DIPOLOS Y POTENCIAL EN DESARROLLO MULTIPOLAR

Es una manera de desarrollar el potencial electrostático que siente una carga que está 'muy lejos' de la distribución de cargas que hace de fuente de este potencial.

Si soy una carga y me alejo lo suficiente de una distribución, sea cual sea esta, la voy a ver como una carga puntual:

Entonces podría escribir el potencial como

$$V_{lejos} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{1}$$

donde r es la distancia a la que estoy de la distribución.

Pero...¿y si la carga total de la distribución es cero?

Lo que tengo que hacer para ser un poco más riguroso es tomar la expresión exacta del potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{v'} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}dv' \tag{2}$$

Y luego desarrollar el factor $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ en suma de potencias de $\frac{1}{|\vec{r}|}$. Esto lo puedo hacer ya que $|\vec{r}| >> |\vec{r'}|$ para todo r' de la distribución de cargas.

Haciendo la cuenta, el desarrollo queda

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{|\vec{r}^3|} + \frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r'})^2 - |\vec{r'}|^2|\vec{r}|^2}{2|\vec{r}|^5} + O\left(\frac{1}{|\vec{r}|^4}\right) \tag{3}$$

Metiendo la expresión de arriba adentro de la del potencial, y haciendo más cuentas, queda entonces

$$V_{lejos}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\int_{v'}\rho(\vec{r'})dv' + \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\int_{v'}\vec{r'}\rho(\vec{r'})dv' + ...\right) \tag{4}$$

Mirando bien, la integral del primer término es la carga total Q. Entonces cuando asumí carga puntual desde muy lejos, lo que hice fue quedarme solo con el término de primer orden del desarrollo.

El primer término es el **monopolar**

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}. \tag{5}$$

El siguiente es el **dipolar**. Luego el **cuadrupolar**, el **octupolar**, y así sucesivamente.

Si a Q le doy el nombre de **momento monopolar** o **monopolo**, puedo definir el **momento dipolar** o **dipolo** como

$$\vec{p} = \int_{v'}\vec{r'}\rho(\vec{r'})dv' \tag{6}$$

.

Y la contribución al potencial es

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{7}$$

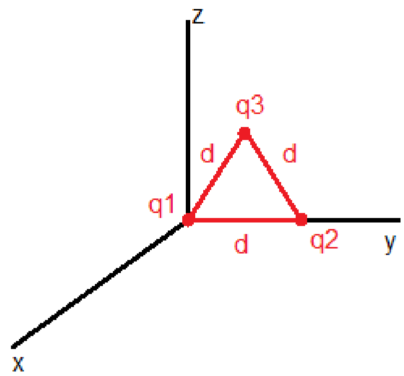
El monopolo Q es un escalar *(que es un tensor de orden 0)*. El dipolo $\vec{p}$ es un vector *(que es un tensor de orden 1)*. El cuadrupolo es un tensor de orden 2, y así sucesivamente.

El potencial queda entonces:

$$V_{lejos} = V_{mon} + V_{dip} + ... \tag{8}$$

EJERCICIO 14

Tengo 3 cargas q_1, q_2 y q_3 en los vértices de un triángulo equilátero. Las coloco como muestra la figura, con el origen de coordenadas en q_1



Voy a calcular el potencial generado por esta distribución muy lejos de ella, quedándome hasta orden dipolar. Empiezo con el término monopolar,

$$V_{mon} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2 + q_3}{r} \tag{9}$$

Para calcular el término dipolar, primero voy a calcular el momento dipolar $\vec{p}$. Como tenemos una distribución de cargas discreta, la integral de la expresión de $\vec{p}$ se convierte en una sumatoria,

$$\vec{p} = \sum_i \vec{r}'_i q_i. \tag{10}$$

Entonces,

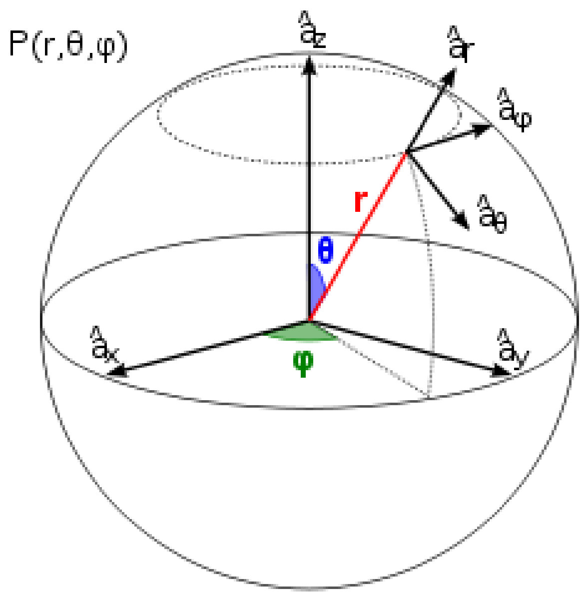
$$\vec{p} = \vec{r}_1 q_1 + \vec{r}_2 q_2 + \vec{r}_3 q_3 = 0.q_1 + d\hat{y}.q_2 + \left(\frac{d}{2}\hat{y} + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}\hat{z}\right).q_3 \tag{11}$$

$$\vec{p} = (d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)\hat{y} + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3\hat{z} \tag{12}$$

Ahora tengo que meter a $\vec{p}$ en la contribución dipolar del potencial.

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{13}$$

Cuando estoy muy lejos, me conviene usar coordenadas esféricas. **¿Por qué?**



Reescribo entonces a los versores $\hat{y}$, $\hat{z}$ en esféricas.

$\hat{y} = sin\theta sin\phi\hat{r} + cos\theta sin\phi\hat{\theta} + cos\phi\hat{\phi}$

$\hat{z} = cos\theta\hat{r} - cos\theta\hat{\phi}$

Cuando haga el producto escalar de la expresión (13), solo sobreviven las componentes $\hat{r}$. Queda entonces:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[(d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)sin\theta sin\phi + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3 cos\theta\right]\hat{r}\cdot\hat{r}\frac{1}{r^2} \tag{14}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[(d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)sin\theta sin\phi + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3 cos\theta\right]\frac{1}{r^2} \tag{15}$$

Tiene sentido que me haya quedado una dependencia en ϕ, porque no es lo mismo mirar el triángulo de frente que de costado.

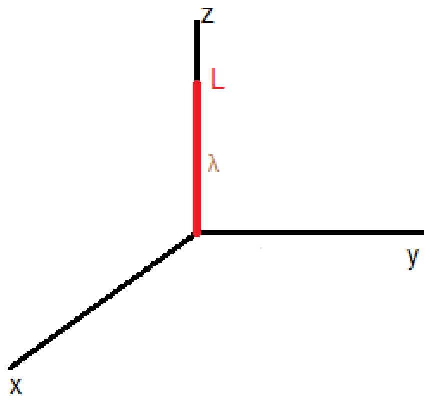
El ejercicio me pide que haga un cambio en los valores de las cargas. En el segundo caso, la carga total es cero, y solo sobrevive el término dipolar.

Algo interesante de ver es qué pasa si elijo otro origen de coordenadas. El momento dipolar cambia, solo si la carga total es distinta de cero. Queda para ustedes mostrarlo en este ejercicio.

Segunda parte: distribuciones continuas.

El ejercicio me pide calcular los potenciales vistos desde muy lejos para los problemas 5 y 6. Voy a hacer el 5 que es el hilo finito cargado.

Lo voy a ubicar en el eje z como muestra la figura



Empiezo por el término monopolar:

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{r}. \tag{16}$$

Ahora calculo el momento dipolar $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \int_{v'} \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv' = \int_0^L z'\hat{z}\lambda z'dz' = \frac{\lambda L^3}{3}\hat{z} \tag{17}$$

.

Como hice en el caso anterior, antes de calcular la contribución dipolar al potencial, paso a coordenadas esféricas:

$\hat{z} = cos\theta\hat{r} - cos\theta\hat{\phi}$. Entonces,

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L^3}{3}cos\theta\hat{r}\cdot\hat{r}\frac{1}{r^2} \tag{18}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L^3}{3}cos\theta\frac{1}{r^2} \tag{19}$$

Esta vez, la dependencia en ϕ no aparece. El hilo se ve igual desde cualquier ϕ. Esto se llama simetría de revolución.

Si ponía el hilo en el eje x o en el y, me iba a aparecer la dependencia en ϕ. Recordemos que $\vec{p}$ cambia según como coloquemos la distribución respecto al origen si la carga total es distinta de cero, como en este caso.

¿Esto quiere decir que el eje z es una dirección privilegiada? La respuesta es sí, en coordenadas esféricas siguiendo la convención utilizada siempre, donde ϕ es coplanar a los planos $z = cte$.

EJERCICIO 15

Lo importante al dibujar las líneas de campo son dos cosas:

1) Dibujo las líneas de cada disco por separado, estas son salientes en el positivo y entrantes en el negativo. La forma es de 'pétalos de flor' de cada lado del disco.

2) Esto es lo más importante: Las líneas **deben ser cerradas**. **Toda línea que salga del disco positivo debe entrar al disco negativo.** Esto es porque la carga total de la configuración es **cero**. Si tomo cualquier superficie cerrada de Gauss alrededor de la configuración, al ser la carga encerrada cero, el flujo sobre la superficie debe ser cero. Para eso, toda línea saliente de la superficie debe volver a entrar, para compensar el flujo. La única manera de lograr esto es que todas las líneas sean cerradas.

Para calcular el campo y el potencial en el eje central, tomo el resultado del ejercicio de la corona, haciendo tender el radio interno a cero. Luego, aplico el principio de superposición para insertar el campo generado por el segundo disco, el cual es idéntico, pero colocado a una distancia d y con carga opuesta. Para calcular el potencial, integro.