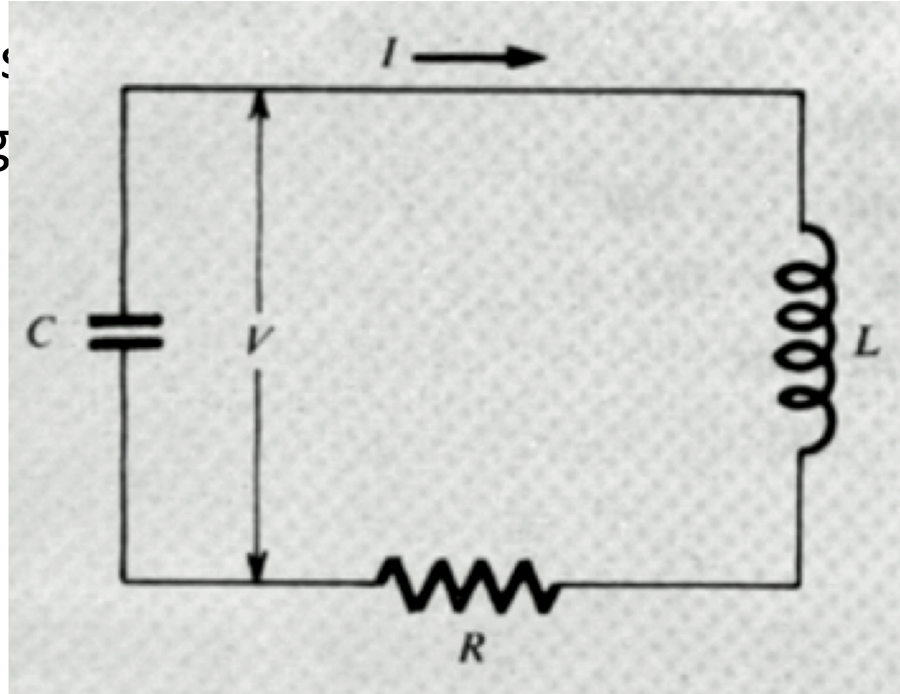
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaig considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



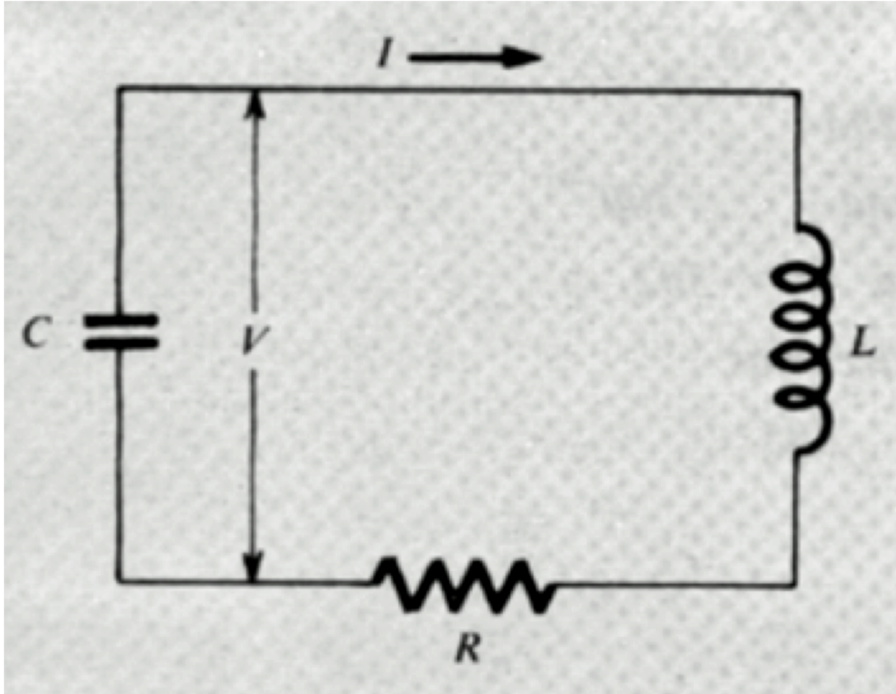
Circuito RLC en serie

- Existe un desfasaje entre V e I.

- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,

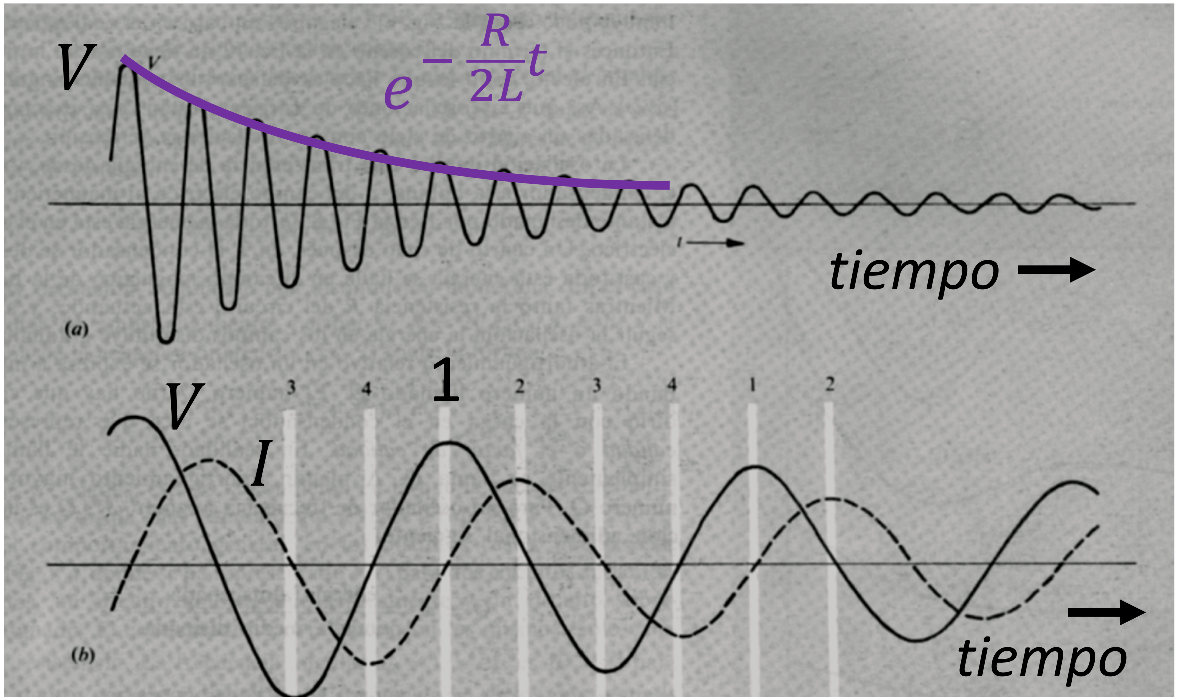
$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t}[\sin \omega t]$$

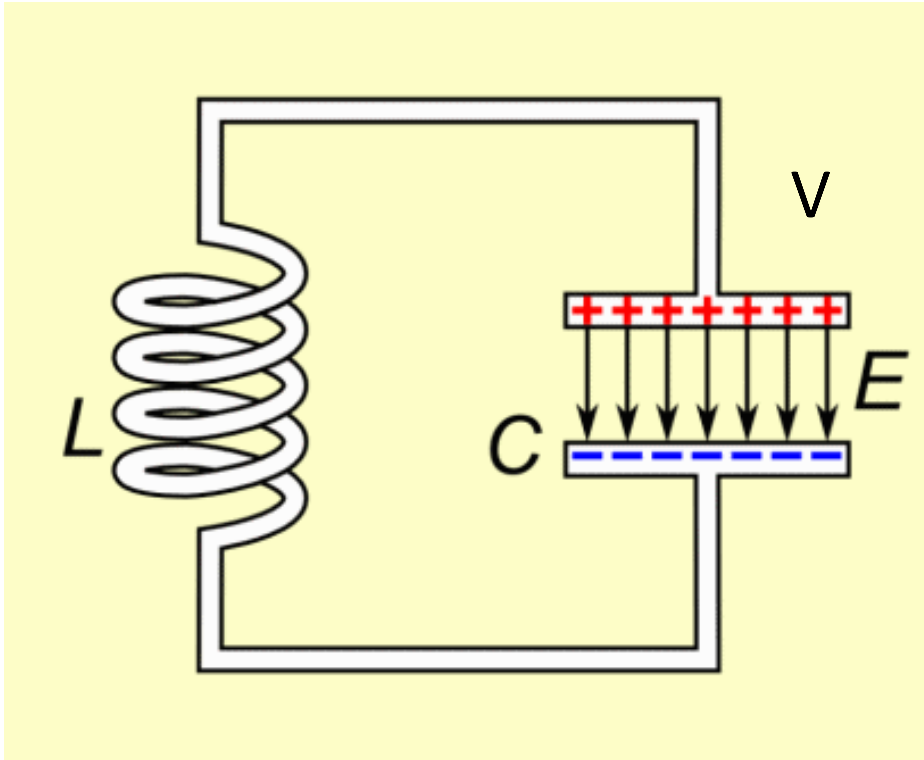
- Y el desfasaje en ese caso es de un cuarto de ciclo ($^{\pi}/_{2}$).



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

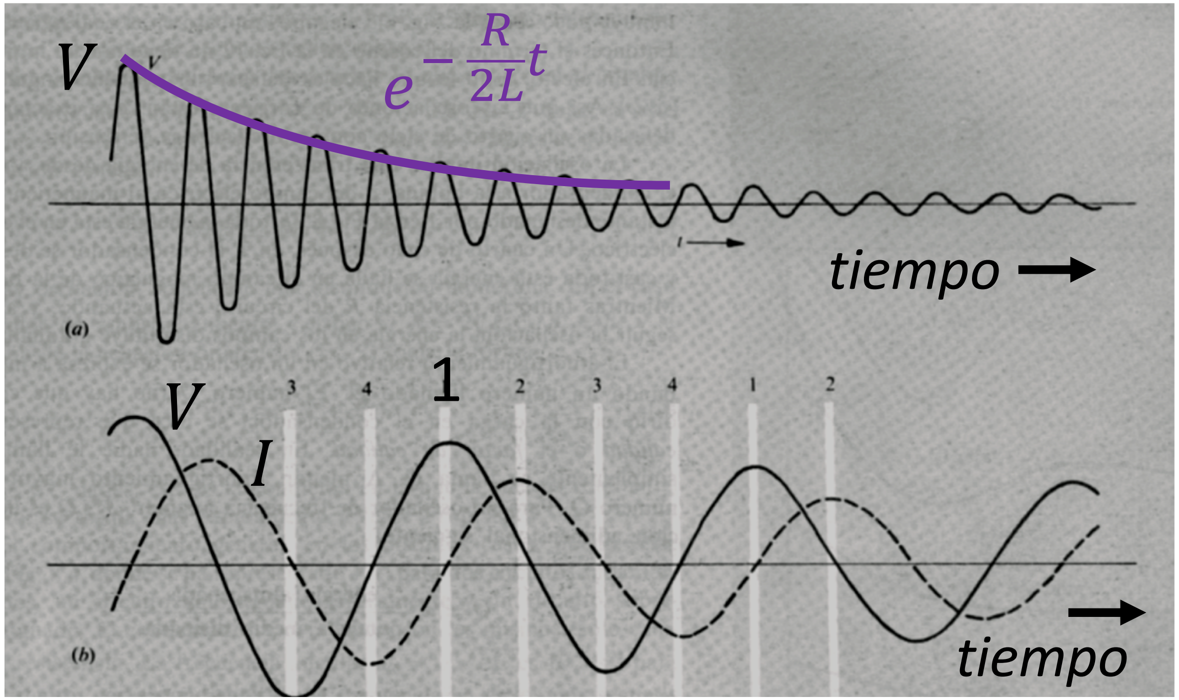
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



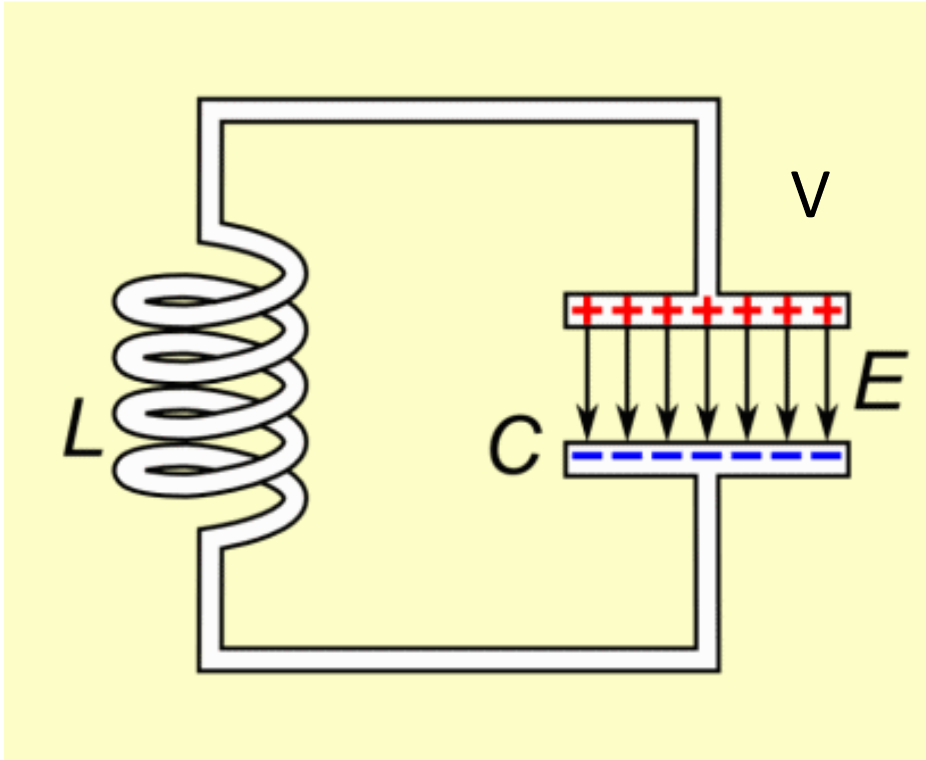


1. Capacitor cargado, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

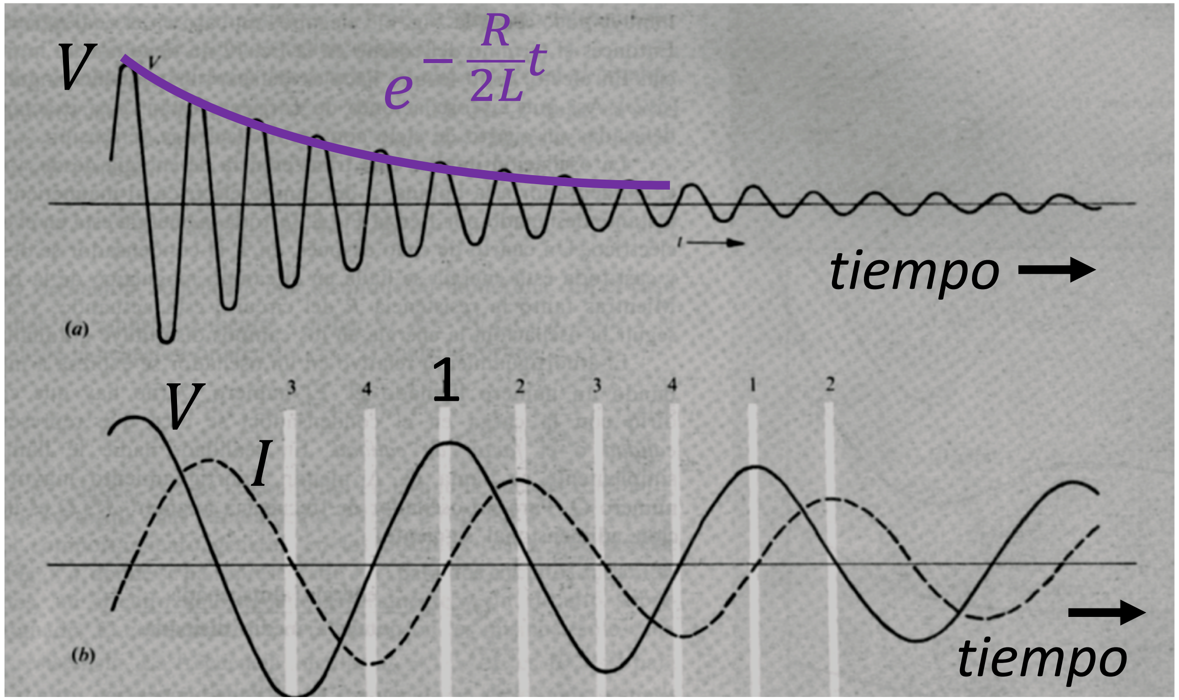


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

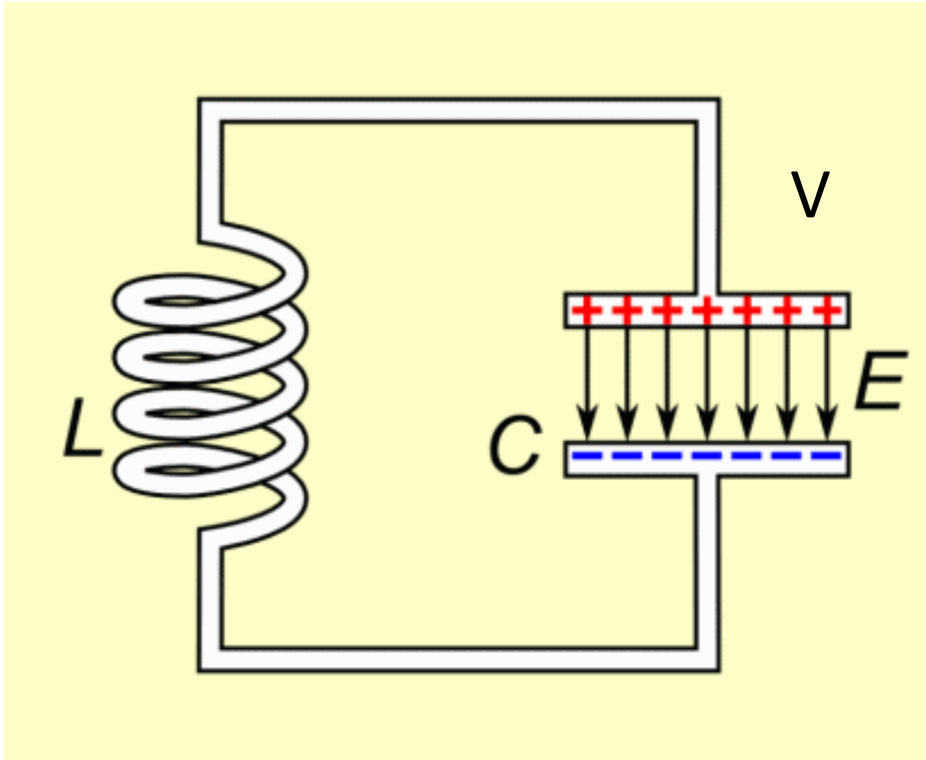


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

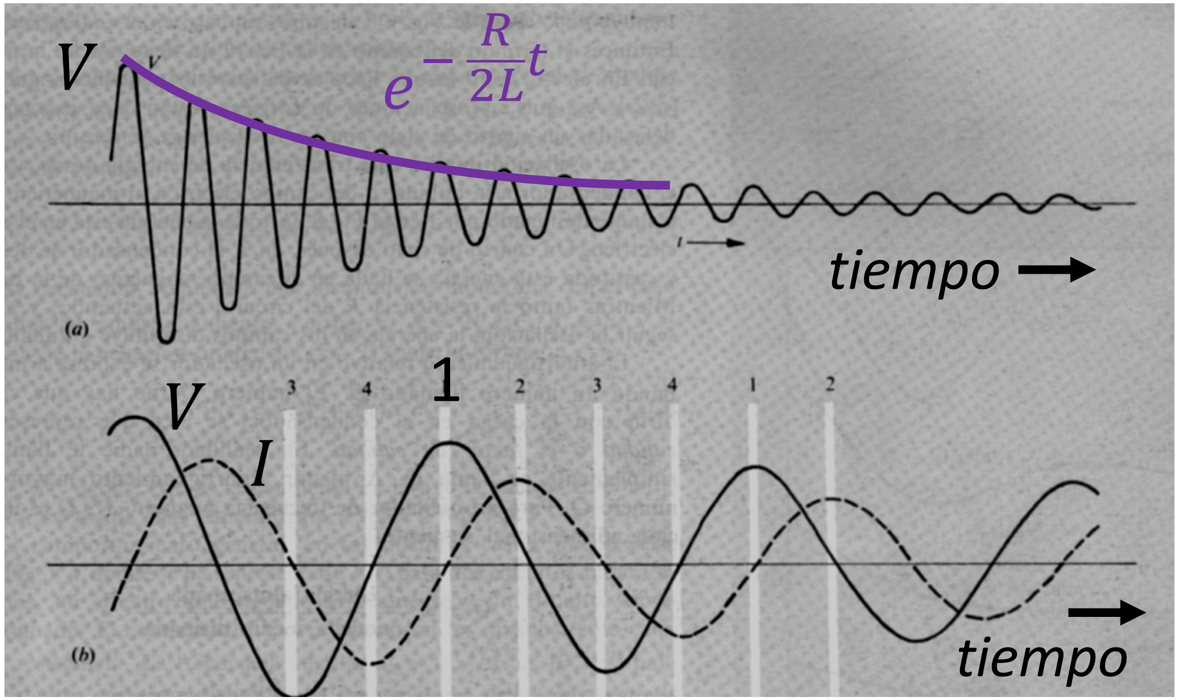


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

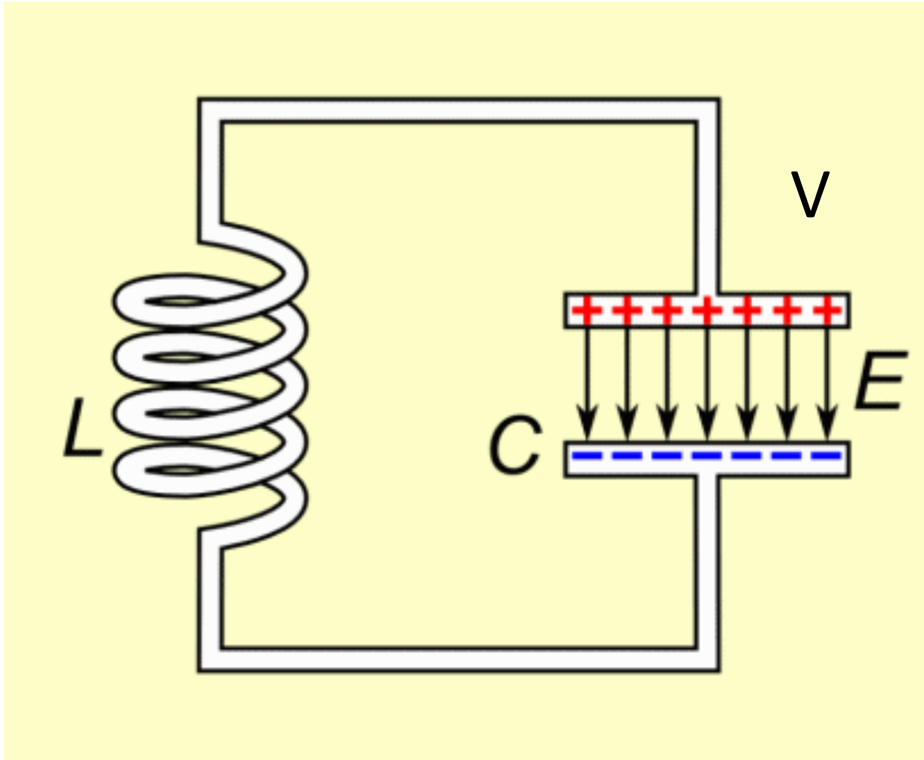


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.

Circuitos de corriente alterna

Representaciones de números complejos

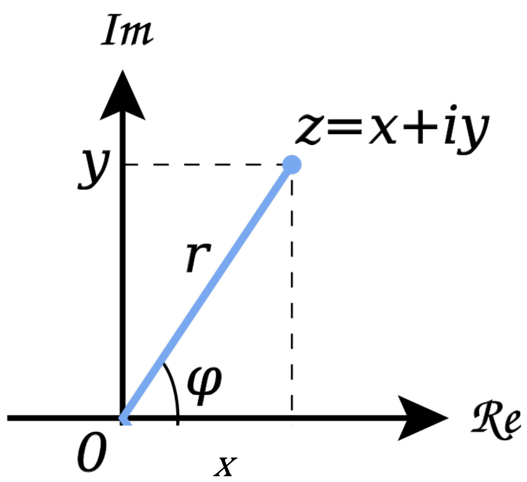
- Cartesianas

$$z = x + iy$$
$$x = Re(z)$$
$$y = Im\,(z)$$

- Polares (Euler)

$$z = re^{i\varphi}$$

donde r es el módulo y y φ es el argumento o la fase



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$x = r\cos\varphi$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Operaciones simples en polares

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

$$z_1 z_2 = rse^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} \Leftrightarrow z_1 z_2 = re^{\mathrm{i}\phi} se^{\mathrm{i}\psi}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{\mathrm{i}(\phi-\psi)}$$

Potenciación:

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}\phi n} \Leftrightarrow z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n$$

Complejo conjugado $\bar{z}$

- Si $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$
- Propiedades

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$$

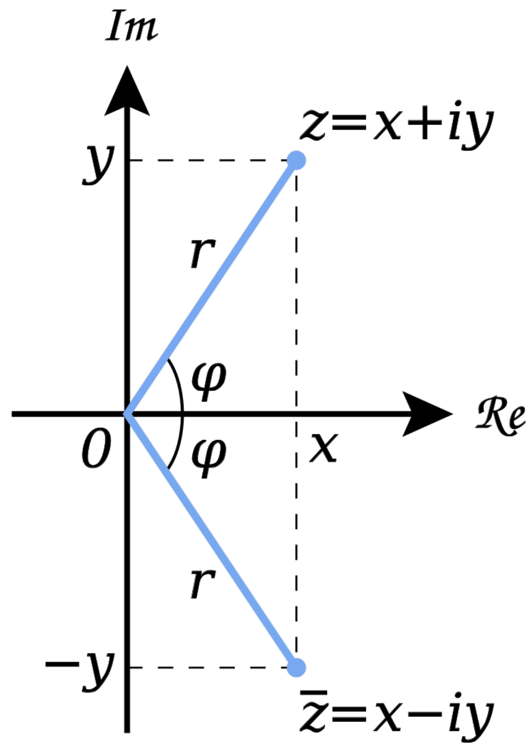
$$z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

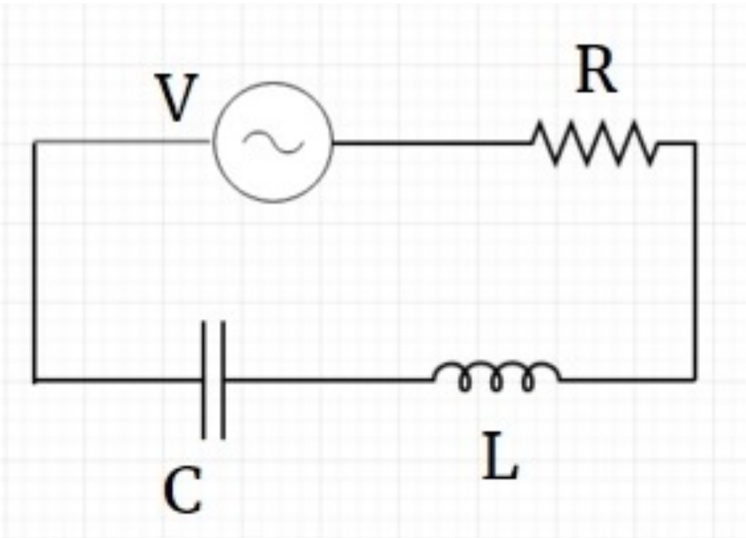
$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$$

$$|z|^2 = z\overline{z} \geq 0$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



Circuito RLC en serie

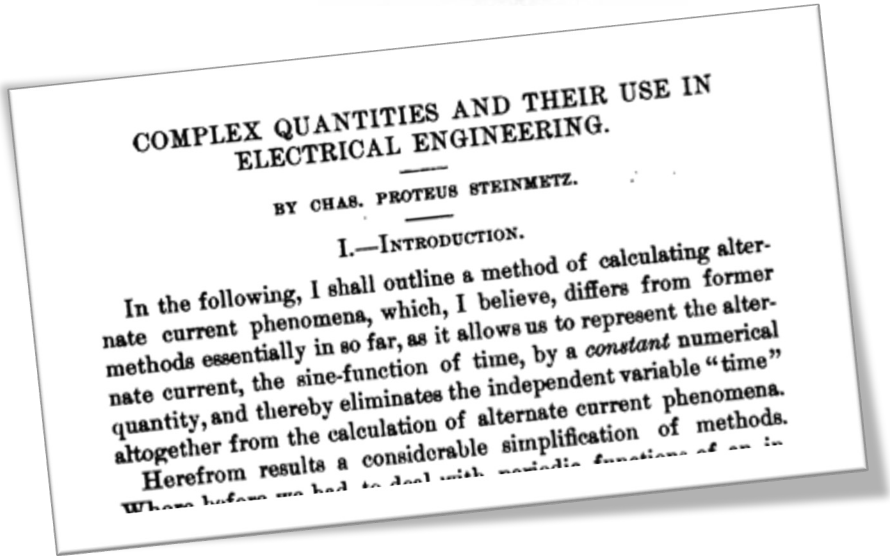


- Supongamos ahora un circuito RLC en serie de corriente alterna donde
$$V = V_0 \cos \omega t$$
- Por ley de Faraday tenemos
$$V_0 \cos \omega t = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\, dt$$
- Podemos resolver esta ecuación diferencial de manera diferente a como lo venimos haciendo?

Números complejos y circuitos AC

- En 1893 Charles Steinmetz, ingeniero alemán en GE (EEUU), presenta el trabajo ‘Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering’.
- En este trabajo muestra como ecuaciones como la anterior son en realidad un problema de álgebra simple de números complejos.
- En otras palabras

¡No hace falta integrar !



COMPLEX QUANTITIES AND THEIR USE IN ELECTRICAL ENGINEERING.

BY CHAS. PROTEUS STEINMETZ.

I.—INTRODUCTION.

In the following, I shall outline a method of calculating alternate current phenomena, which, I believe, differs from former methods essentially in so far, as it allows us to represent the alternate current, the sine-function of time, by a *constant* numerical quantity, and thereby eliminates the independent variable “time” altogether from the calculation of alternate current phenomena.

Herefrom results a considerable simplification of methods.

Voltaje complejo

- La FEM de la batería

$$V_0 \cos \omega t$$

- Puede ser vista como la parte real del número complejo

$$V_0 e^{i\omega t} = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

- En cuyo caso

$$V_0 \cos \omega t = Re(V_0 e^{i\omega t})$$

Corriente compleja

- Para la solución de nuestro problema podemos hacer lo mismo con I

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(I_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

donde φ es la diferencia de fase con V

- Pero podemos reescribir esto como

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t})$$

- Ahora definimos **la amplitud compleja $\tilde{I}$** (independiente del tiempo)

$$\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi} = I_0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- Podemos escribir

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(\tilde{I}\, e^{i\omega t})$$

Corriente compleja: derivada e integral

- Veamos cómo dan las derivadas y las integrales de $\tilde{I}\, e^{i\omega t}$
- La derivada respecto a t queda:

$$\frac{d\tilde{I}\, e^{i\omega t}}{dt} = \tilde{I}\frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega\tilde{I}e^{i\omega t}$$

¡Derivar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $i\omega$!

- La integral queda

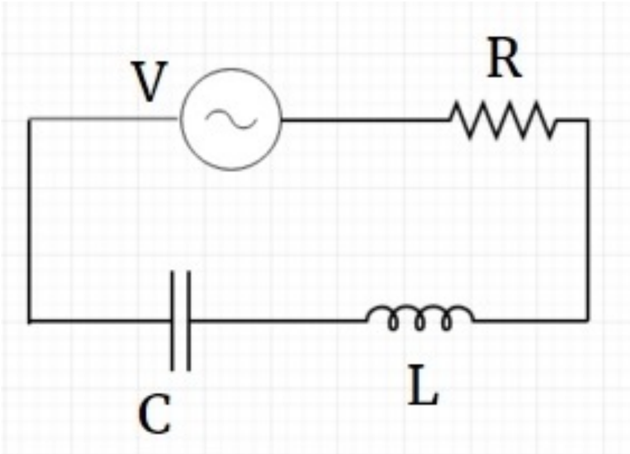
$$\int \tilde{I}\, e^{i\omega t}\, dt = \tilde{I}\int e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega}\,\tilde{I}\, e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega}\,\tilde{I}\, e^{i\omega t}$$

¡Integrar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $\frac{1}{i\omega}$!

Pregunta

- ¿Por cuánto hay que multiplicar $\tilde{I}e^{i\omega t}$ para obtener su derivada segunda respecto al tiempo?

Circuito RLC en serie



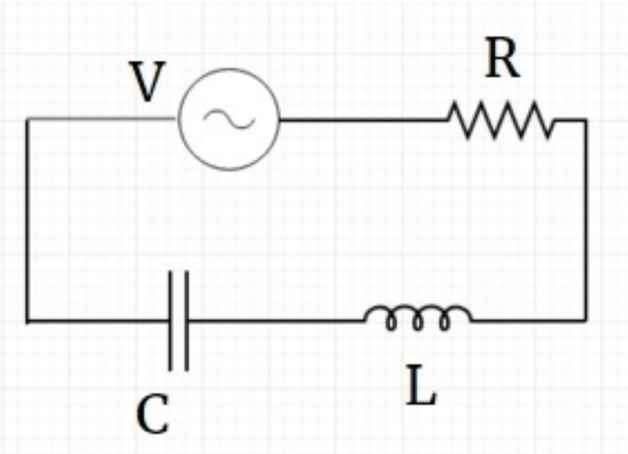
- Estas propiedades de los números complejos nos permiten hallar la solución de la ecuación diferencial del circuito. Entonces

$$V_0 \cos \omega t = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\, dt$$

Como ***la ecuación es lineal***, esto equivale a

$$Re(V_0 e^{i\omega t}) = Re(R\tilde{I}\, e^{i\omega t} + L\frac{d\tilde{I}\, e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\, e^{i\omega t} dt)$$

Circuito RLC en serie



- Resolvamos entonces en complejos y luego tomemos la parte real

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I}\, e^{i\omega t} + L\frac{d\tilde{I}\, e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\, e^{i\omega t} dt$$

- Reemplazamos la integral y la derivada

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I}\, e^{i\omega t} + i\omega L\tilde{I}\, e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}\, e^{i\omega t}$$

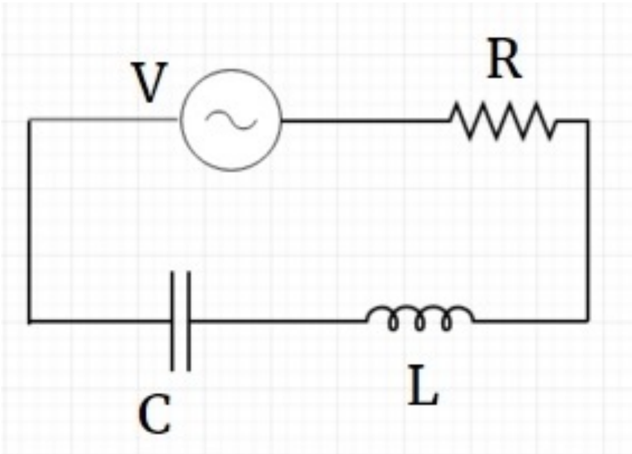
- simplificamos $e^{i\omega t}$

$$V_0 = R\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}$$

Circuito RLC en serie

- Y por último despejamos $\tilde{I}$

$$V_0 = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right]\tilde{I}$$

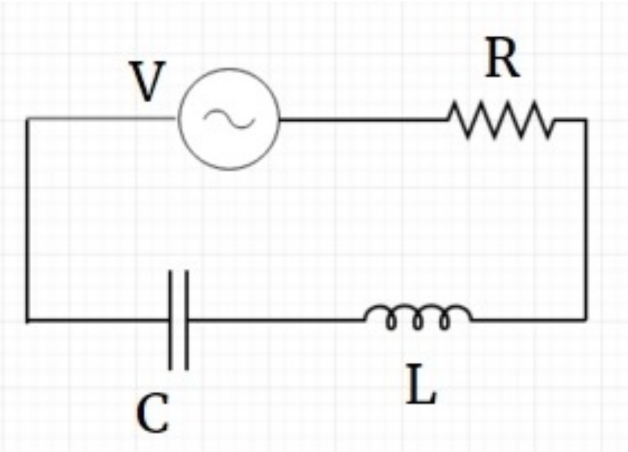


$$\tilde{I} = \frac{V_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{V_0}{Z}$$

donde Z es la *impedancia resultante del circuito*

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

Circuito RLC en serie



- Entonces, la corriente es

$$I(t) = Re(\tilde{I}e^{i\omega t}) = Re\left[\frac{V_0}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}}\, e^{i\omega t}\right]$$

- Llamemos θ a la fase de la impedancia

$$Z = R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] = |Z|e^{i\theta}$$

$$I(t) = Re\left[\frac{V_0}{|Z|e^{i\theta}}\, e^{i\omega t}\right] = Re\left[\frac{V_0}{|Z|}\, e^{i(\omega t-\theta)}\right]$$

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta)$$

Circuito RLC en serie

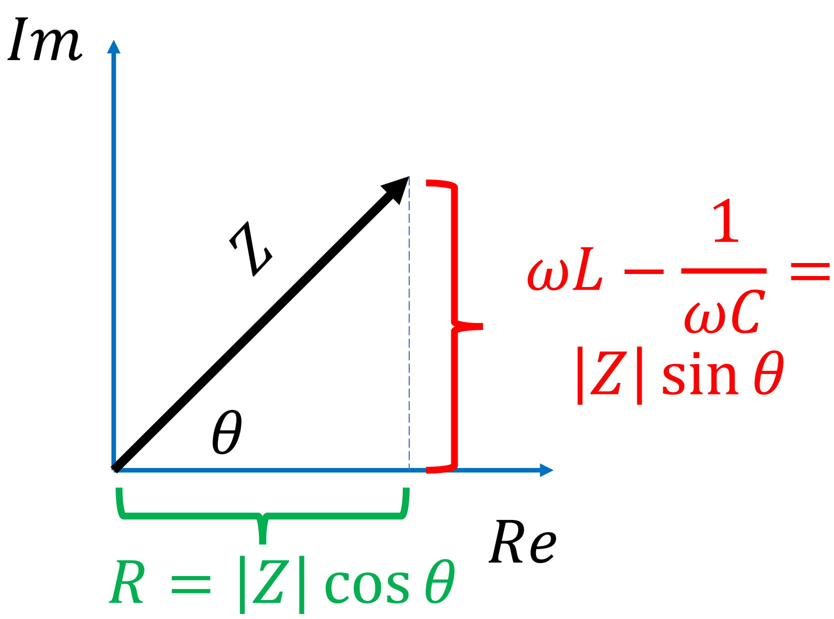
- La impedancia tiene las propiedades:

$$Z = R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] = |Z|e^{i\theta}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Impedancia Z en el plano complejo

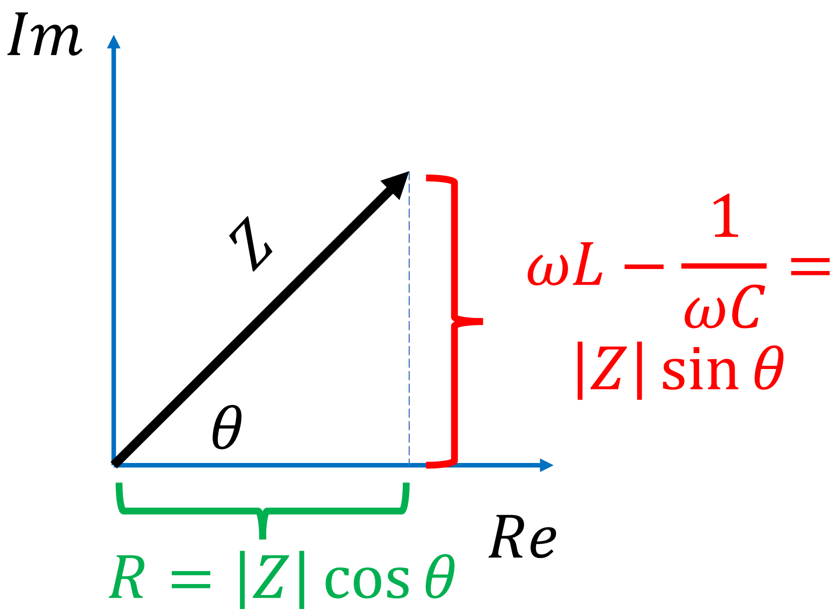


Circuito RLC en serie

- Entonces la solución final es

$$I(t)=\frac{V_0\ \cos\left[\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right]}{\sqrt{R^2+\left[\omega L-\frac{1}{\omega C}\right]^2}}$$

Impedancia Z en el plano complejo



La impedancia

- Como vemos en este caso, la intensidad de la corriente depende de ω, C, L y R .
- También de ellas depende su fase.
- Llamemos nuevamente I_0 a la amplitud real de I:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}$$

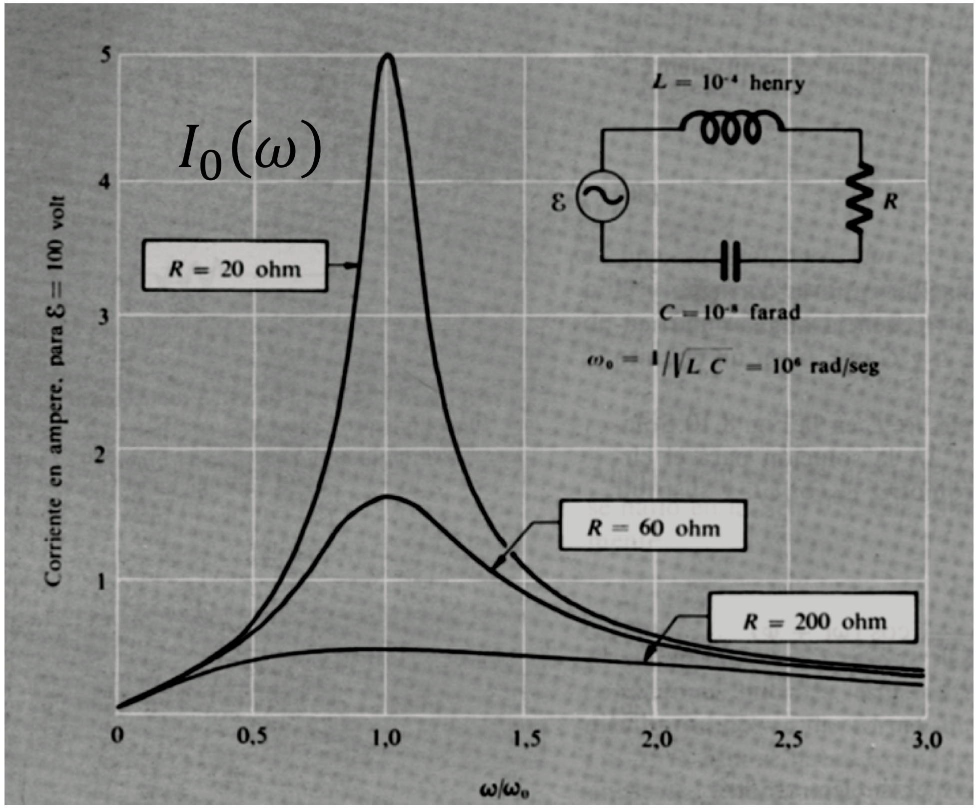
La impedancia

- En la figura vemos cómo varía I_0 en función de ω para:

$$V_0 = 100\,V$$
$$C = 10^{-8} Farad,$$
$$L = 10^{-4} H$$
$$R = 20, 60, 200\,\Omega$$

- Vemos que:

$$\lim_{\omega\to 0} I_0(\omega) = 0 \text{ y } \lim_{\omega\to\infty} I_0(\omega) = 0$$



La impedancia

- $I_0(\omega)$ alcanza un máximo cuando
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 rad/s$$
- Cuando esto ocurre se da una resonancia y el efecto de L y C parecen desaparecer (hasta la fase)
$$I_{res}(t) = \frac{V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} \mathrm{t}}{R}$$
- El máximo es más intenso y más fino en la medida que R es más pequeño