# Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 2

Facundo Pugliese

# Campos que no son lo que parecen

Tenemos ya un par de ejemplos de campos eléctricos “repetidos”, sistemas que a pesar de tener distintas densidades de carga, generan en determinadas regiones el mismo campo. Por ejemplo, para una esfera con densidad de carga

$$\bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} \dfrac{kQr}{R^3}\hat{r} & si\ r \leq R \\ \boxed{\dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}} & si\ r \geq R \end{cases}$$

**Esfera maciza**

$$\bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & si\ r < R \\ \boxed{\dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}} & si\ r > R \end{cases}$$

**Esfera cargada en superficie**

$$\bar{E}(\bar{r}) = \boxed{\dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}}$$

**Carga puntual**

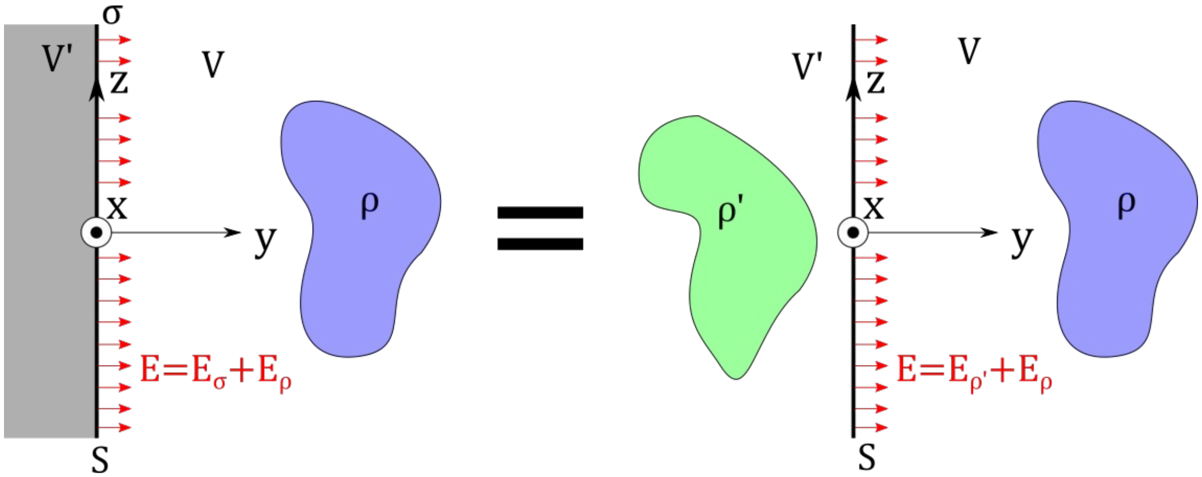
De hecho, cualquier distribución de carga con simetría esférica de radio $R$ cumple que para $r>R$ genera un campo idéntico al de una carga puntual.

**En general, dado un campo eléctrico E en una región V, existen múltiples densidades ρ en la región V’ complementaria capaces de generarlo.**

# Método de imágenes: Idea general

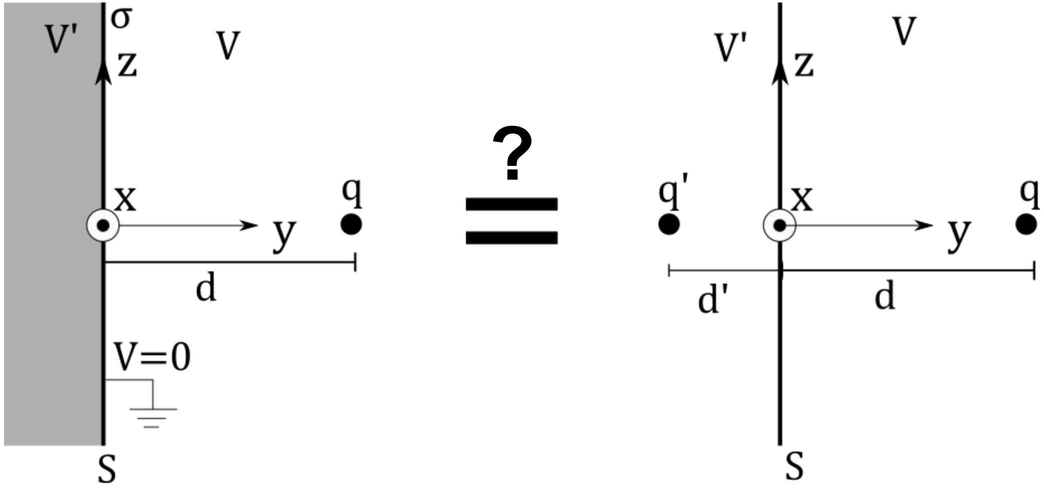
Si tenemos una densidad $\rho$ en una región $V$ con una superficie conductora $S$, sabemos que se inducirá un $\sigma$ sobre ella y la volverá un equipotencial: el campo sobre $S$ será ortogonal a la superficie.
Aprovechando la idea anterior, **puedo "inventarme" una densidad $\rho'$ en $V'$ cuyo campo me permita cumplir que un $S$ *sea equipotencial*.**

Por ejemplo, para un plano conductor infinito frente a una distribución $\rho$, mi región $V$ sería $y>0$ y $V'$ sería $y<0$. **Busco una $\rho'$ que me asegure que $E_x|_S = E_z|_S = 0$.**



# Empecemos despacio: Ejercicio 6

Comencemos con una carga puntual q a distancia d del plano conductor **a tierra**, pruebo con una carga q' a distancia d' sobre la misma línea para *no romper la simetría* (rotación sobre y). Quiero ver si existen q' y d' tal que




$$\phi(\bar{r}) = \frac{kq'}{|\bar{r} - (-d')\hat{y}|} + \frac{kq}{|\bar{r} - d\hat{y}|} \quad , \quad \phi(x,0,z) = 0$$

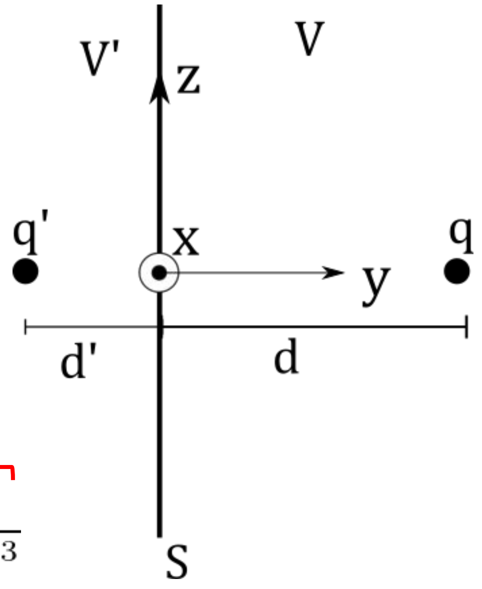
$$\frac{kq'}{|x\hat{x} + z\hat{z} + d'\hat{y}|} = -\frac{kq}{|x\hat{x} + z\hat{z} - d\hat{y}|} \Longrightarrow \mathrm{sg}(q') = -\mathrm{sg}(q)$$

# Ejercicio 6

Con esto podemos escribir la igualdad cómo

$$\frac{|q'|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d'^2}} = \frac{|q|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d^2}}$$

Que tiene una solución trivial $q' = -q$ y $d' = d$.




¿Existen otras? Seguramente, **pero con una me basta**.

La (única) solución resulta entonces

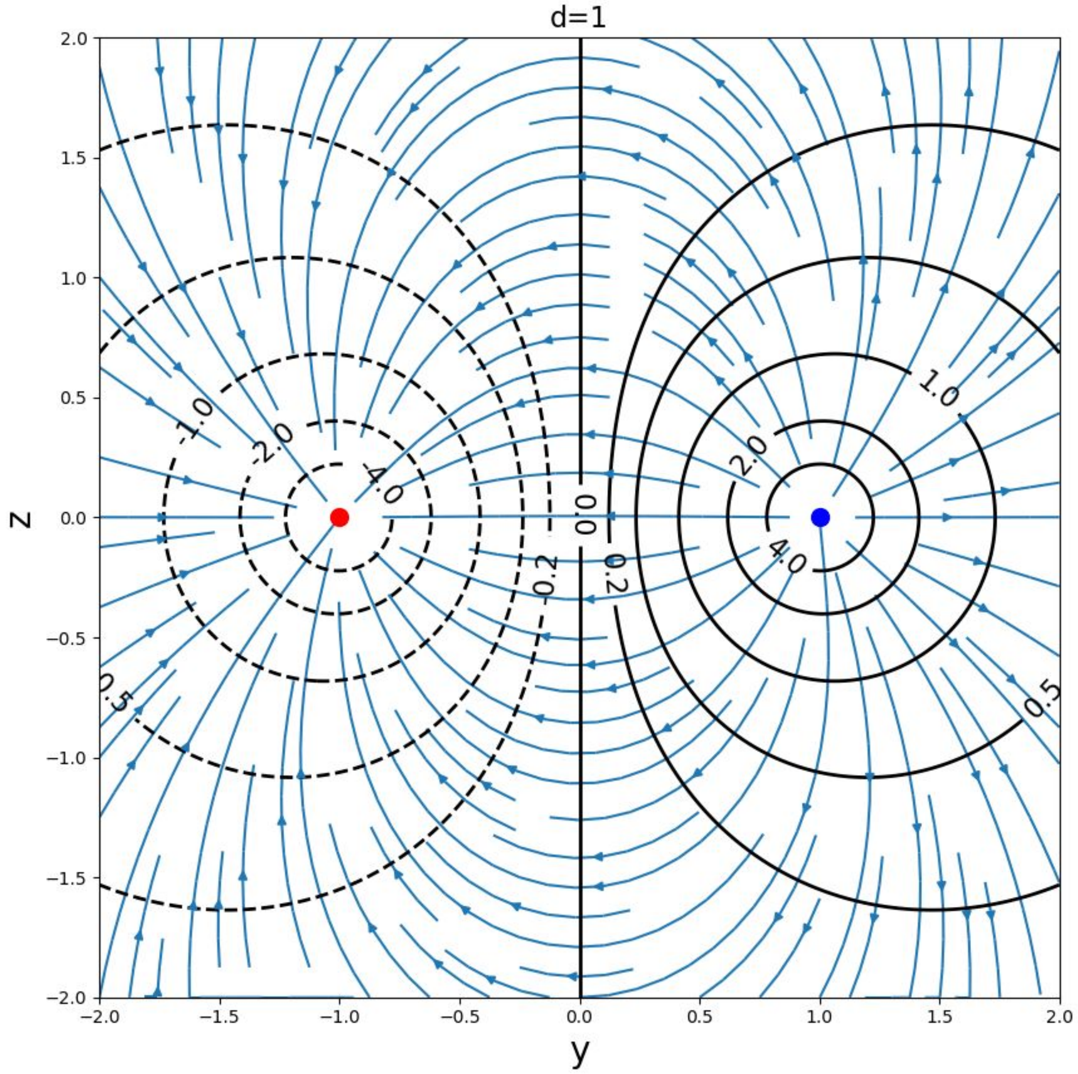
$$\phi(\bar{r}) = \frac{kq}{|\bar{r} - d\hat{y}|} - \frac{kq}{|\bar{r} + d\hat{y}|} \qquad \bar{E}(\bar{r}) = \overbrace{kq\frac{\bar{r} - d\hat{y}}{|\bar{r} - d\hat{y}|^3}}^{E_q} - \overbrace{kq\frac{\bar{r} + d\hat{y}}{|\bar{r} + d\hat{y}|^3}}^{E_\sigma}$$

Sobre la superficie $y=0$, el campo efectivamente es ortogonal al plano

$$\bar{E}(x, 0, z) = kq\left[\frac{x\hat{x} + z\hat{x} - d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{x} + z\hat{z} + d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}\right] = -\frac{2kqd\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

Equipotenciales en **negro**

Líneas de campo en **azul**



# Ejercicio 6: Distribución de carga

El campo sobre la superficie S ($y=0$) es proporcional a la densidad superficial inducida sobre el conductor. Usando $E|_S=\sigma/\varepsilon_o$

$$\boxed{\sigma(x,z)=\varepsilon_o E_y(x,0,z)=-\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{(x^2+z^2+d^2)^{3/2}}}$$

Reconocemos el radio en polares $r^2=x^2+z^2$ sobre el plano $x$-$z$, por lo que $\sigma$ tiene simetría de rotación alrededor de $y$: $\sigma(x,z)=\sigma(r)$

Podemos calcular la carga total inducida sobre el plano integrando σ en $S$:

$$Q_S=\int_S \sigma(r)dS=-\frac{qd}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=-qd\int_0^\infty\frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$$

$$=-qd\frac{(-1)}{\sqrt{r^2+d^2}}\bigg|_0^\infty=-q$$

# Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x,z) = -\frac{q}{2\pi}\frac{d}{(x^2+z^2+d^2)^{3/2}}$$

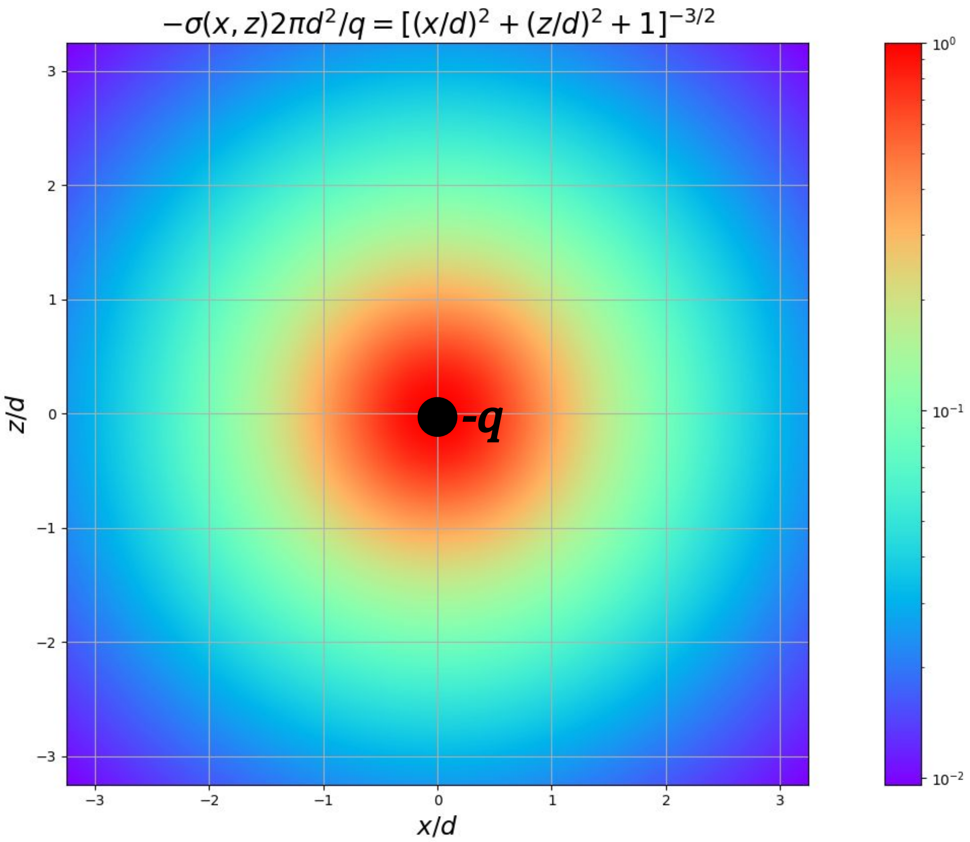
Si me paro frente al plano (en $y>0$), veo un campo idéntico al de una carga $-q$ en $(0, -d, 0)$.

**¿Que veo si me paro en un $y<0$?**

¡Un campo idéntico al generado por una carga $-q$ en $(0, +d, 0)$!

**¿Cómo será entonces el campo eléctrico en $y<0$?**

Nulo, pues veo una carga $q$ y otra $-q$ en $(0, +d, 0)$; una carga total **nula**.



# Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x,z) = -\frac{q}{2\pi}\frac{d}{(x^2+z^2+d^2)^{3/2}}$$

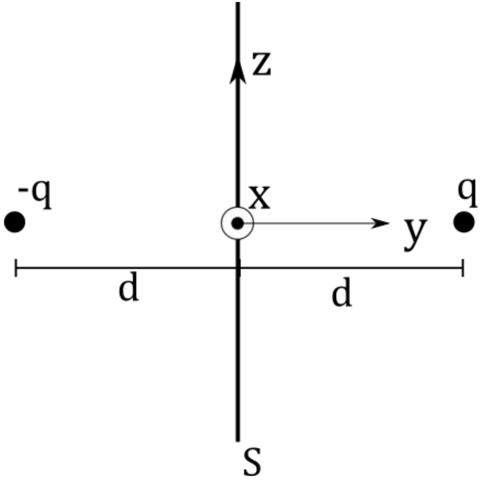
Si me paro frente al plano (en $y>0$), veo un campo idéntico al de una carga $-q$ en $(0, -d, 0)$.

**¿Que veo si me paro en un y<0?**

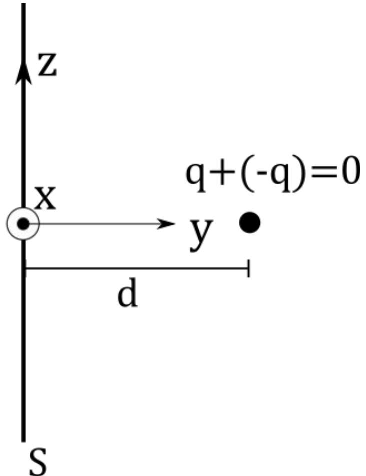
¡Un campo idéntico al generado por una carga $-q$ en $(0, +d, 0)$!

**¿Cómo será entonces el campo eléctrico en y<0?**

Nulo, pues veo una carga $q$ y otra $-q$ en $(0, +d, 0)$; una carga total **nula**.




***Si miro desde la derecha (y > 0)***

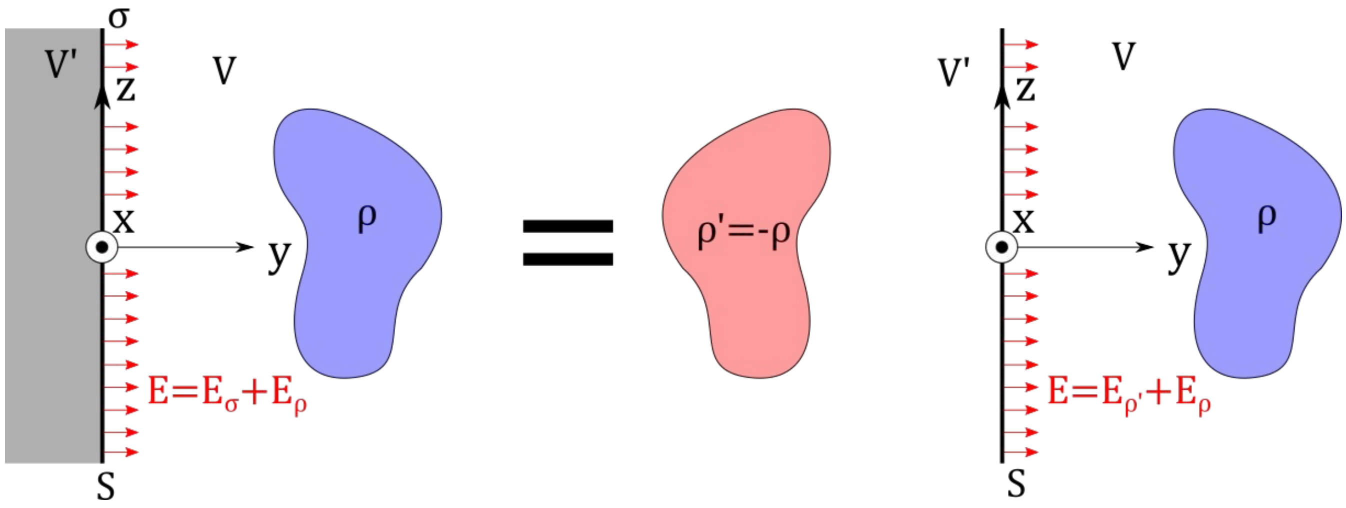



***Si miro desde la izquierda (y < 0)***

***E=0***

# Ejercicio 6: Generalicemos un poco

Generalizando, vemos que para una $q$ en $(x', y', z')$, el método de imágenes nos arroja una segunda carga $-q$ en $(x', -y', z')$. Por lo tanto, para una $\rho(x', y', z')$ su imagen será una $\rho'(x', y', z')=-\rho(x', -y', z')$. Luego, si conozco el campo $E$ para una distribución $\rho(x', y', z')$, me basta calcular el campo $E'$ de $\rho'(x', y', z')=-\rho(x', -y', z')$.




¿Qué tan distinto puede ser $E'$ de $E$?

**Spoiler Alert**

$E'(x, y, z) = -E(x, -y, z)$

# Ejercicio 6: Energía de la configuración

Calculemos el trabajo necesario para traer la carga desde y'=∞ hasta y'=d.
Este será el trabajo que el campo $E_\sigma$ genera sobre la carga $q$.

$$\bar{E}_\sigma(\bar{r}) = -kq\frac{\bar{r}+y'\hat{y}}{|\bar{r}+y'\hat{y}|^3}$$

Pero $E_\sigma$ depende de y', así que hay que tener **cuidado**

Para $q$ en $(0, y', 0)$, siente una fuerza $\bar{F} = q\bar{E}_\sigma(0,y',0) = -kq^2\frac{y'\hat{y}+y'\hat{y}}{|y'\hat{y}+y'\hat{y}|^3} = -kq^2\frac{\mathrm{sg}(y')}{|2y'|^2}\hat{y}$

y dado que traigo la carga $q$ a lo largo del eje y (es más fácil): $\mathrm{d}\bar{l} = \mathrm{d}y'\hat{y}$

$$W = -\int_\infty^d \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{l} = \int_\infty^d \frac{kq^2}{4}\frac{1}{y'^2}\hat{y}\cdot\mathrm{d}y'\hat{y} = \frac{kq^2}{4}\frac{(-1)}{y'}\Big|_\infty^d = -\frac{kq^2}{4d} = \frac{1}{2}q\boxed{\frac{k(-q)}{2d}}$$

$\phi_{-q}(r=2d)$

**Es la energía de interacción entre 2 cargas *q* y *-q* a distancia *2d***