Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 1

Clase 6

Facundo Pugliese

Energía electrostática: Definición

Análogamente a F1, vamos a definir la **energía electrostática** de un sistema a través de la noción de trabajo. En este caso, el trabajo necesario para armar la configuración (asumiendo que las cargas comienzan infinitamente lejos entre sí).

El trabajo necesario para mover una carga q_i en un campo eléctrico externo E desde ∞ hasta r es:

$$-q_i \int_{\infty}^{\bar{r}} \bar{E} \cdot \mathrm{d}\bar{l} = q_i \int_{\infty}^{\bar{r}} \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\bar{l} = q_i\phi(\bar{r}) - q_i\phi(\infty) = q_i\phi(\bar{r})$$

Si pensamos que el campo E es generado por $i\text{-}1$ cargas ubicadas anteriormente, el potencial ϕ es la suma de los $i\text{-}1$ potenciales ϕ_j de cada una de las cargas (por superposición). Entonces, el trabajo necesario para traer la i-esima carga es:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \phi_j(\bar{r}_i)$$

Energía electrostática: Definición

Sumando los trabajos de cada partícula, obtengo el trabajo total, que defino como la **energía potencial** del sistema:

$$U = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \phi_j(\bar{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \phi_j(\bar{r}_i)$$

Aunque parezca inocente, pero esta idea de obtener la energía sumando los potenciales de interacción entre cada par de partículas es una noción transversal a la física. **Vale para toda fuerza conservativa** (gravitatoria, Lennard-Jones, etc).

Si considero la suma de potenciales ϕ_j como el potencial total ϕ y paso al continuo, puedo expresar

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int \rho(\bar{r}) \phi(\bar{r}) \mathrm{d}^3 r = \frac{\varepsilon_o}{2} \int |\bar{E}(\bar{r})|^2 \mathrm{d}^3 r}$$

Energía electrostática: 2 formas

Osea que tenemos 2 expresiones para calcular la energía electrostática U

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\bar{r})\phi(\bar{r})\mathrm{d}^3r = \frac{\varepsilon_o}{2}\int |\bar{E}(\bar{r})|^2\mathrm{d}^3r$$

¿Cuando elegiría una por sobre la otra? La principal diferencia es que la primera expresión integra la densidad ρ, por lo que *la integral se reduce a una región acotada del espacio* (el volumen, la superficie o la línea con $\rho, \boldsymbol{\sigma}, \lambda \neq 0$).

La segunda será donde $E \neq 0$; habitualmente, en todo el espacio. La ventaja es que muchas veces el campo eléctrico E es matemáticamente más sencillo.

Cual sea más sencilla de aplicar dependerá del problema en cuestión.

Observación: Estas integrales no convergen para distribuciones infinitas.

Ejercicio 19

19. Calcular el trabajo total para traer una carga Q en cantidades infinitesimales y cuasiestáticamente, desde un punto muy alejado hasta una esfera de radio R, originalmente descargada. Suponer que la distribución de carga es uniforme en todo momento.

- Si la esfera es cargada en superficie.
- Si se carga en volumen en las dos siguientes formas
  1) Se carga a radio constante R; ρ crece desde cero hasta ρ_{final}.
  2) Se colocan capas sucesivas de densidad ρ_{final}; el radio crece desde cero hasta R. El resultado debe ser el mismo que en 1).
- Comparar con la energía potencial almacenada en el campo eléctrico.

Nos vamos a concentrar en la esfera cargada en volumen. Arranquemos calculando la energía electrostática usando ambas expresiones de U

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int \rho(\bar{r})\phi(\bar{r})\mathrm{d}^3r = \frac{\varepsilon_o}{2}\int |\bar{E}(\bar{r})|^2\mathrm{d}^3r}$$

Ejercicio 19: Vía el potencial

Primero, necesitamos la expresión de potencial y campo para la esfera cargada uniformemente. Usamos el resultado ya conocido del Ej 8

$$\rho(\bar{r}) = \begin{cases} \rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\phi(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{kQ}{2R^3}\left[3R^2 - r^2\right] & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}\hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\bar{r})\phi(\bar{r})\mathrm{d}^3r = \frac{1}{2}\int_0^R \int_0^{4\pi} \rho_o \frac{kQ}{2R^3}\left[3R^2 - r^2\right] r^2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}r = \frac{1}{2}4\pi\rho_o\frac{kQ}{2R^3}\int_0^R \left[3R^2r^2 - r^4\right]\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}4\pi\rho_o\frac{kQ}{2R^3}\left[R^5 - \frac{1}{5}R^5\right]$$

$\phi(R)$

$$= \frac{1}{2}\frac{kQ}{2}4\pi\rho_o R^2\frac{4}{5} = \frac{1}{2}kQ\frac{3Q}{R}\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\frac{6}{5}Q\frac{kQ}{R}$$

$$Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_o$$

¡No me importa la forma del potencial fuera de la distribución!

Ejercicio 19: Vía el campo eléctrico

Primero, necesitamos la expresión de potencial y campo para la esfera cargada uniformemente. Usamos el resultado ya conocido del Ej 8

$$\rho(\bar{r}) = \begin{cases} \rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\phi(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{kQ}{2R^3}\left[3R^2 - r^2\right] & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}\hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int |\bar{E}(\bar{r})|^2 d^3r = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_0^\infty \int_0^{4\pi} E^2(r) r^2 d\Omega dr &= \frac{4\pi\varepsilon_o}{2}\left[\int_0^R (E(r)r)^2 dr + \int_R^\infty (E(r)r)^2 dr\right] \\ &= \frac{1}{2k}\left[\int_0^R \left(\frac{kQr}{R^3}r\right)^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{kQ}{r^2}r\right)^2 dr\right] \\ &= \frac{1}{2k}k^2Q^2\left[\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr\right] \\ &= \frac{1}{2}kQ^2\left[\frac{1}{R^6}\frac{R^5}{5} + \frac{1}{R}\right] = \frac{1}{2}\frac{6}{5}Q\frac{kQ}{R} \end{aligned}$$

$\phi(R)$

¿Cual les resultó más sencilla?

En este caso, es cuestión de gustos

Ejercicio 19: Mediante el trabajo D=

Calculemos ahora la energía U mediante el trabajo necesario para armar la configuración. Lo hago para el caso 2 y ustedes pueden divertirse con el otro.

- Si se carga en volumen en las dos siguientes formas
  1) Se carga a radio constante R; ρ crece desde cero hasta ρ_{final}. $Q/V = 3Q/4\pi R^3$
  2) Se colocan capas sucesivas de densidad ρ_{final}; el radio crece desde cero hasta R. El resultado debe ser el mismo que en 1).

Imagínense que construimos la esfera trayendo una carga dq desde el ∞ hasta la superficie de la esfera que ya tenemos armada. Por ejemplo, si ya tenemos construida una esfera de radio r y carga $q=4\pi r^3\rho_f/3$, el trabajo necesario para traer un dq desde el ∞ hasta r es

$$dW = -dq\int_{\infty}^{r} \bar{E}\cdot d\bar{l} = dq\phi(r;q,r)$$

donde $\phi(r;q,a)$ es el potencial de una esfera de radio a y carga q.

$$\phi(r;q,a) = \begin{cases} \frac{kq}{2a^3}\left(3a^2 - r^2\right) & \text{si } r \leq a \\ \frac{kq}{r} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

Ejercicio 19: Mediante el trabajo D=

Por lo tanto, el diferencial de trabajo es $\mathrm{d}W = \frac{kq}{r}\mathrm{d}q$

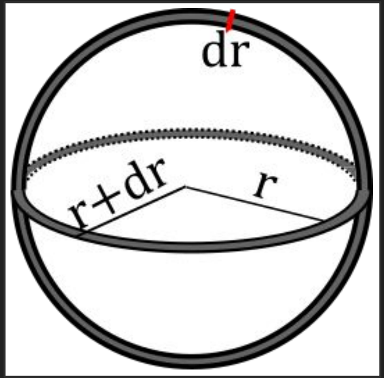
y la cantidad de carga del sistema pasa de q a $q+\mathrm{d}q$. Como la densidad de la esfera es constante $\rho_f = Q/V = 3Q/4\pi R^3$, el radio r de la esfera debe aumentar un $\mathrm{d}r$ tal que no varíe la densidad de carga

$$\underbrace{\frac{3q}{4\pi r^3}}_{\text{Antes}} = \underbrace{\frac{3(q+\mathrm{d}q)}{4\pi(r+\mathrm{d}r)^3}}_{\text{Después}} \iff (r+\mathrm{d}r)^3 q = (q+\mathrm{d}q)r^3 \iff \left[(r+\mathrm{d}r)^3 - r^3\right] q = r^3\mathrm{d}q$$

A primer orden en $\mathrm{d}r$ la relación es

$$r^3\mathrm{d}q = \left[3r^2\mathrm{d}r + O(\mathrm{d}r^2)\right] q \approx 3r^2\mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}q = \frac{3q}{r}\mathrm{d}r = \frac{3q}{r}\mathrm{d}r = 4\pi r^2 \rho_f \mathrm{d}r$$

Volumen de un cascarón esférico de ancho $\mathrm{d}r$



Ejercicio 19: Mediante el trabajo D=

Poniendo todo junto $$\mathrm{d}W = \frac{kq}{r}\mathrm{d}q = \frac{k}{r}\frac{4\pi}{3}r^3\rho_f 4\pi\rho_f r^2\mathrm{d}r = 3\left(\frac{4\pi}{3}\rho_f\right)^2 k\, r^4\mathrm{d}r$$

Para obtener el trabajo total W, "simplemente integro". Esto equivale al sumar el trabajo de traer cada una de las capas diferenciales, desde $r=0$ hasta $r=R$.

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^R 3k\left(\frac{4\pi}{3}\rho_f\right)^2 r^4\mathrm{d}r = 3k\left(\frac{Q}{R^3}\right)^2\int_0^R r^4\mathrm{d}r$$
$$= 3k\frac{Q^2}{R^6}\frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}Q\frac{kQ}{R} = \frac{1\,6}{2\,5}Q\phi(R)$$

Que bueno que ya tenemos un par de fórmulas cerradas, ¿no?
Les dejo confirmar que el caso 1 da lo mismo, pero que hay que tener un poco más de cuidado con el $\mathrm{d}W$ (¡no toda la carga $\mathrm{d}q$ va al mismo r!)

Ejercicio 19: Comentario final

19. Calcular el trabajo total para traer una carga Q en cantidades infinitesimales y cuasiestáticamente, desde un punto muy alejado hasta una esfera de radio R, originalmente descargada. Suponer que la distribución de carga es uniforme en todo momento.

   - Si la esfera es cargada en superficie.

Si entendieron lo de recién, calcular el trabajo W para la esfera cargada en superficie es estrictamente más fácil que lo que hicimos recién (¡sólo hay un $r=R$!)

Por otro lado, ¿cuál de las 2 integrales les parece que será más sencilla para calcular U? ¿Integrando la densidad o integrando el campo?