Comentario del ejercicio 1.13

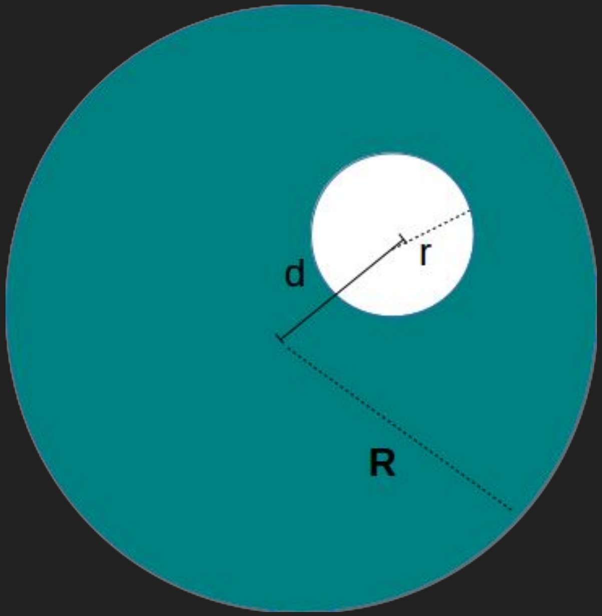
13. • Una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio r en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (R - r)$ del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

Este ejercicio integra la aplicación del Principio de Superposición y la aplicación de la Ley de Gauss, conocimientos explorados en la Guía 1.

13. • Una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio r en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (R - r)$ del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

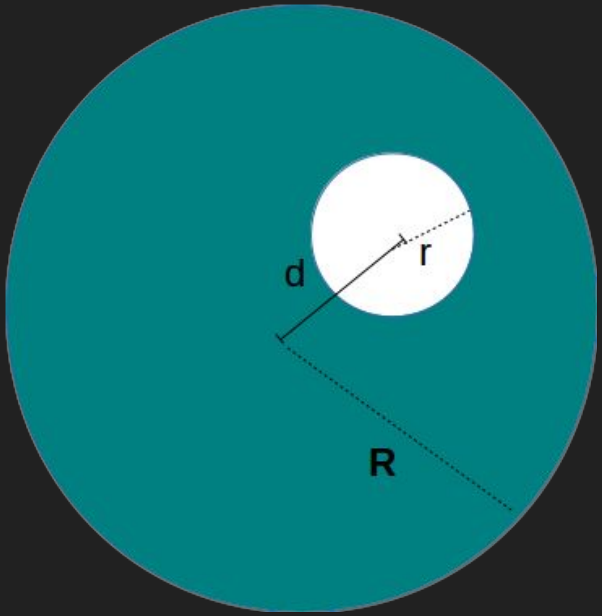
El problema me plantea obtener el campo eléctrico en ele eje de simetría de la configuración.

Para eso me planteo qué simetrías tenemos y por ende qué sistema de coordenadas elegimos.



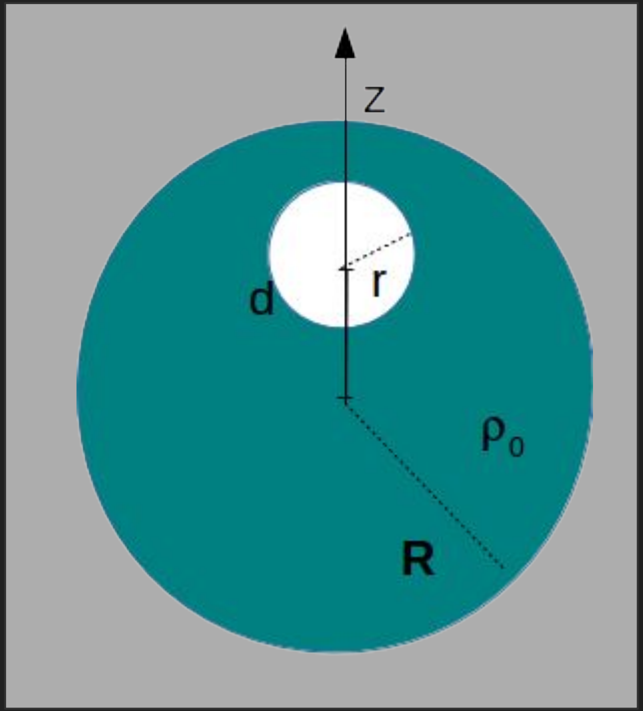
Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

Por lo tanto conviene elegir el eje z coincidente con esa dirección.



Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

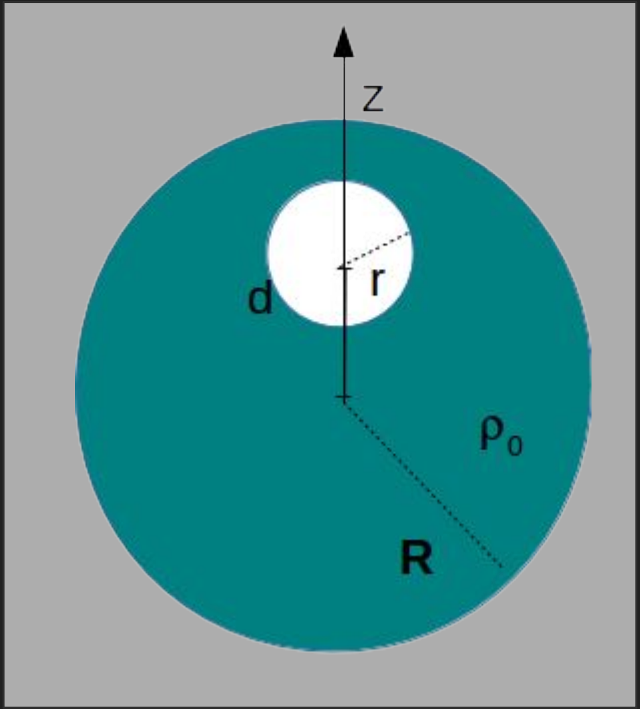
Por lo tanto conviene elegir el eje z coincidente con esa dirección.



¿Cómo resolvemos este problema?

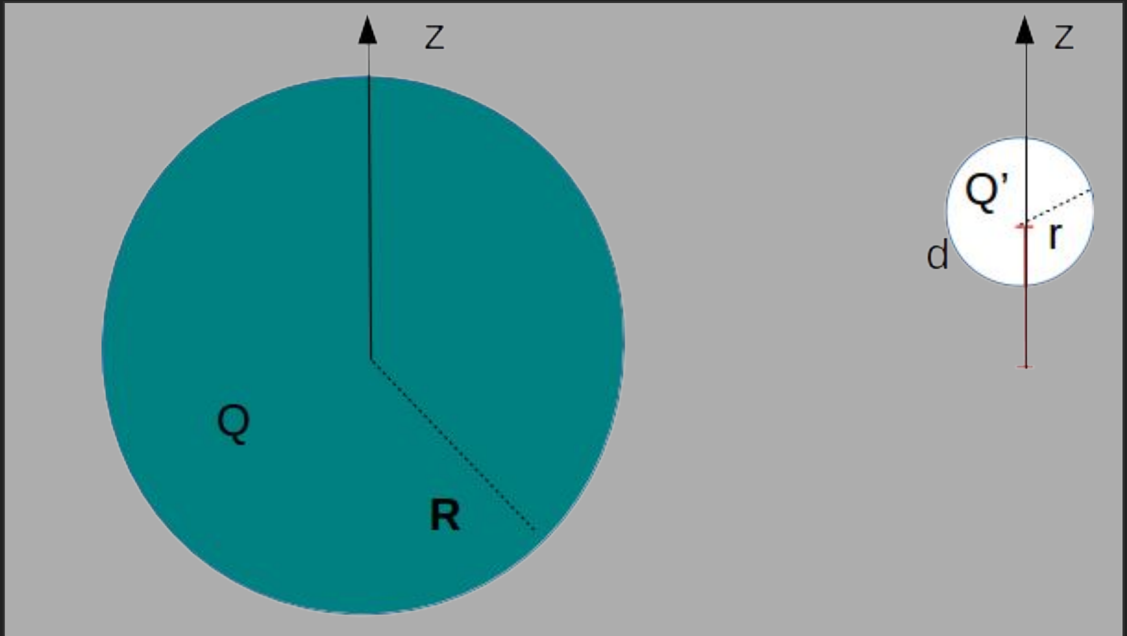
Podemos calcular el campo por definición pero sería un poco" cuentoso" o podemos utilizar resultados previos, ya que en realidad tenemos 2 esferas.

¿Cómo pensamos el agujero?



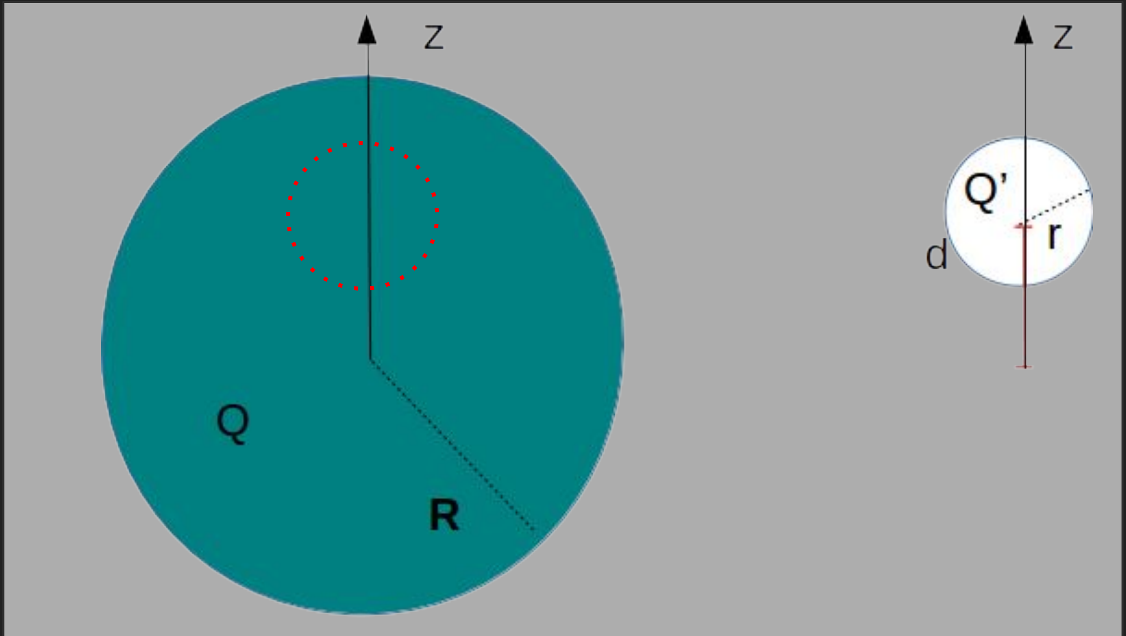
¿Cómo pensamos el agujero?

Podemos pensar como una superposición de 2 esferas de diferentes carga Q y Q’. De manera que al sumar Q y Q’ en la esfera se debe cumplir que adentro de esfera chica la carga sea nula.



Es decir Q+Q'=0 dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

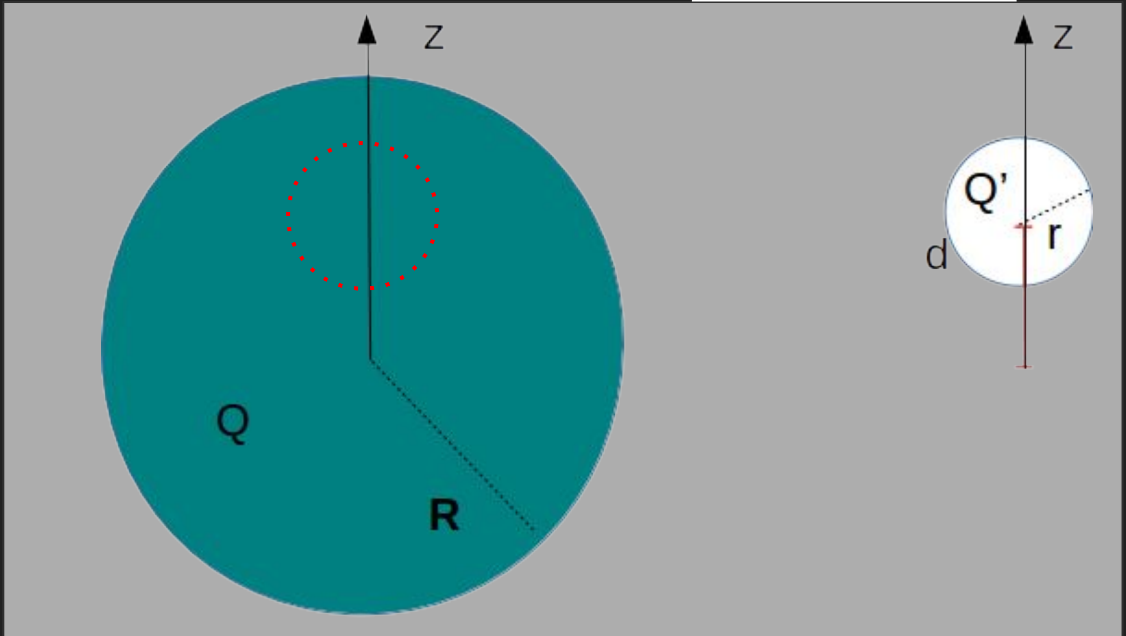


Es decir Q+Q'=0 dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

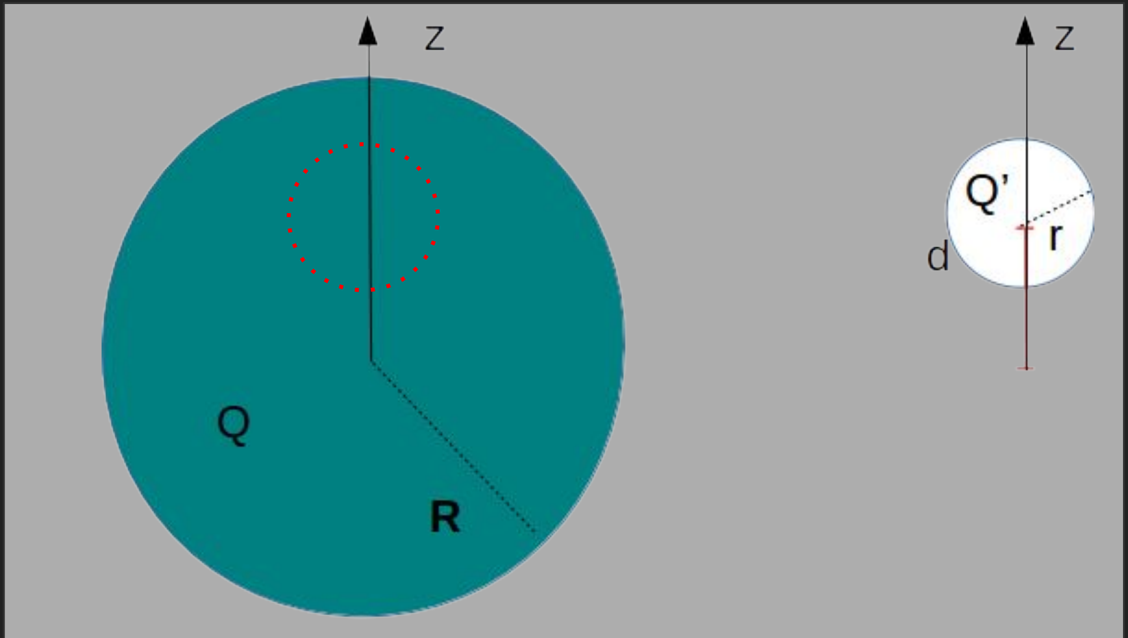
Como la distribución e de carga es uniforme...

$$Q_{rojo} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$



Entonces $Q_{rojo}+Q'=0$.

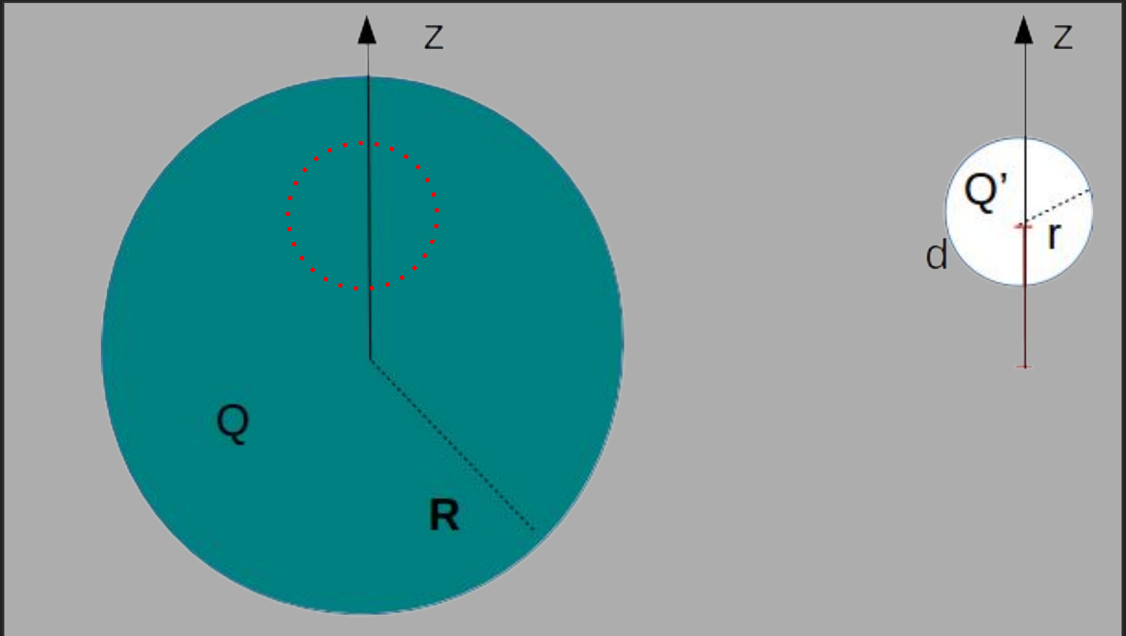
De acá sale que ...



Entonces $Q_{rojo}+Q'=0$.

De acá sale que ...

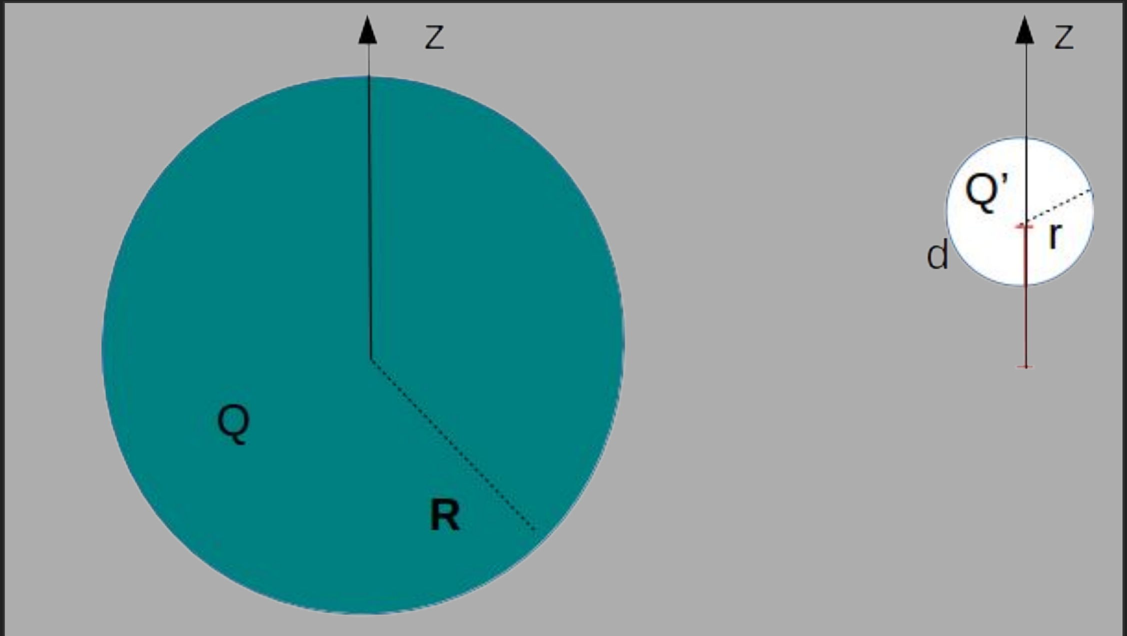
$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$



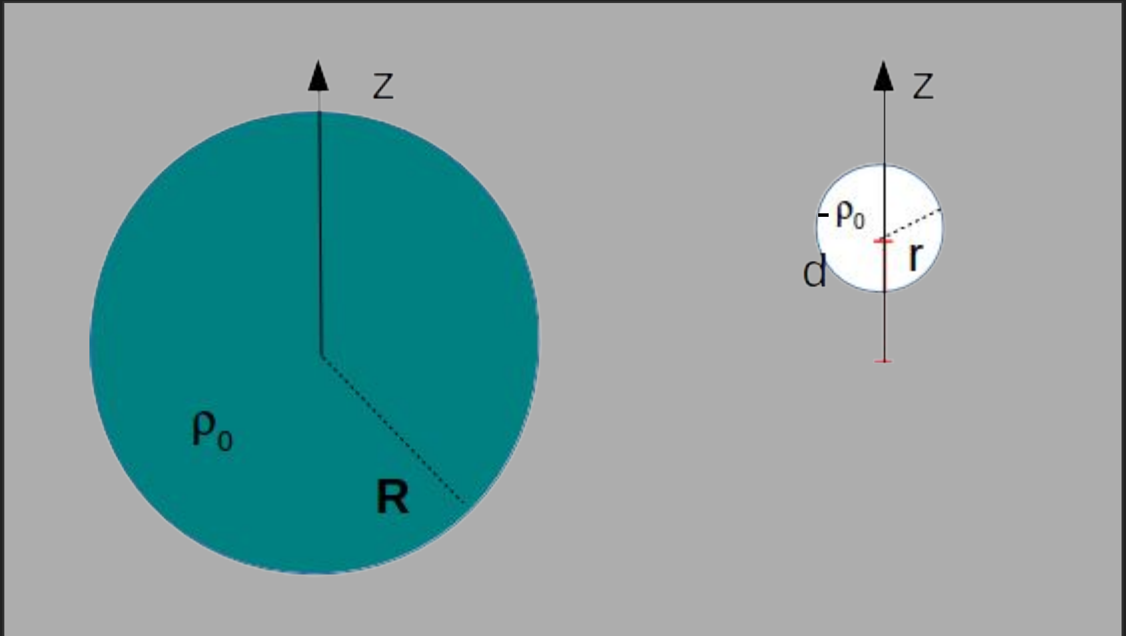
Entonces debo obtener el campo de 2 esferas, una en el centro (grande) y la otr descentrada con cargas Q y Q’-

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0$$

$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$

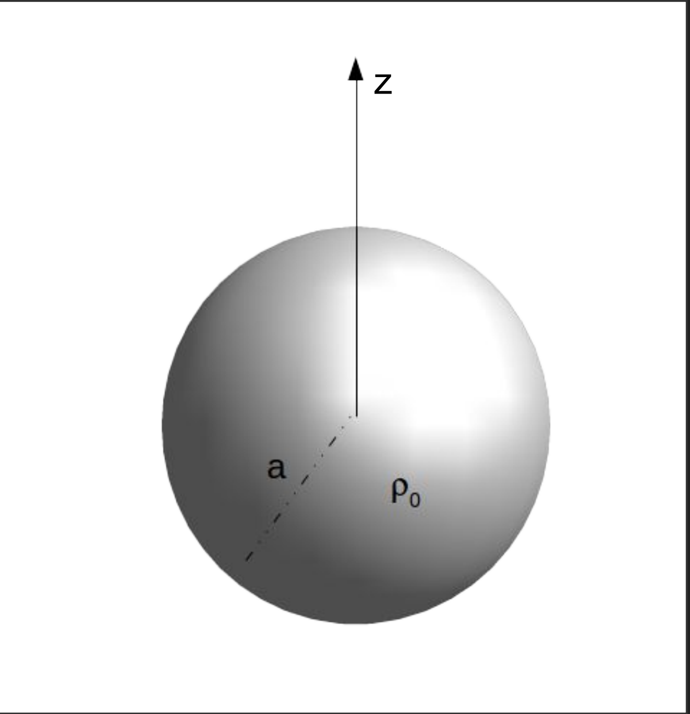


Como las distribuciones de carga son uniformes es equivalente a pensar en este problemas de dos esferas de densidad uniforme como indica la figura.



Ahora bien…

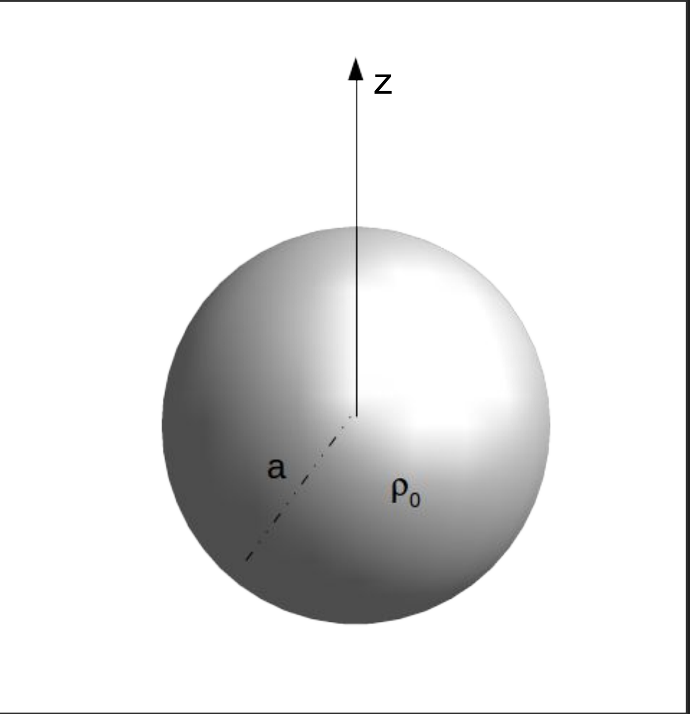
¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



-

Ahora bien…

¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?

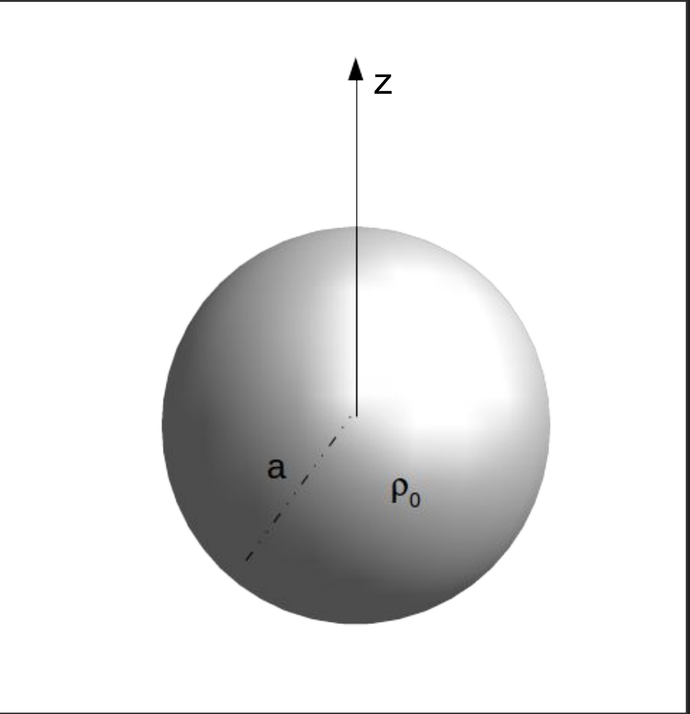


Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Ahora bien…

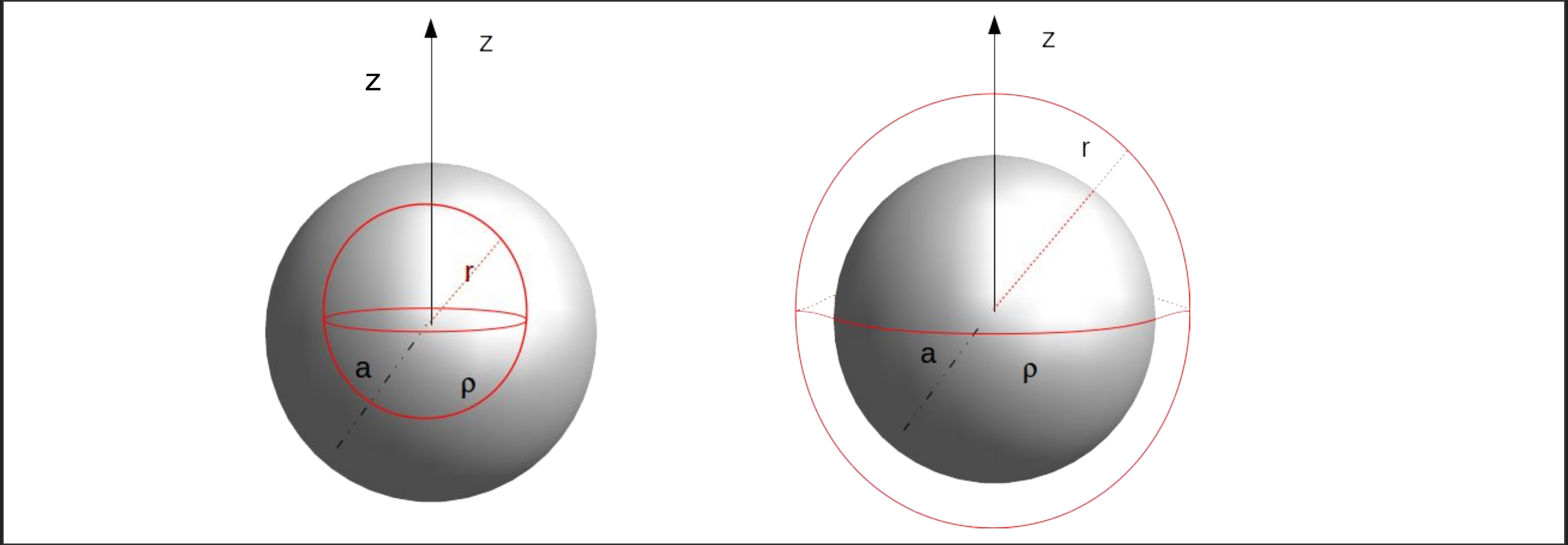
¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



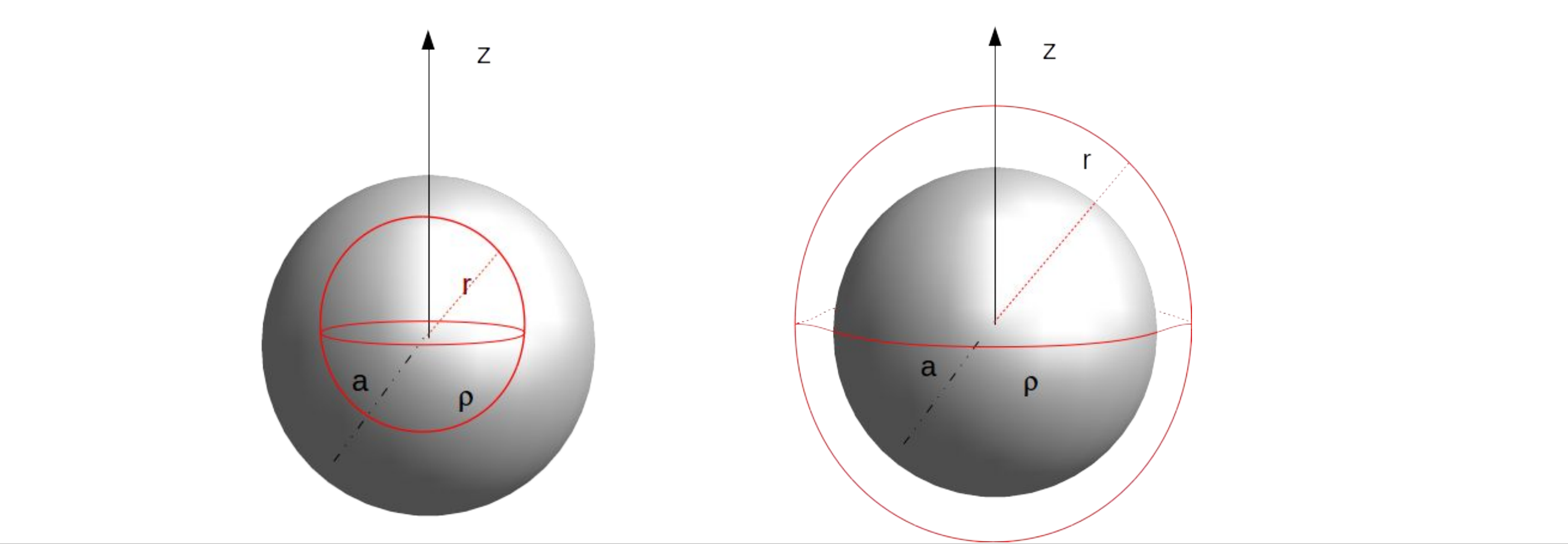
Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

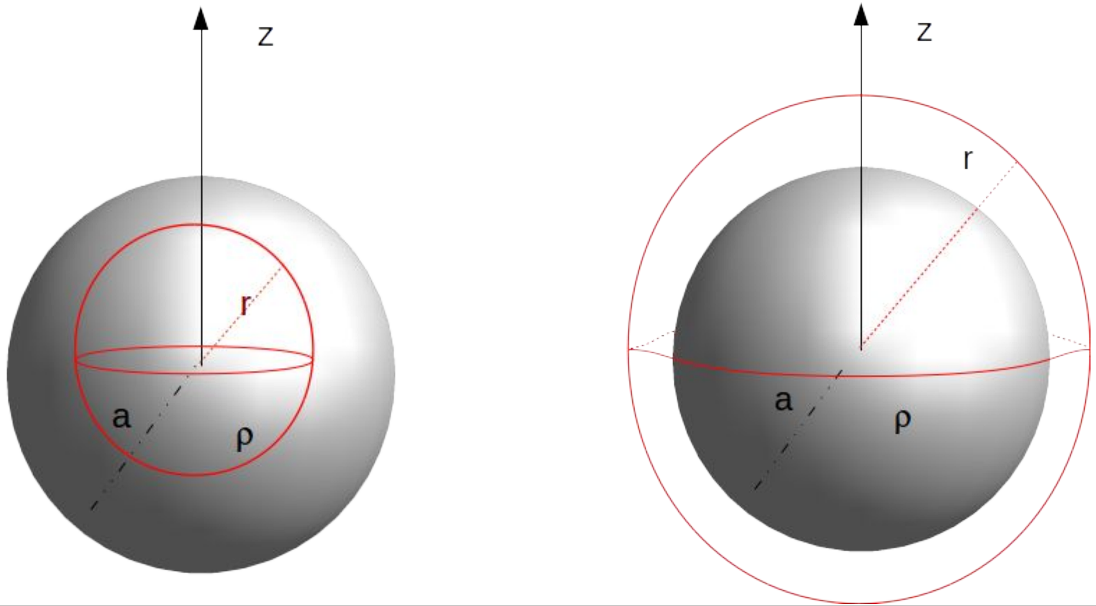
La mejor superficie será un casquete esférico pero debo tener en cuanta que hay carga en volumen y por lo tanto debo calcular el flujo tanto dentro como fuera de la distribución



$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} & \text{si } r < a \\ \\ \frac{4\pi a^3 \rho}{3\varepsilon_0} & \text{si } a < r \end{cases}$$

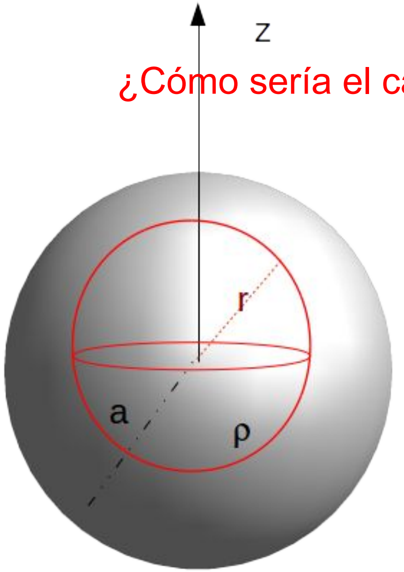


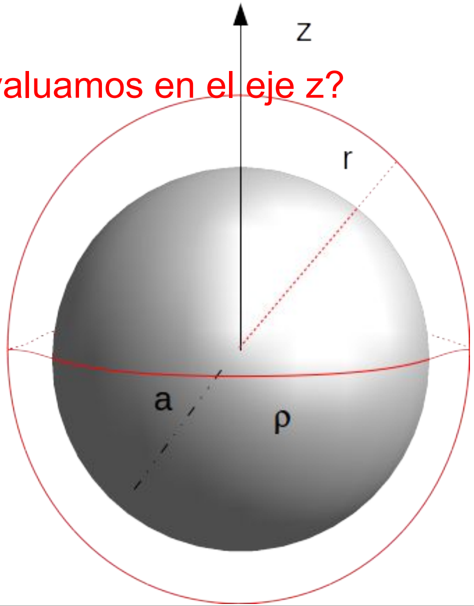
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < a \\ \\ \dfrac{a^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$



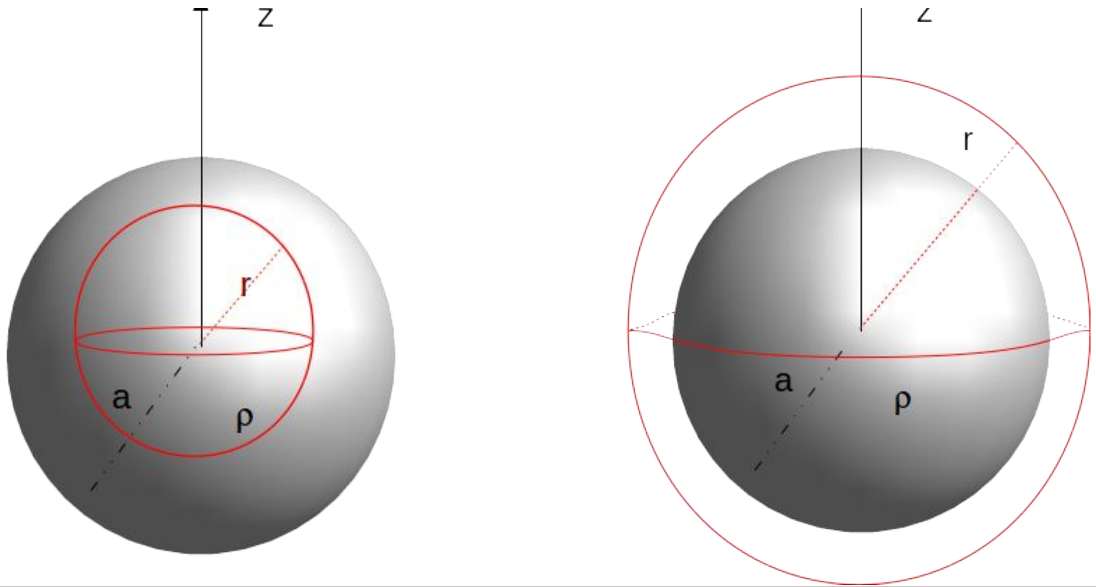
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < a \\[2em] \dfrac{a^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$

¿Cómo sería el campo si lo evaluamos en el eje z?

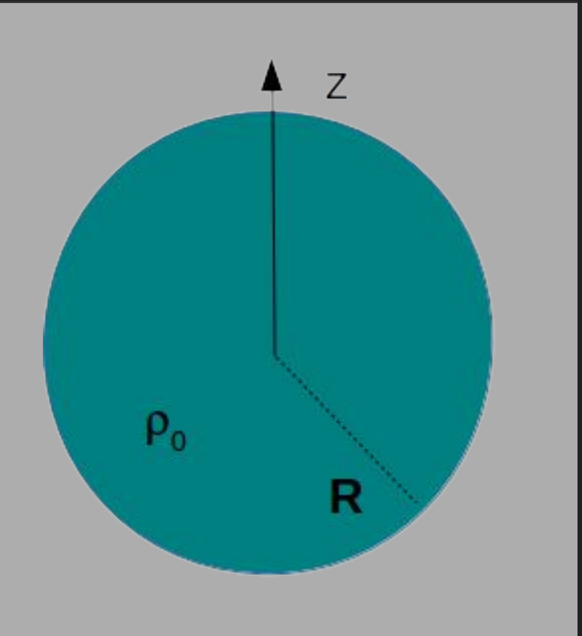




$$\vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{z\rho}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < a \\[2em] \dfrac{a^3 z\rho}{3|z|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } a < |z| \end{cases}$$



Entonces en este caso podemos decir que el campo sobre el eje z generado por la esfera grande es

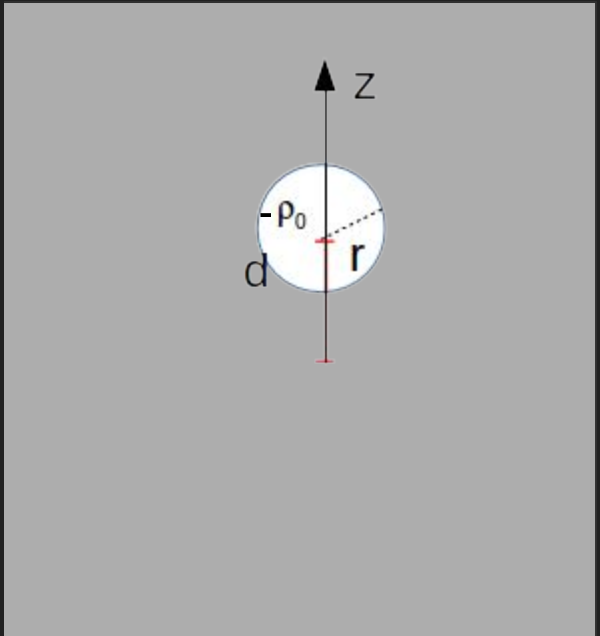


$$\vec{E}_{Esf\ Grande}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{z\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < R \\ \\ \frac{R^3 z\rho_0}{3|z|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } R < |z| \end{cases}$$

-

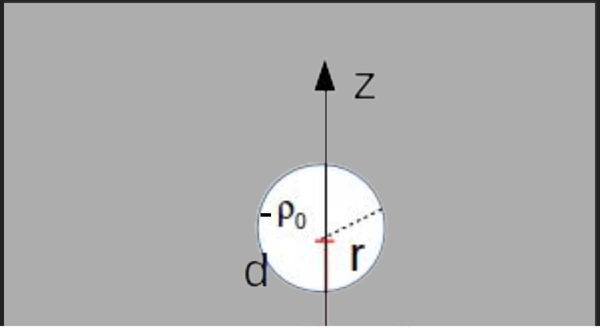
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \to z - d$$



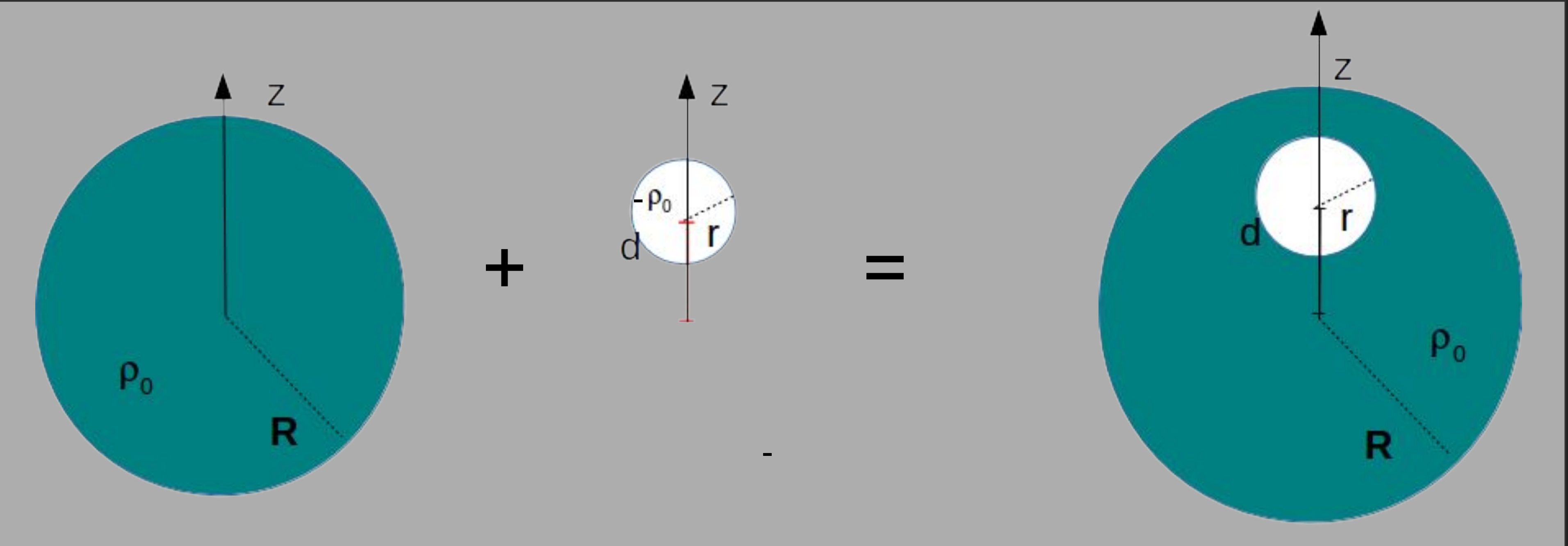
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \to z - d$$



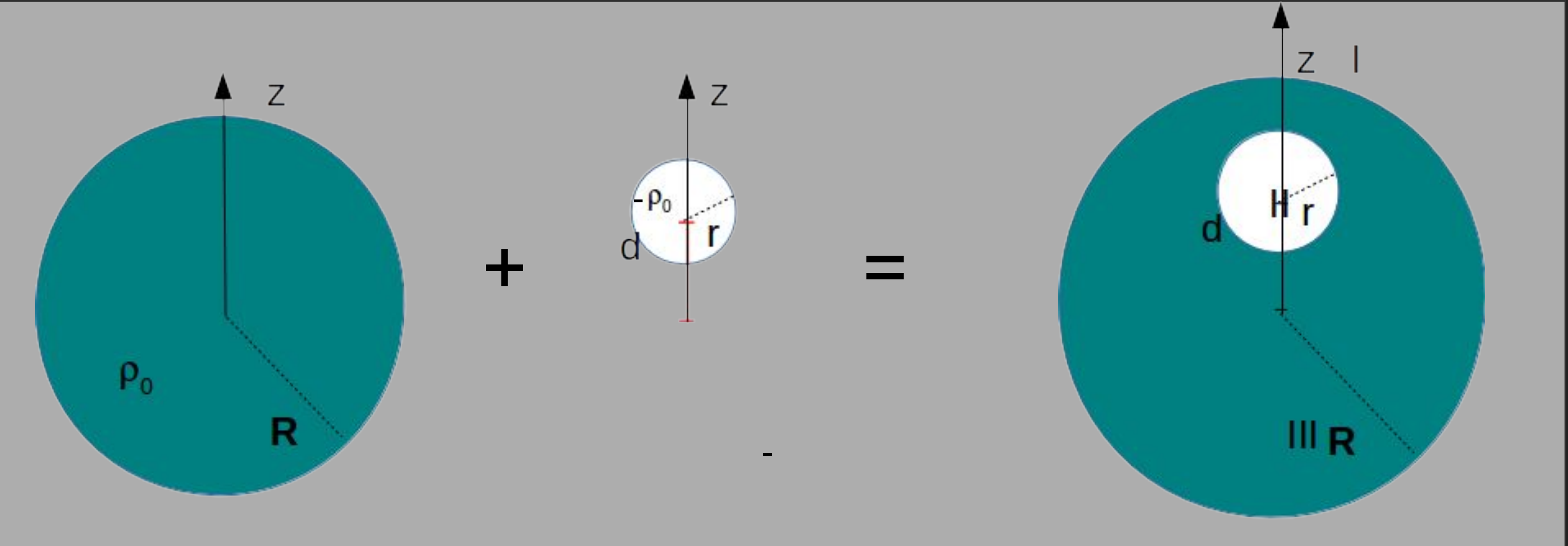
$$\vec{E}_{Esf\ chica}(z\hat{z}) = \begin{cases} -\frac{(z-d)\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z-d| < r \\ \\ -\frac{r^3(z-d)\rho_0}{3|(z-d)|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } r < |z-d| \end{cases}$$

Volviendo al problema inicial y conociendo los campos de cada una de las esferas sobre el eje z. Debemos hacer superposición de los campos generados individualmente.



Como los campos de las esferas no son iguales afuera que adentro, hay que realizar una superposición por sectores. Es decir, para conocer el el campo en

Región I: campo exterior de ambas esferas, Región II: campo interior de ambas esferas y Región III: Campo interior esfera grande y exterior de esfera chica.



$$\vec{E}_{Tot}(z\hat{z}) = \begin{cases} \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{af}_{Esf\ Grande} & \text{si } -R > z \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } -R < z < d-r \\ \vec{E}^{ad}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } d-r < z < d+r \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } d+r < z < R \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{af}_{Esf\ Grande} & \text{si } R < z \end{cases}$$