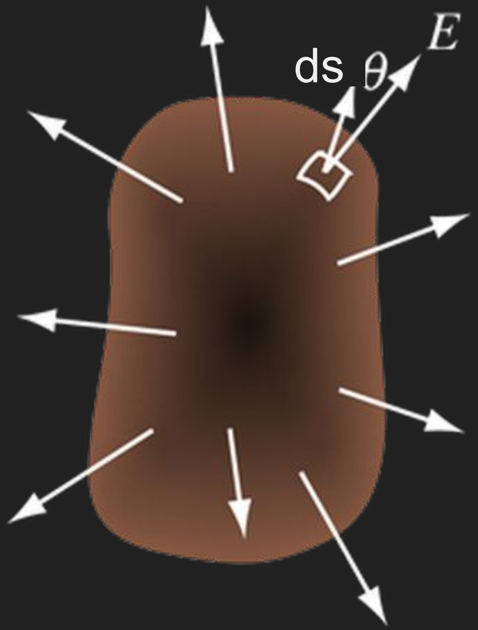
Física 3-Guía 1

Cátedra Dmitruk
Clase 3
Andrea Buccino

Ley de Gauss

La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctri
través de una superficie cerrada con la carga que é
encierra, a través de la expresión:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\,d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



Ley de Gauss-Aplicación

Si bien la ley de Gauss es una ley que relaciona el FLUJO del campo eléctrico con la carga, en algunos casos de alta simetría nos permitirá calcular el módulo del campo eléctrico.

Esto podrá hacerse si podemos elegir una superficie cerrada que sea sencilla de parametrizar y donde esa superficie cumpla con:

1. La componente del campo elećtrico sea normal a la superficie.
2. El módulo del campo eléctrico sea constante sobre la superficie.

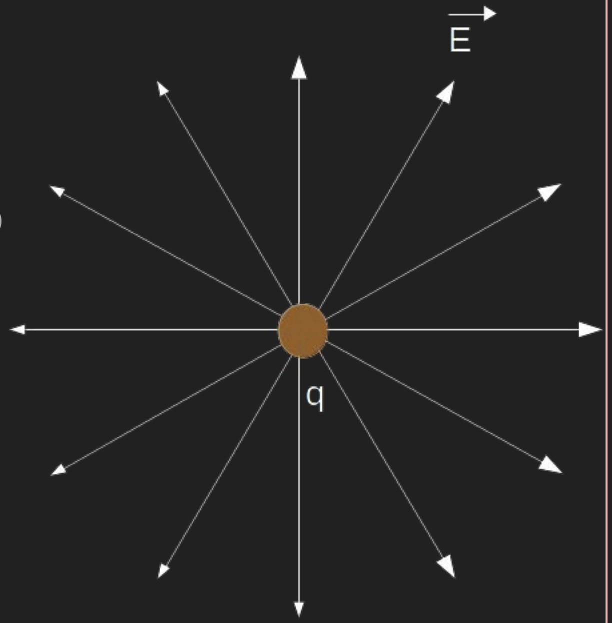
Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

Supongamos una carga puntual en el origen.

Sabemos que este campo tiene simetría

esférica. Por lo tanto, un casquete esférico concéntrico

es la superficie de Gauss indicada.



Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

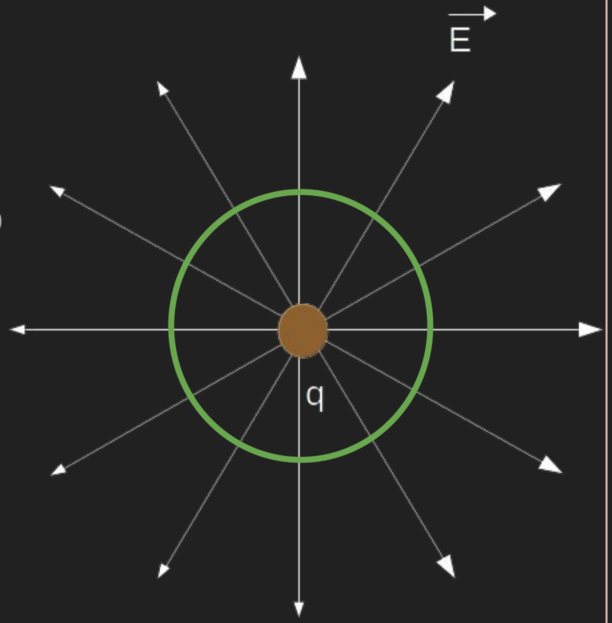
Supongamos una carga puntual en el origen.

Sabemos que este campo tiene simetría

esférica. Por lo tanto, un casquete esférico concéntrico

es la superficie de Gauss indicada.

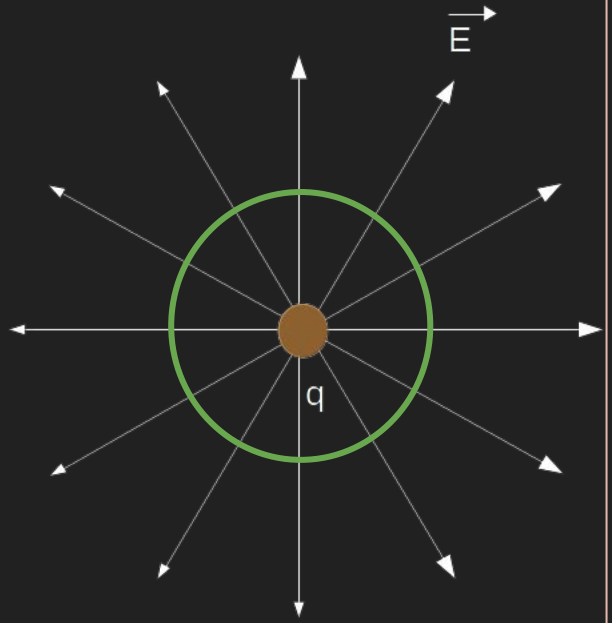
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$



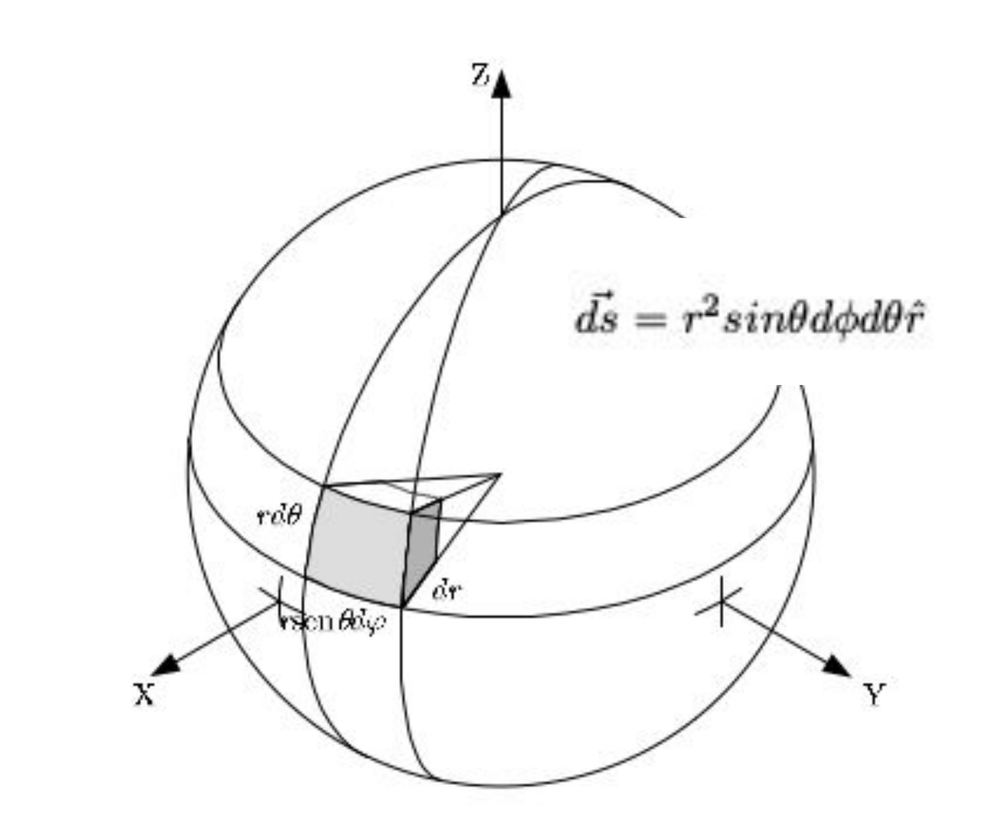
Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

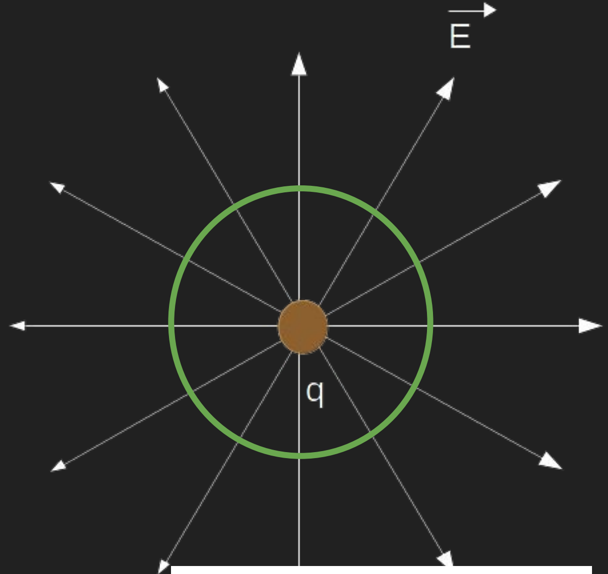
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$



Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual



$$\vec{ds} = r^2 sin\theta d\phi d\theta \hat{r}$$



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

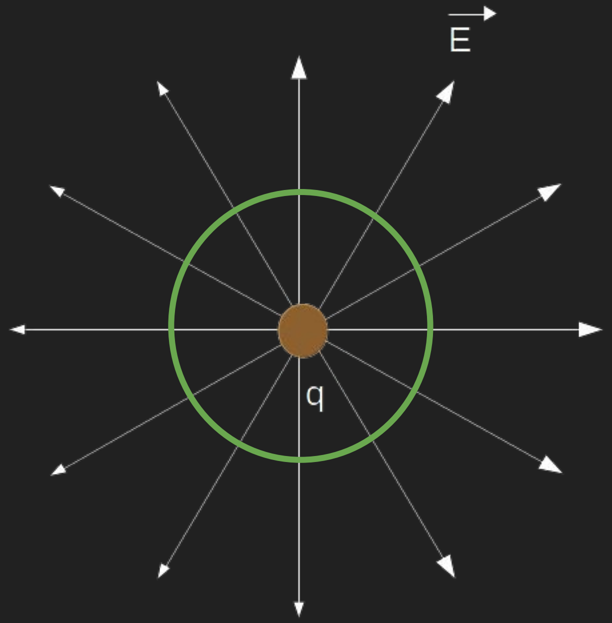
Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$d\vec{s} = r^2 sin\theta d\phi d\theta \hat{r}$$

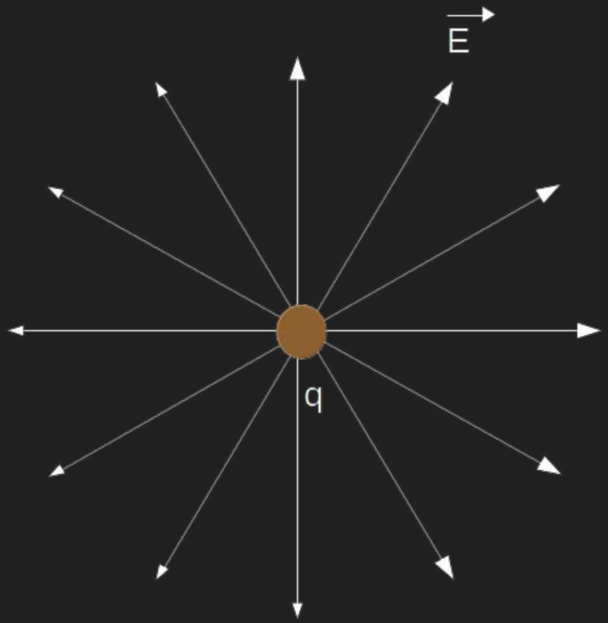
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}r^2 sin\theta d\phi d\theta \hat{r} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}r^2 sin\theta d\phi d\theta\hat{r} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

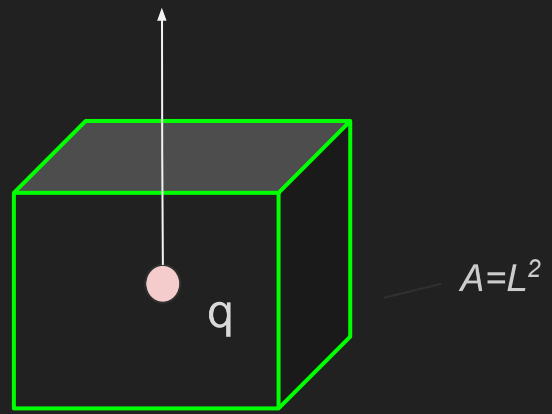
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r}$$



El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga q. Repita el cálculo cuando la carga q está en uno de los vértices del cubo.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

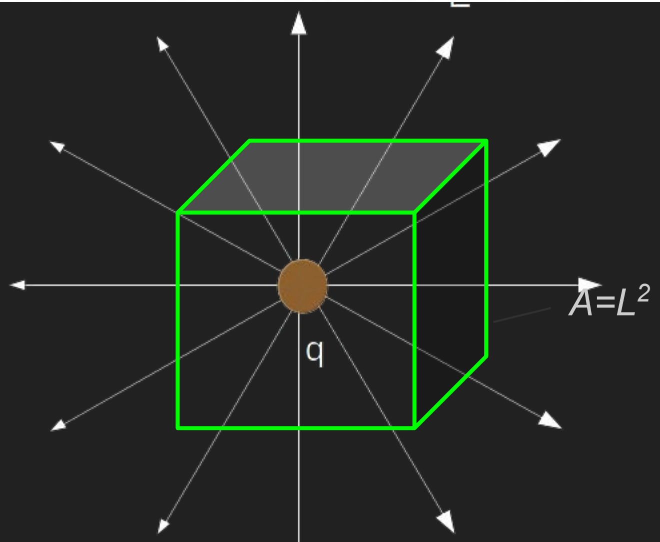


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga q. Repita el cálculo cuando la carga q está en uno de los vértices del cubo.

$$6\int\int_A \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como la carga se encuentra en el centro del cubo, el flujo a través de cada una de las caras es el mismo.

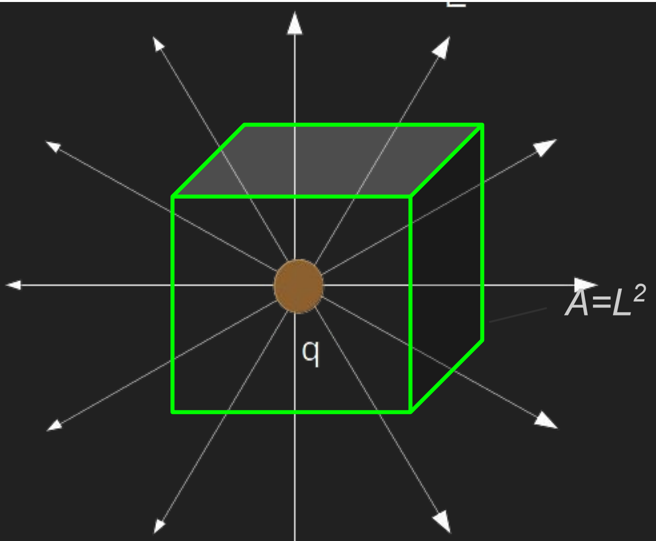


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga q. Repita el cálculo cuando la carga q está en uno de los vértices del cubo.

$$6\int\int_A \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int\int_A \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

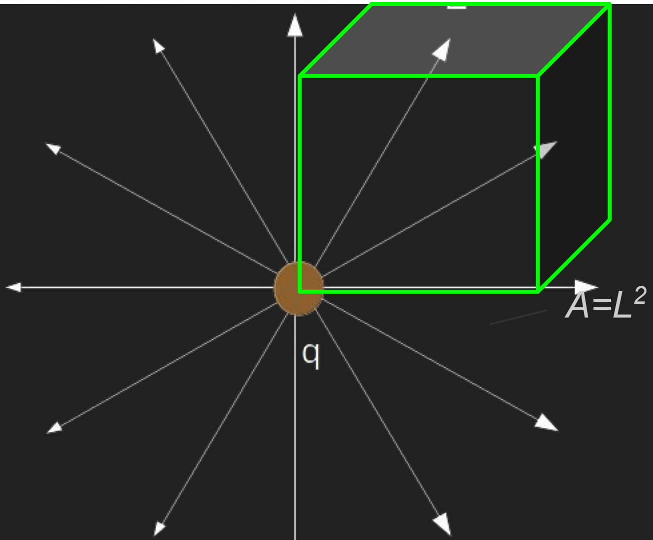


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga q. Repita el cálculo cuando la carga q está en uno de los vértices del cubo.

$$6\int\int_A \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int\int_A \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

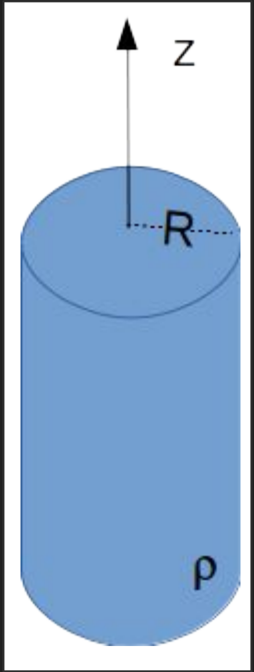


8. En cada uno de los casos siguientes determine, explotando la simetría de la configuración de cargas, cuál será la dirección del campo eléctrico y de cuáles coordenadas dependerán sus componentes. Utilizando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico en todo el espacio, y a partir de éste calcule el potencial electrostático. Grafique las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

   - Un hilo infinito con densidad lineal uniforme λ.
   - Un cilindro circular infinito de radio R, cargado uniformemente en volumen con densidad ρ.
   - Un plano con densidad superficial de carga uniforme σ.
   - Una esfera de radio R con densidad ρ uniforme.
   - Una esfera de radio R con densidad $\rho = Ar^n$ (A, n=constantes).

8. En cada uno de los casos siguientes determine, explotando la simetría de la configuración de cargas, cuál será la dirección del campo eléctrico y de cuáles coordenadas dependerán sus componentes. Utilizando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico en todo el espacio, y a partir de éste calcule el potencial electrostático. Grafique las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

- Un hilo infinito con densidad lineal uniforme λ.
- Un cilindro circular infinito de radio R, cargado uniformemente en volumen con densidad ρ.
- Un plano con densidad superficial de carga uniforme σ.
- Una esfera de radio R con densidad ρ uniforme.
- Una esfera de radio R con densidad $\rho = Ar^n$ (A, n=constantes).



Analicemos la simetría así podemos elegir una superficie de Gauss adecuada que nos facilite el cálculo del campo eléctrico.

En principio tenemos que elegir un sistema de coordenadas….

Analicemos la simetría así podemos elegir una superficie de Gauss adecuada que nos facilite el cálculo del campo eléctrico.

En principio tenemos que elegir un sistema de coordenadas….

Como la distribución de cargas es uniforme y está contenida en un volumen cilíndrico, es razonable elegir coordenadas cilíndricas.

Con lo cual …

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\phi,z)\hat{r} + E_\phi(r,\phi,z)\hat{\phi} + E_z(r,\phi,z)\hat{z}$$

Recordemos que la simetría de la distribución de cargas debe reflejarse en la simetría del campo eléctrico…

En principio pensemos si podemos ver qué componentes serán nulas de este campo eléctrico….

Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección z.

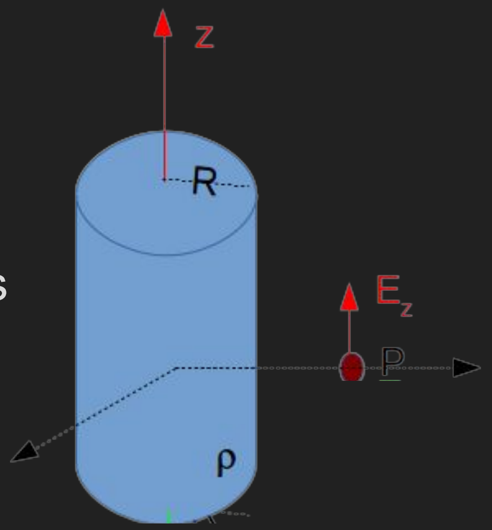
Imaginemos el punto P sobre el eje y, y

supongamos Ez no nulo en ese punto.

Realizaremos operaciones de simetría,

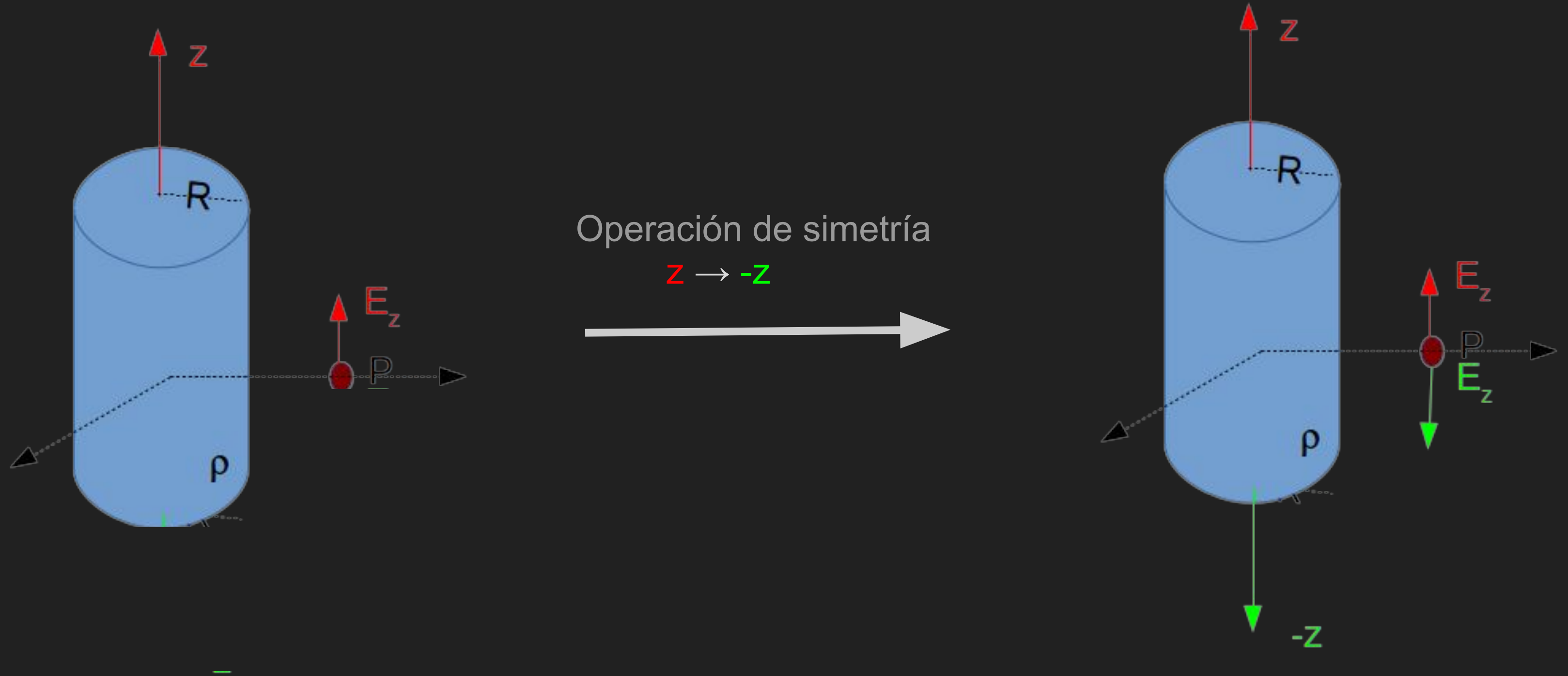
que no cambien la fuente y analizaremos

qué ocurre con el campo hipotético.



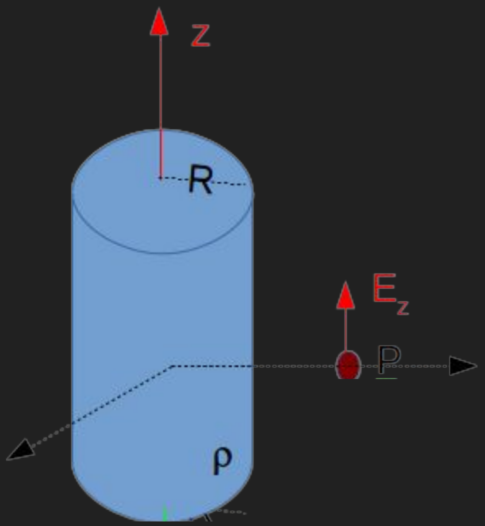
Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección z. Imaginemos el punto P sobre el eje y, y supongamos E_z no nulo en ese punto.



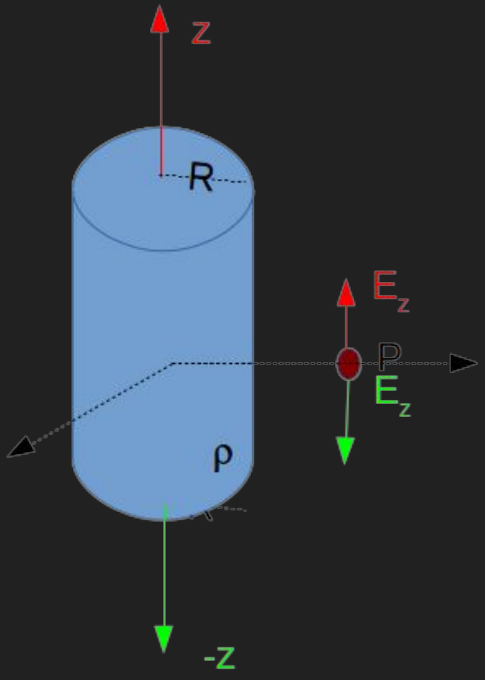
Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección z. Imaginemos el punto P sobre el eje y, y supongamos E_z no nulo en ese punto.



Operación de simetría

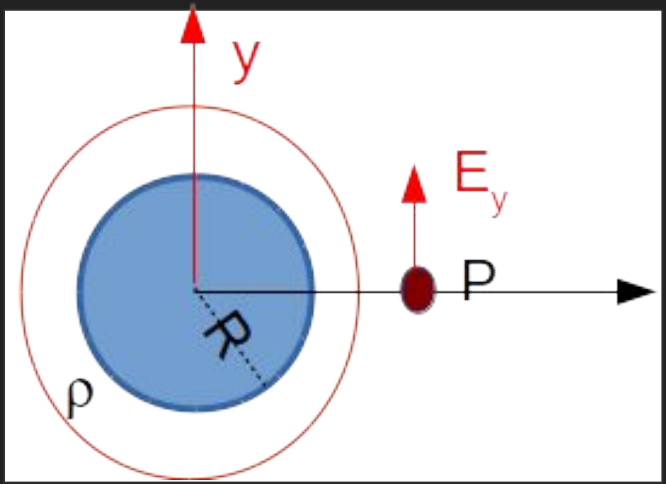
$z \longrightarrow -z$



La única solución coherente es que E_z sea nula.

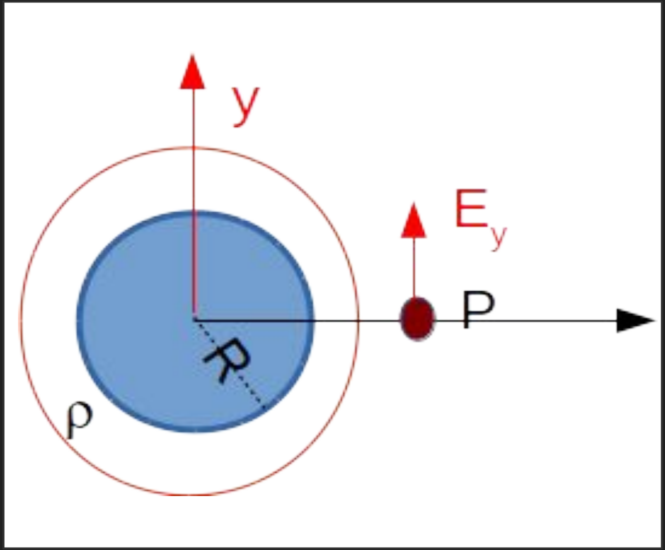
Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos E_φ no nulo en ese punto.



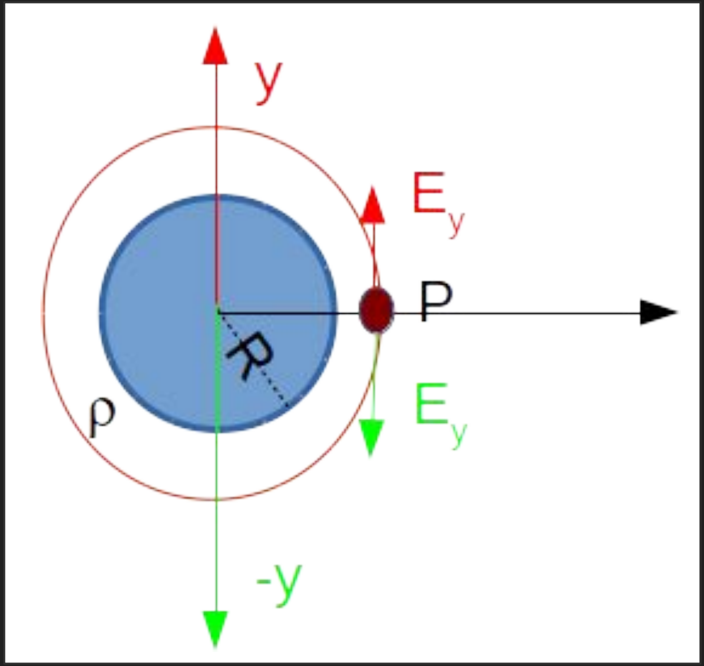
Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos E_φ no nulo en ese punto.



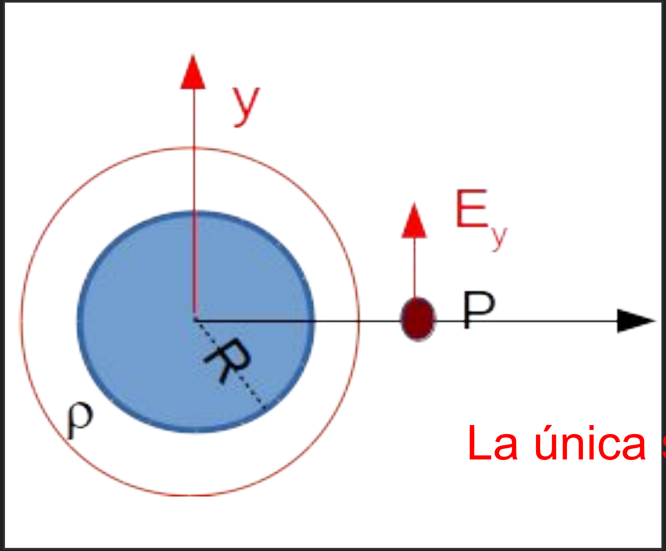
Operación de simetría

$y \longrightarrow -y$



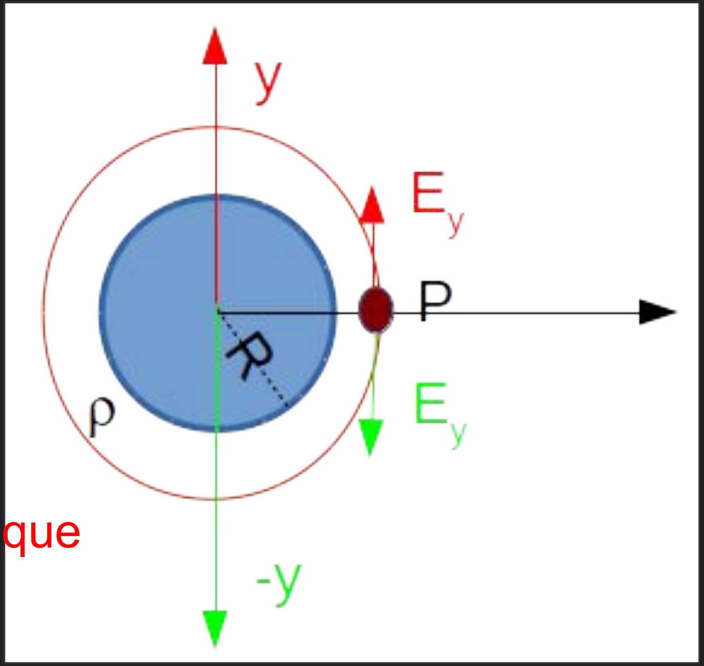
Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos E_φ no nulo en ese punto.



Operación de simetría

$y \rightarrow -y$



La única solución coherente es que E_φ sea nula.

Simetría Componentes

Del análisis de las componentes podemos decir que el campo sólo tendrá componente radial. Ahora analizaremos las dependencias…

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\phi,z)\hat{r} + \cancel{E_\phi(r,\phi,z)\hat{\phi}} + \cancel{E_z(r,\phi,z)\hat{z}}$$

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\phi,z)\hat{r}$$

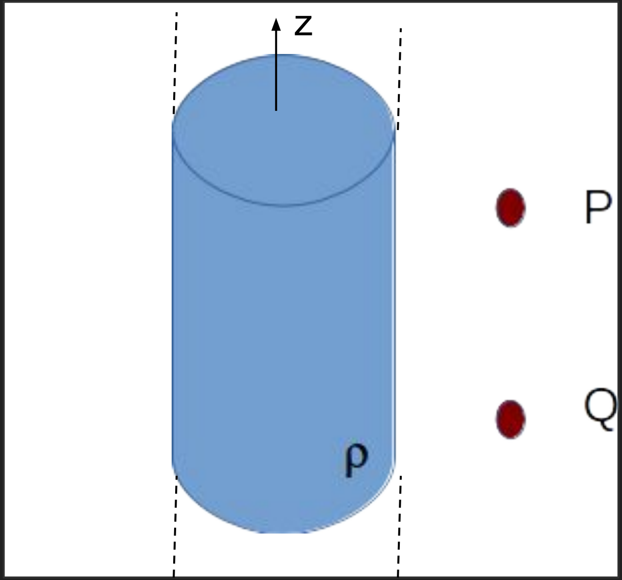
Dependencia de variables

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas…

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r}$$

Analizamos la dependencia con la variable z.

Dado que el cilindro es infinito en la dirección z, la distribución tiene simetría de traslación en esa coordenada. Por lo tanto, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente.



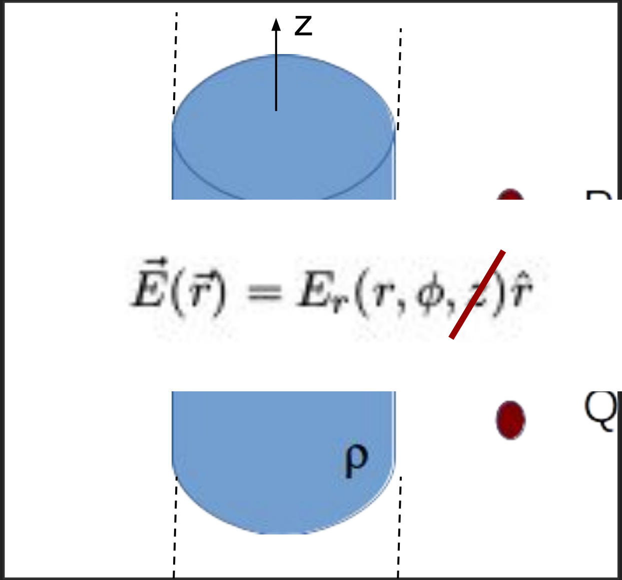
Dependencia de variables

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas…

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r}$$

Analizamos la dependencia con la variable z.

Dado que el cilindro es infinito en la dirección z, la distribución tiene simetría de traslación en esa coordenada. Por lo tanto, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente.

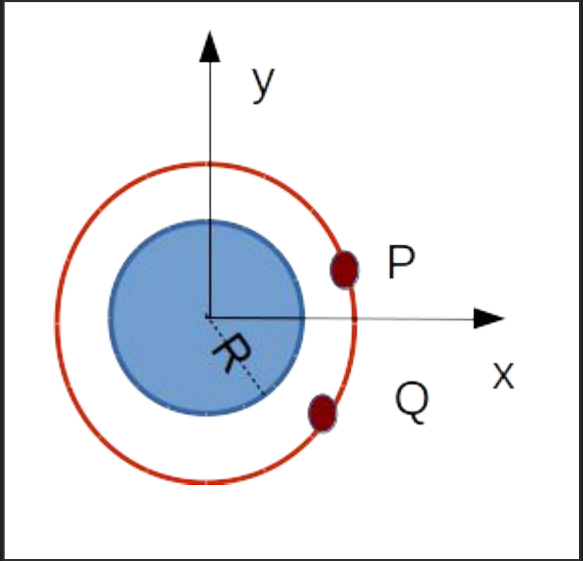


$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, \cancel{z})\hat{r}$$

Dependencia de variables

Analizamos la dependencia con la variable angular.

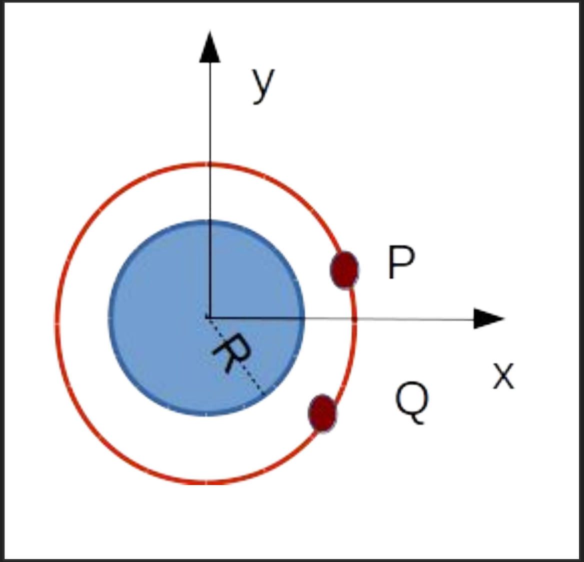
Dado que la distribución de cargas se distribuye uniformemente, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente. Por lo tanto, el campo no debe depender de la componente angular.



Dependencia de variables

Analizamos la dependencia con la variable angular.

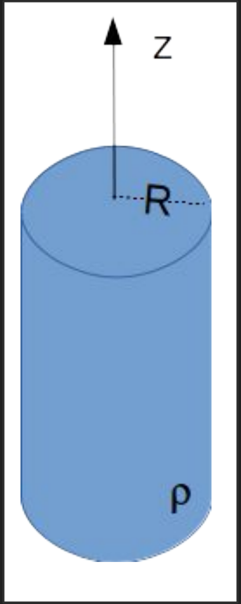
Dado que la distribución de cargas se distribuye uniformemente, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente. Por lo tanto, el campo no debe depender de la componente angular.



$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\cancel{\phi},\cancel{z})\hat{r}$$

Por el análisis de simetría llegamos a que...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$



Por lo tanto, debemos elegir una superficie de Gauss de

de radio constante y cuya normal sea en la dirección radial.

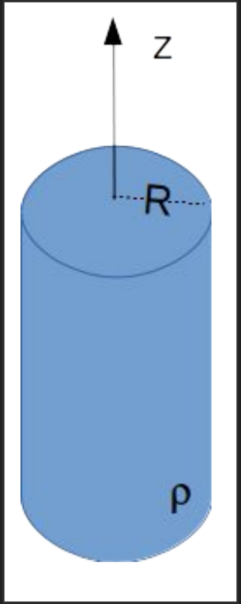
Las caras laterales de un cilindro cumplen con estas condiciones. Recordemos que la superficie de Gauss debe ser cerrada. Consideraremos entonces como superficie de Gauss un cilindro finito de radio *r* genérico con tapas.

Dada la distribución:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ \rho_0 & \text{si } R \leq r \end{cases}$$

el campo eléctrico refleja esta simetría y deberemos

calcular el campo adentro y fuera del cilindro.



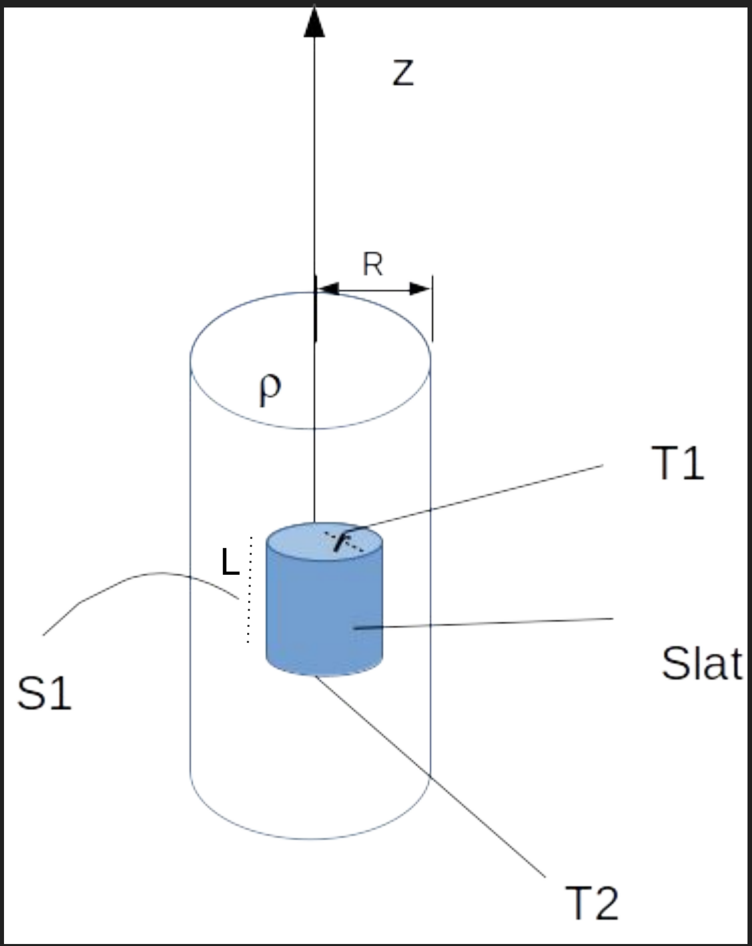
Usando la expresión

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Y sabiendo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Obtenemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada cilíndrica de radio r y alto L en el interior S_1 y en el exterior S_2.



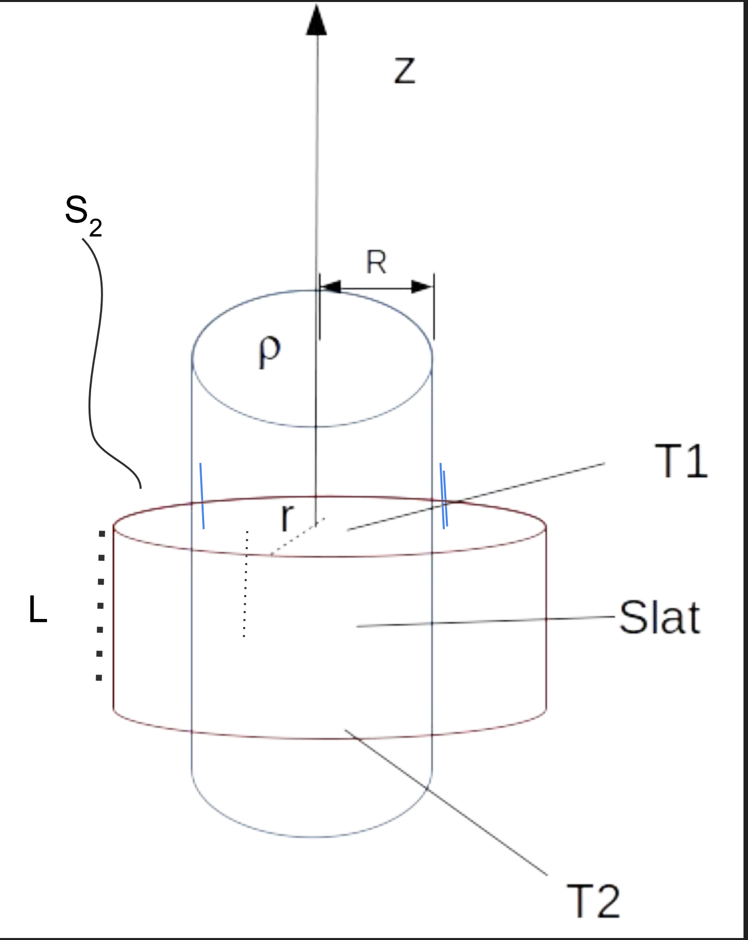
Usando la expresión

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\,\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

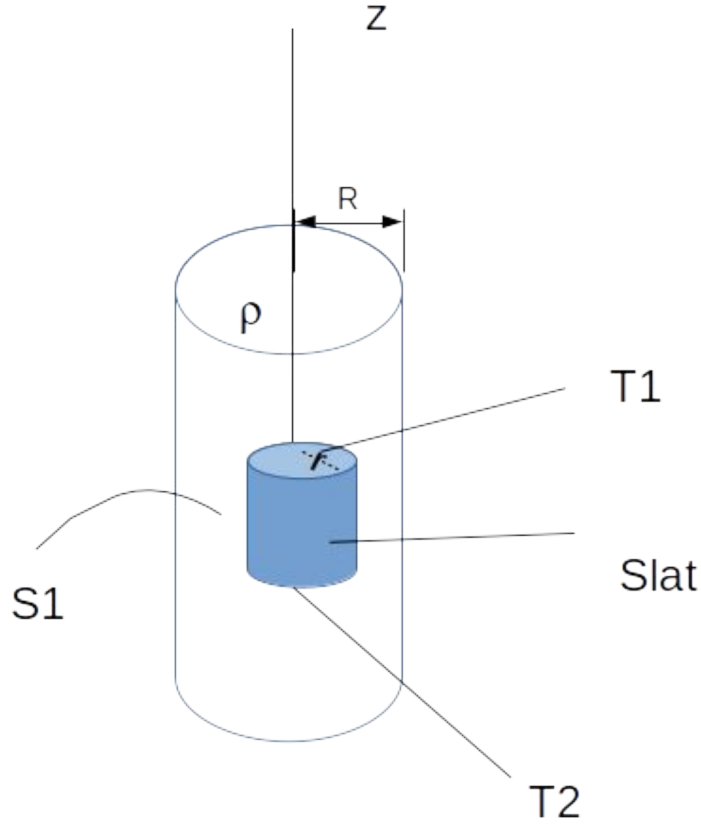
Y sabiendo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Obtenemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada cilíndrica de radio r y alto L en el interior S_1 y en el exterior S_2.

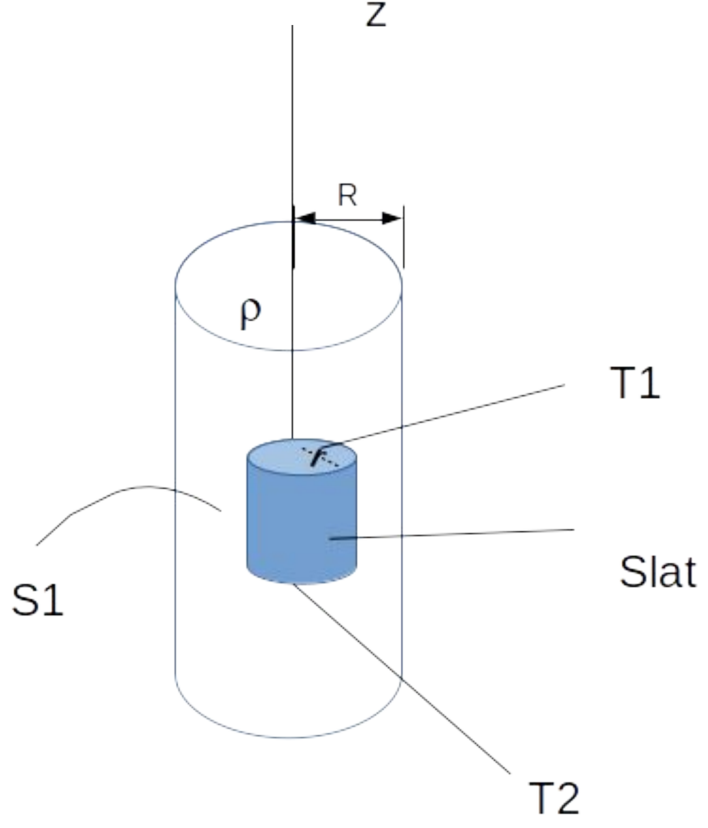


$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int\int_{T1} E(r)\hat{r}dS_1\hat{z} + \int\int_{T2} E(r)\hat{r}dS_1(\hat{-z}) + \int\int_{S_{lat}} E(r)\hat{r}dS_{lat}\hat{r}$$



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int\int_{T1} E(r)\hat{r}dS_1\hat{z} + \int\int_{T2} E(r)\hat{r}dS_1(-\hat{z}) + \int\int_{S_{lat}} E(r)\hat{r}dS_{lat}\hat{r}$$

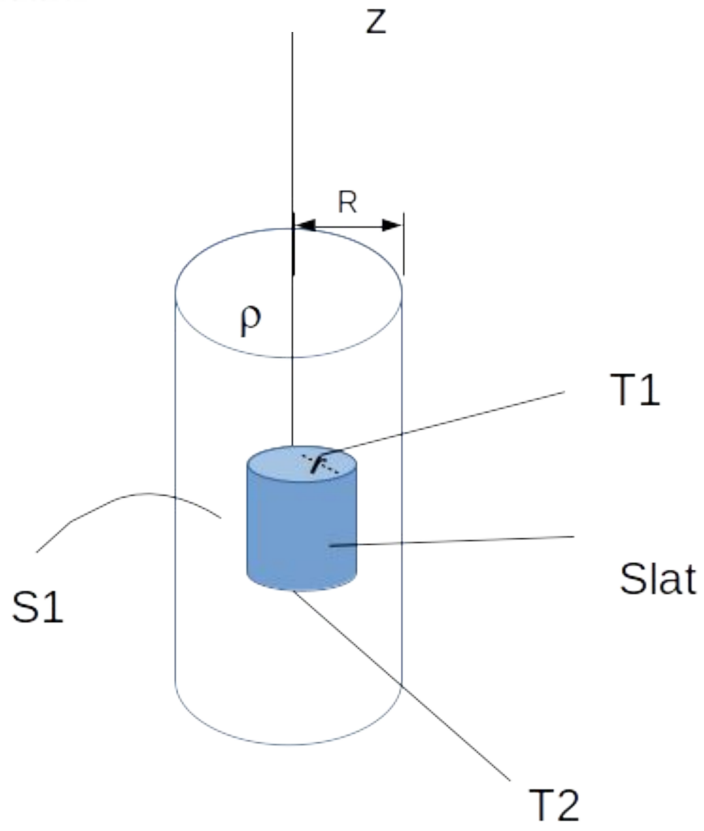
No hay flujo a través de las tapas

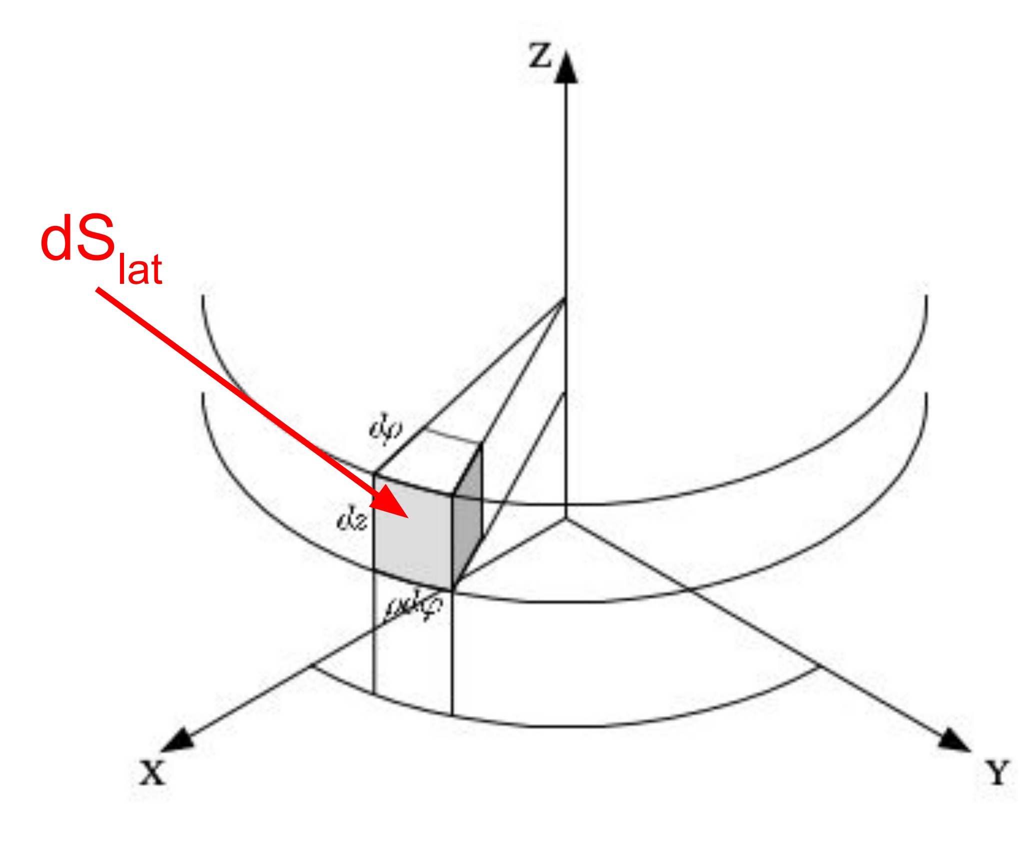


$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int\int_{T1} E(r)\hat{r}dS_1\hat{z} + \int\int_{T2} E(r)\hat{r}dS_1(\hat{-z}) + \int\int_{S_{lat}} E(r)\hat{r}dS_{lat}\hat{r}$$

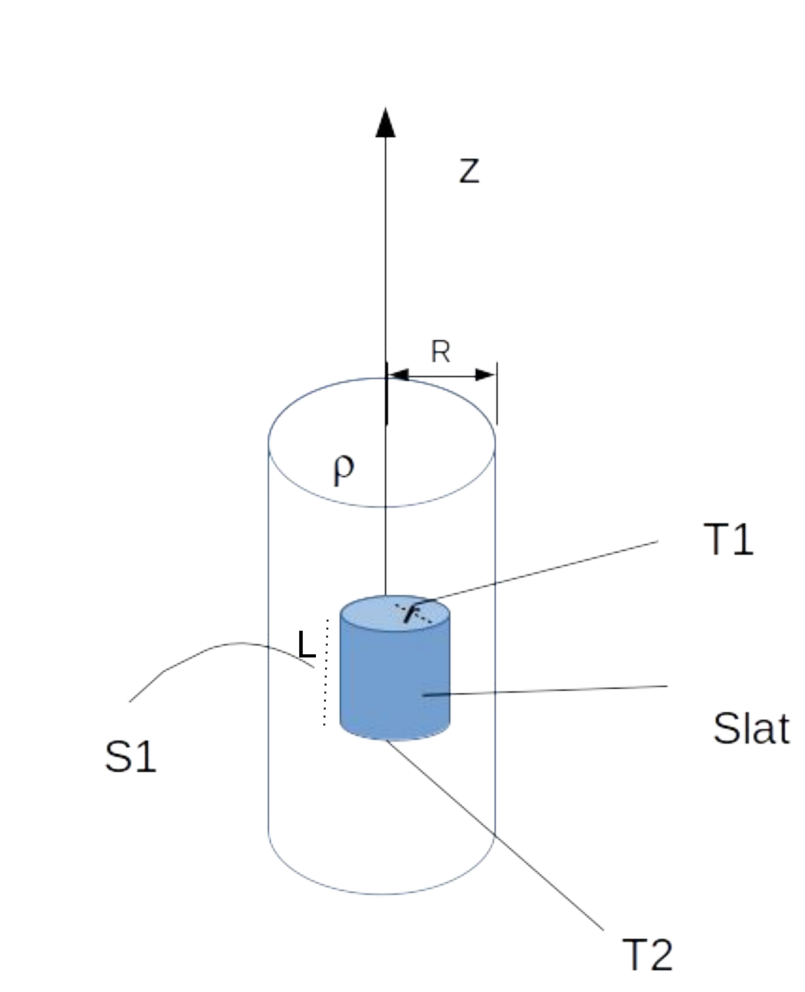
No hay flujo a través de las tapas

¿Cómo calculamos dS_{lat}?

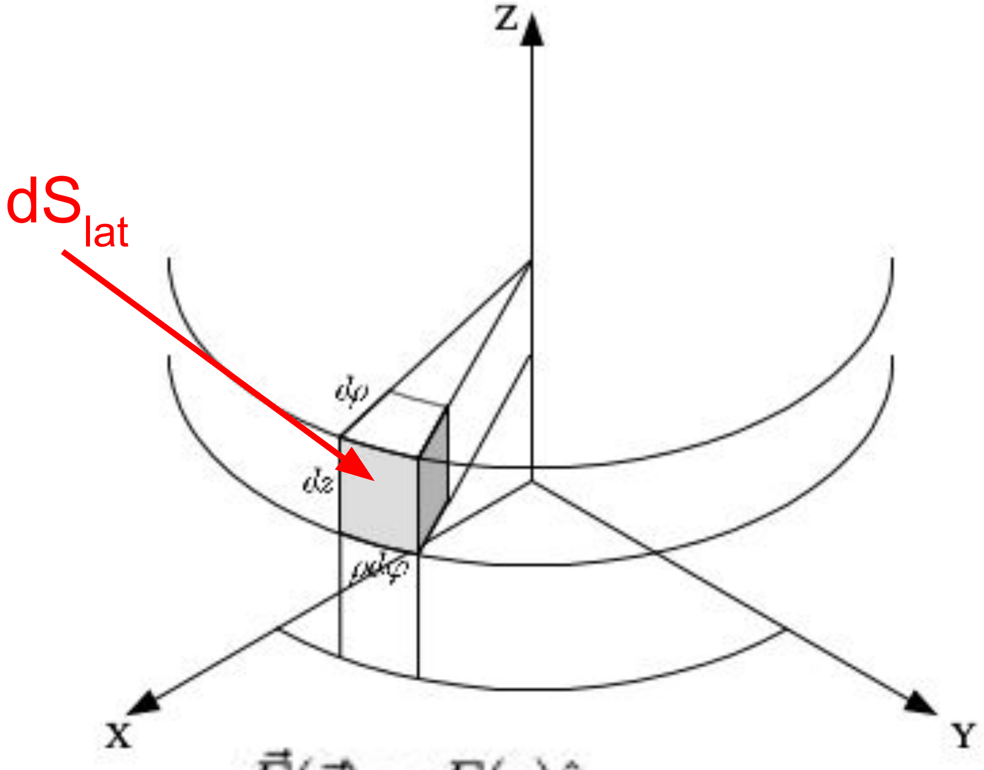




Z
dS lat
dφ
dz
ρdφ
X
Y

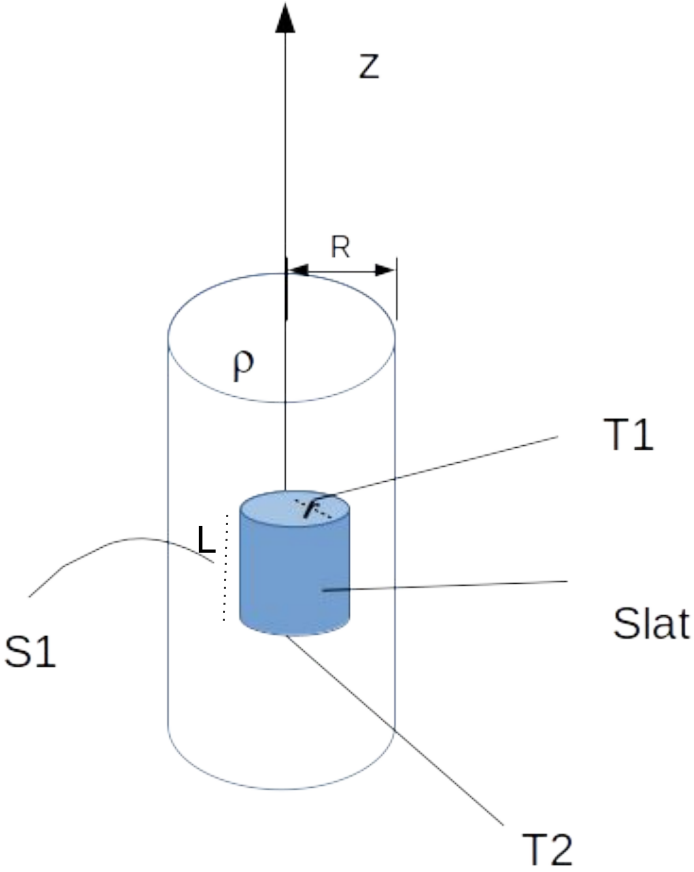


Z
R
ρ
T1
L
S1
Slat
T2

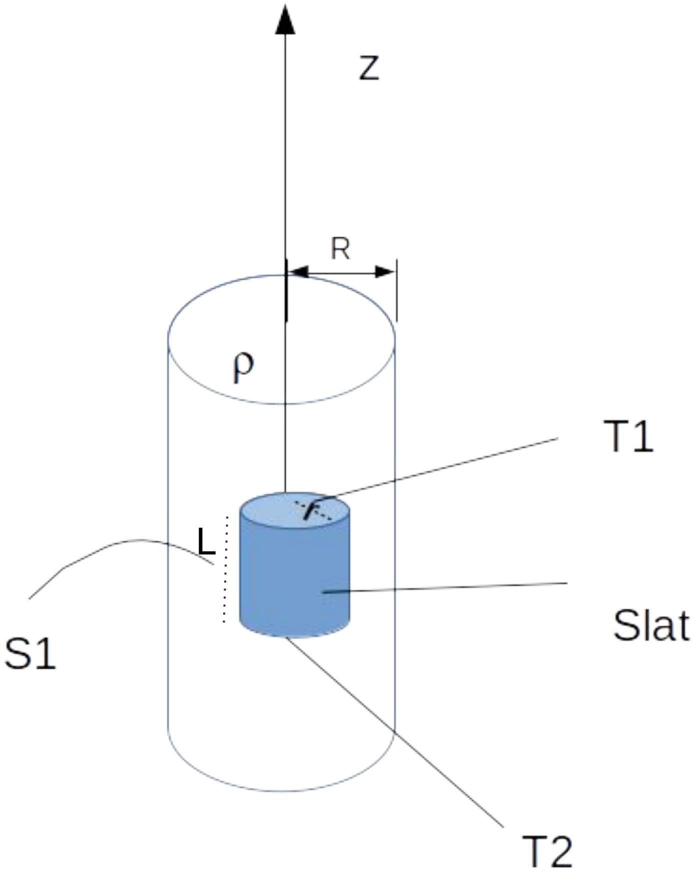


$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

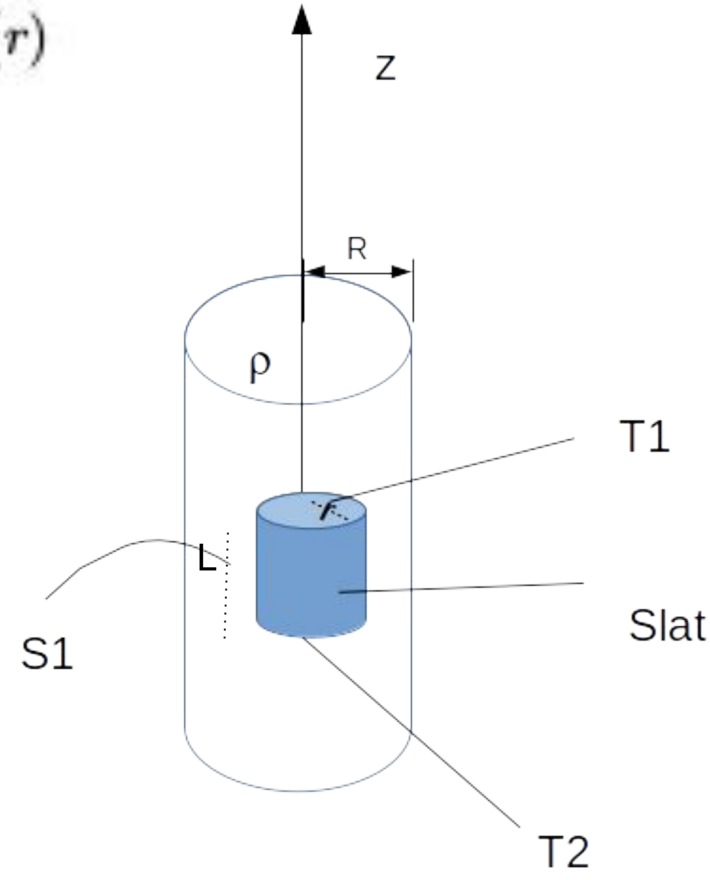
$$\vec{ds} = r d\phi\, dz \hat{r}$$



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^L E(r)\hat{r} r\, d\phi\, dz\, \hat{r}$$



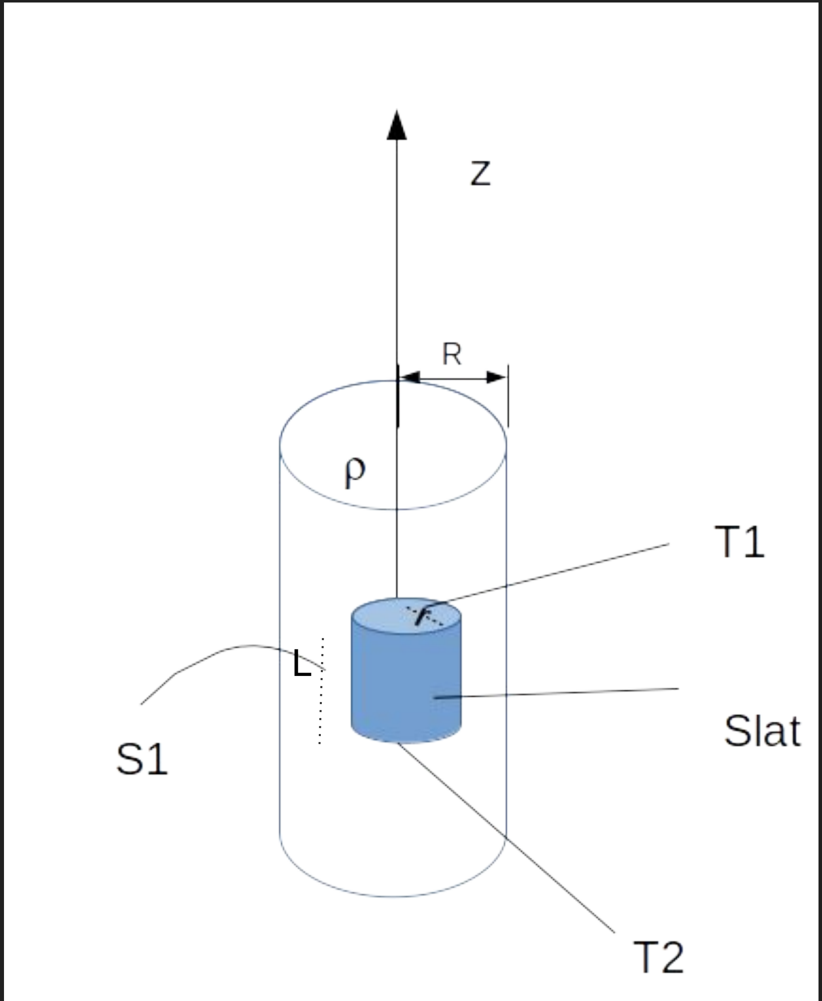
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} E(r)\hat{r} r\, d\phi\, dz\, \hat{r} = 2\pi r L E(r)$$



Por ahora sólo trabajamos con la simetría del campo sin detenernos si estábamos adentro o afuera del cilindro cagado.

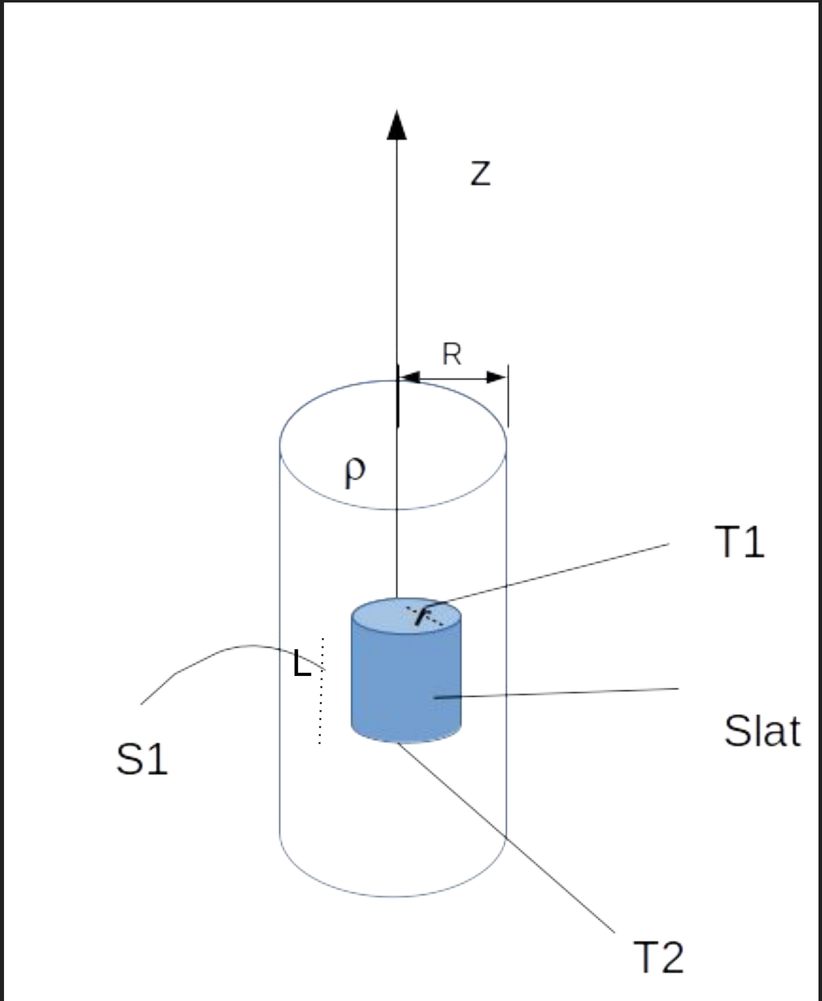
La diferencia entre ambas superficie de Gauss S1 y S2 no está en la simetría sino en la carga que encierran.

Veamos primero el cilindro interior



La diferencia entre ambas superficie de Gauss S1 y S2 no está en la simetría sino en la carga que encierran.

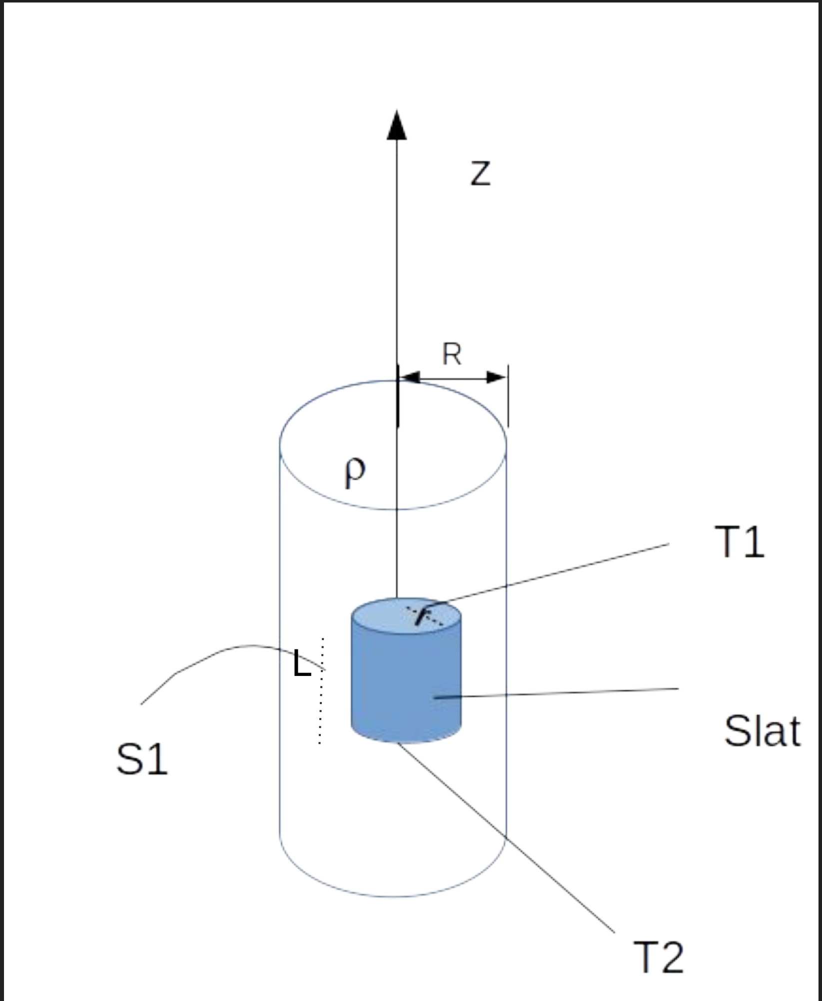
$$dQ_{enc}^{S1} = \rho r d\phi dz dr$$



La diferencia entre ambas superficie de Gauss S1 y S2 no está en la simetría sino en la carga que encierran.

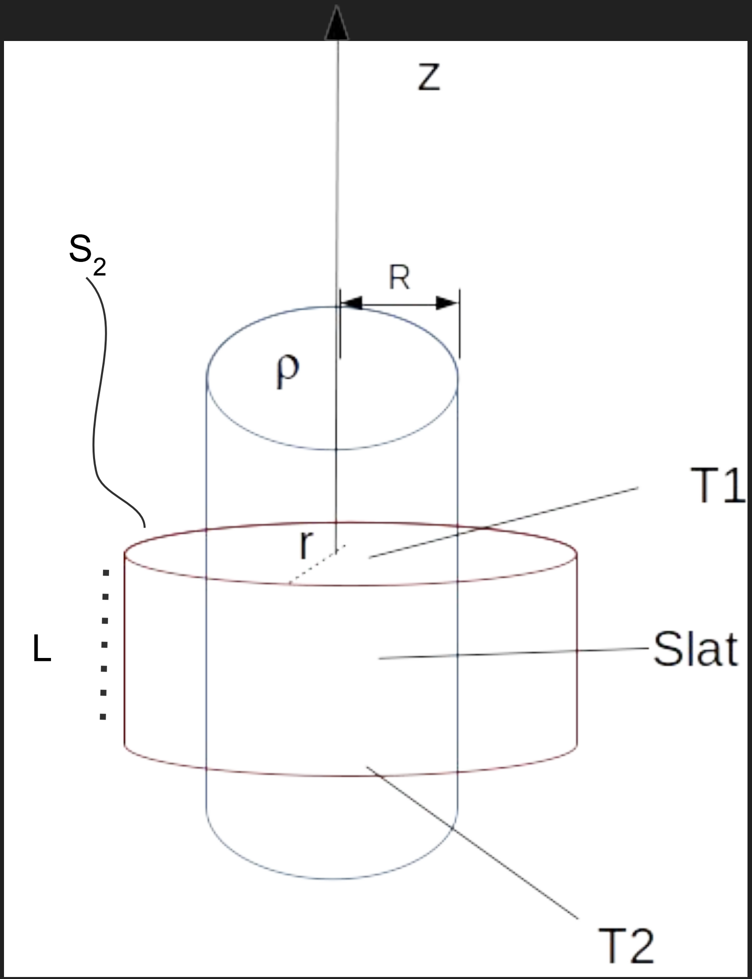
$$dQ_{enc}^{S1} = \rho r d\phi dz dr$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_0^{r} \rho r d\phi dr dz = \pi r^2 L \rho$$



Ahora el exterior

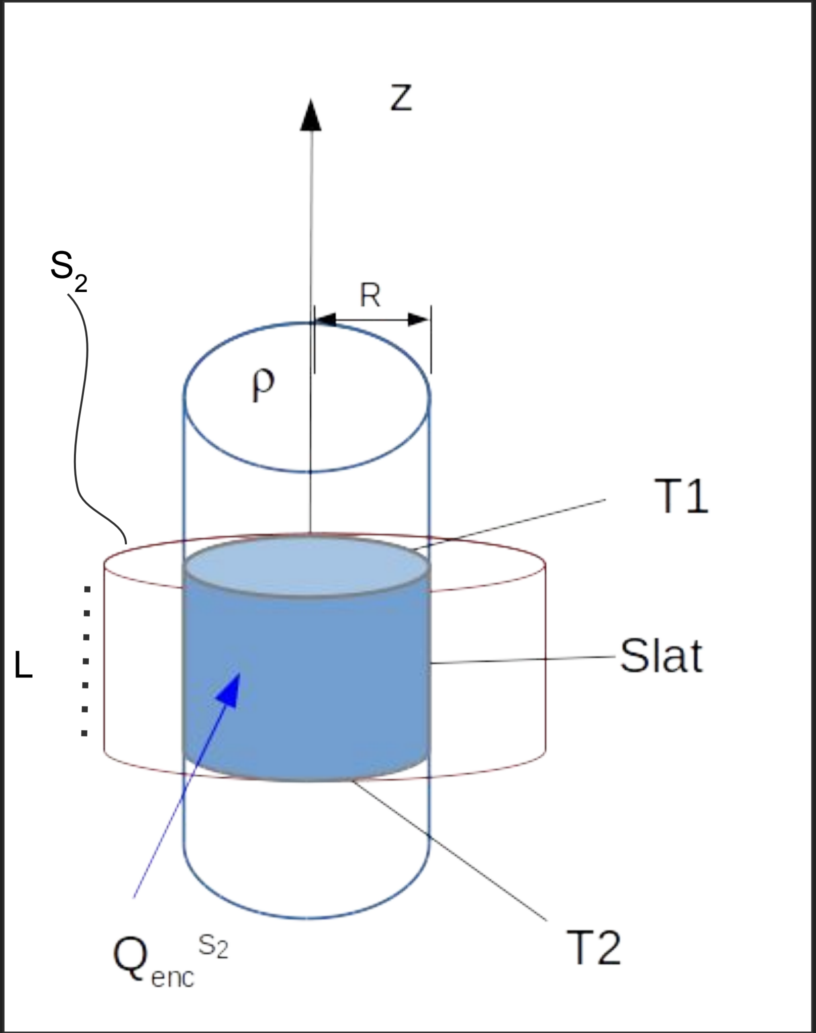
$$dQ_{enc}^{S2} = \rho r d\phi dz dr$$



Ahora el exterior

$$dQ_{enc}^{S2} = \rho r d\phi dz dr$$

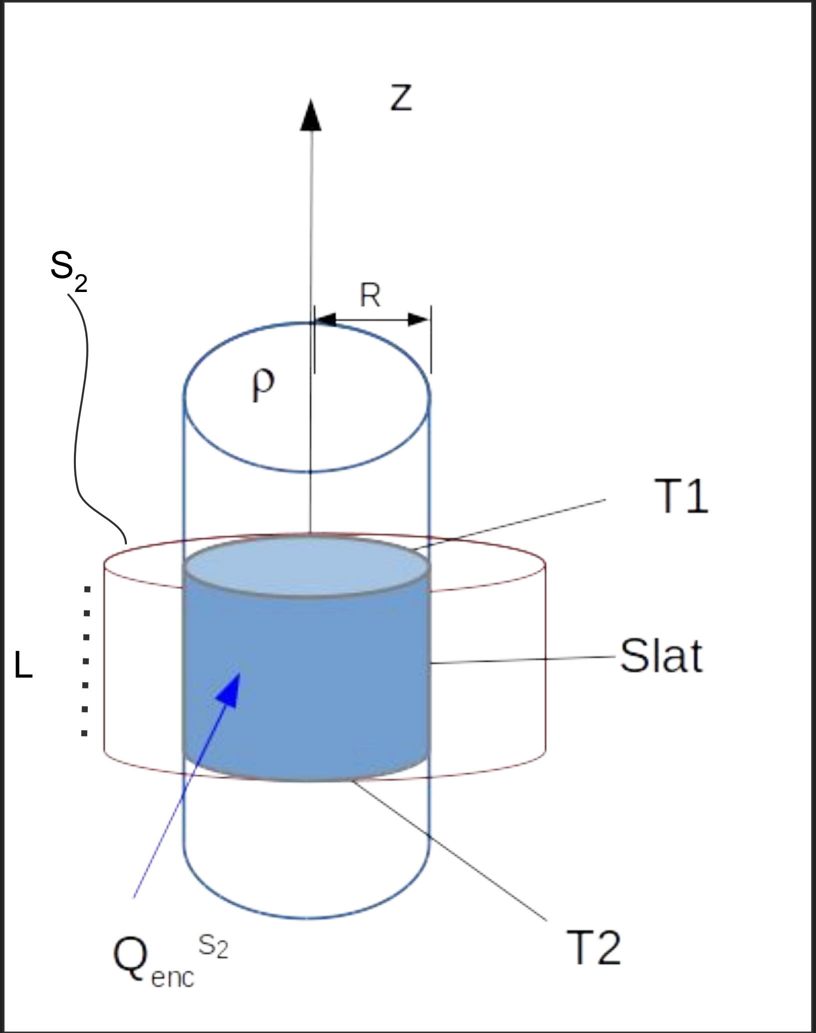
$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{L} \int_0^{R} \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$



Ahora el exterior

$$dQ_{enc}^{S2} = \rho r d\phi dz dr$$

$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$



Recopilando…

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^L E(r)\hat{r}rd\phi dz\hat{r} = 2\pi rLE(r)$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi}\int_0^L\int_0^r \rho rd\phi drdz = \pi r^2 L\rho$$

$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi}\int_0^L\int_0^R \rho rd\phi drdz = \pi R^2 L\rho$$

Recopilando…

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} E(r)\hat{r}rd\phi dz\hat{r} = 2\pi rLE(r)$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_0^{r} \rho rd\phi drdz = \pi r^2 L\rho$$

$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_0^{R} \rho rd\phi drdz = \pi R^2 L\rho$$

+ Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)2\pi rL = \begin{cases} \dfrac{\pi r^2 L\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\pi R^2 L\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

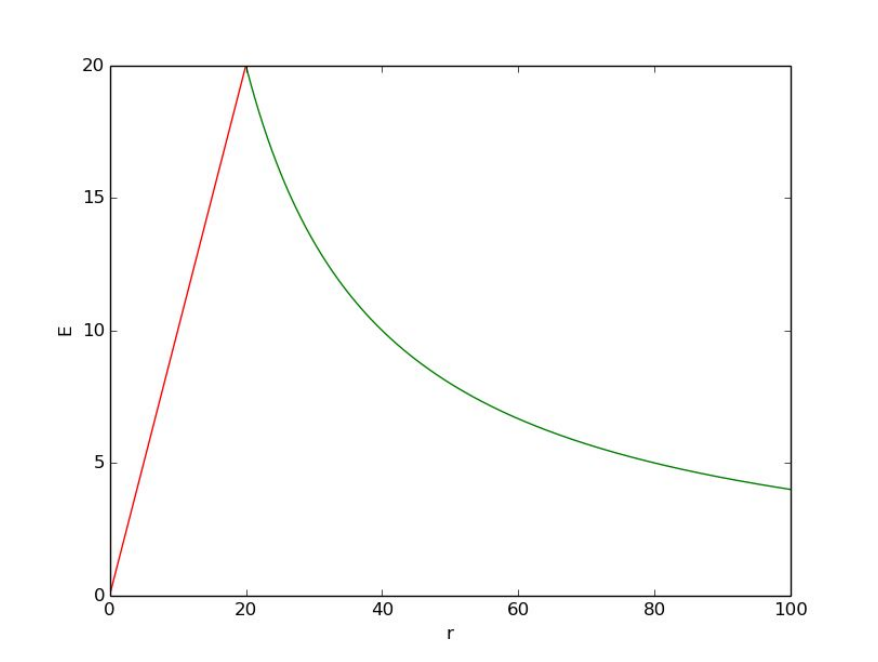
$$E(r)2\pi r L = \begin{cases} \dfrac{\pi r^2 L\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\pi R^2 L\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

Finalmente….

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < R \\ \dfrac{R^2\rho}{2r\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } R < r \end{cases}$$

Finalmente….

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < R \\ \frac{R^2\rho}{2r\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } R < r \end{cases}$$



Pasos que aplicamos en la resolución del problema 1.8

1. Elegir sistema de coordenadas
2. Analizar simetrías
3. Elegir superficie de Gauss
4. Calcular E con Ley de Gauss