Física 3

Guía 2-Clase 5

Andrea Buccino

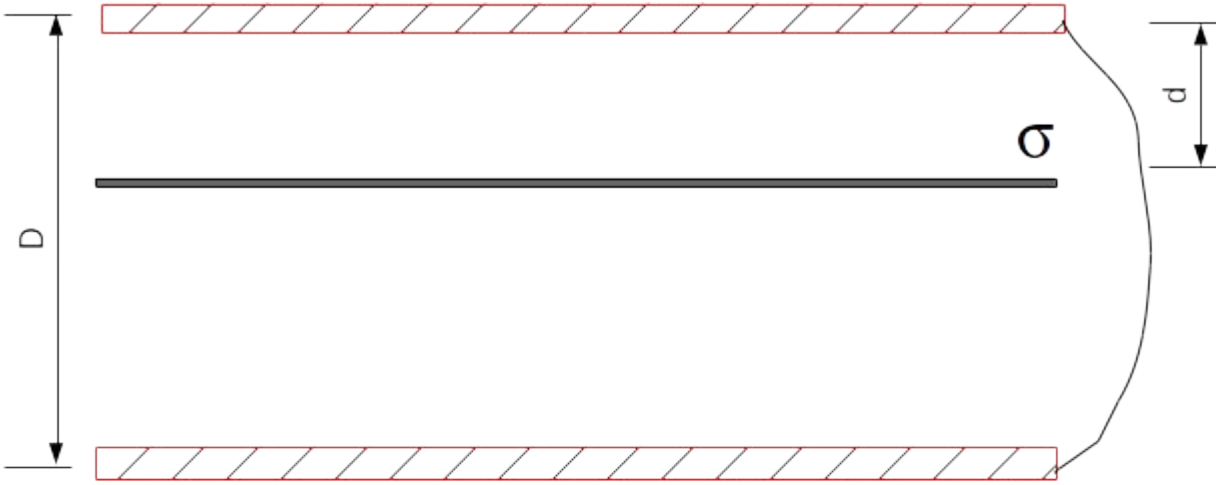
Resolución de algunos problemas...

En esta clase comentaremos algunos de los problemas de la Guía 2.

En particular elegimos los ejercicios 2.9, 2.11 y 2.13 donde se presentan diversas configuraciones de conductores.

Problema 2.9

9. Dos placas plano-paralelas metálicas muy extensas, separadas por una distancia D, están unidas por un cable. Entre ambas se coloca paralelamente una placa plana no conductora, cargada uniformemente con densidad σ, a una distancia d de la placa superior. Hallar el campo eléctrico despreciando efectos de borde.



Aunque el problema no lo explicita, supongamos que las placas metálicas están decargadas.

Problema 2.9

El cable que une ambas placas indica que el potencial de ambas placas conductores será la misma.

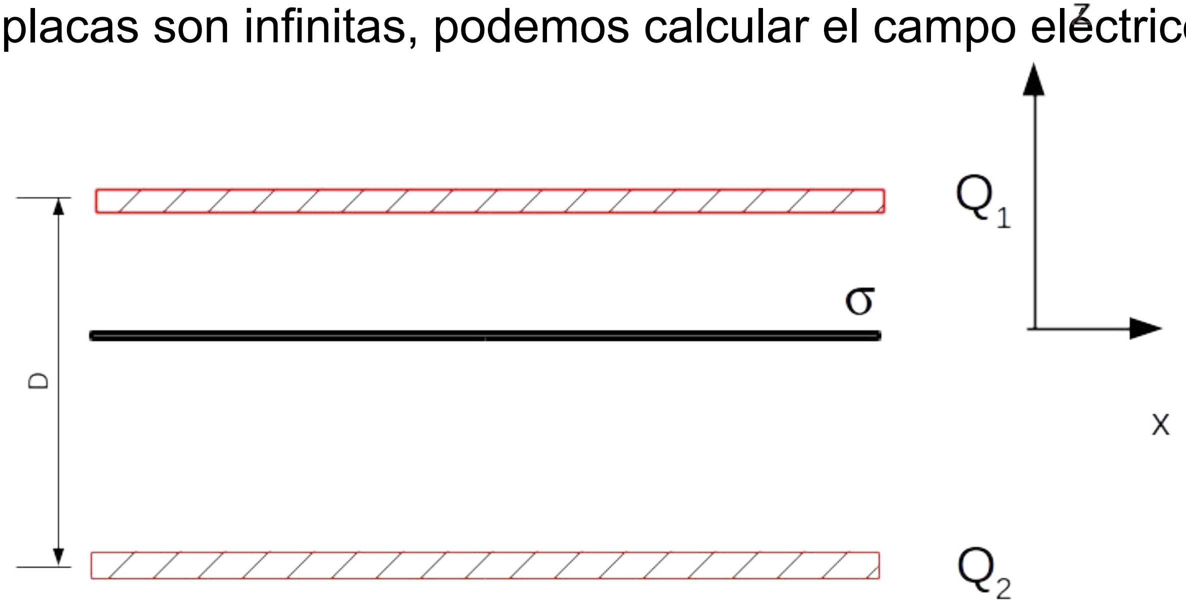
Si no estuviese la placa con densidad de carga σ ¿ambas placas deberían tener la misma carga?

Efectivamente si la placa interior no estuviese, tendríamos 2 placas metálicas que de igual potencial, nada haría que una placa se cargue más que otra, pero al colocar la placa en el interior de alguna manera esta simetría se pierde.

Problema 2.9

Pensemos que cada una de las placas en principio va a tener una carga Q_1 y Q_2.

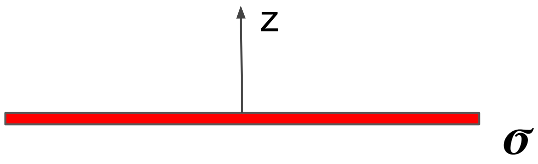
Suponiendo un sistemas de coordenadas centrado en la placas y considerando que las placas son infinitas, podemos calcular el campo eléctrico en todo el espacio.



Recordemos como es el campo de un plano infinito

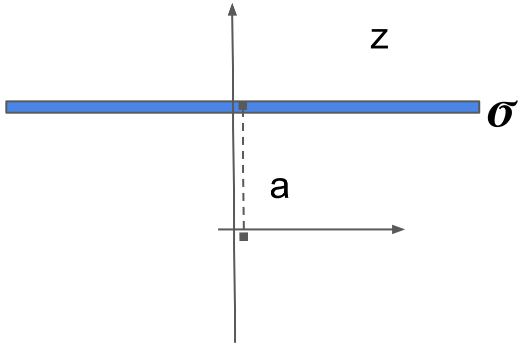
Dado un plano infinito en el origen, el campo está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} sg(z)\hat{z}$$



Si el plano está corrido del origen en una distancia a, entonces

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} sg(z-a)\hat{z}$$



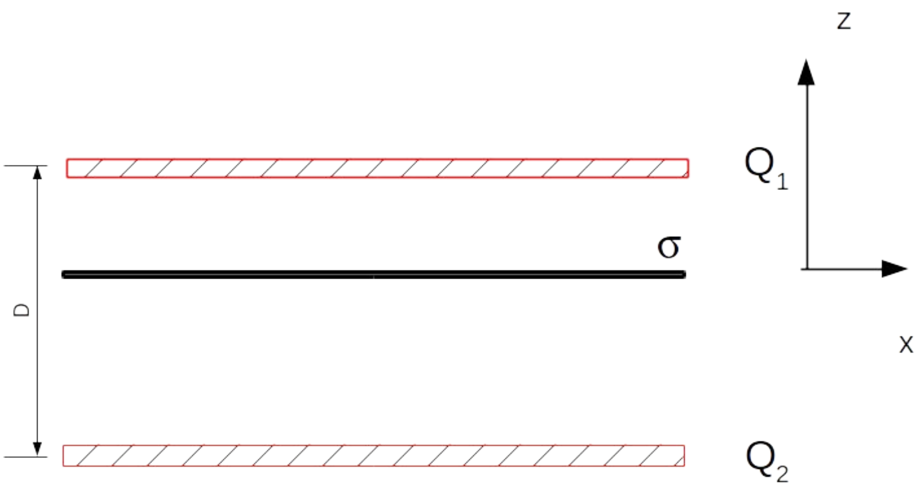
Problema 2.9

El campo eléctrico en todo el espacio se puede calcular por superposición de cada una de las placas cuyos valores son:

$$\vec{E}_{Q_1} = \frac{Q_1}{2A_1\varepsilon_0} sg(z-d)\hat{z}$$

$$\vec{E}_{Q_2} = \frac{Q_2}{2A_2\varepsilon_0} sg(z+(D-d))\hat{z}$$

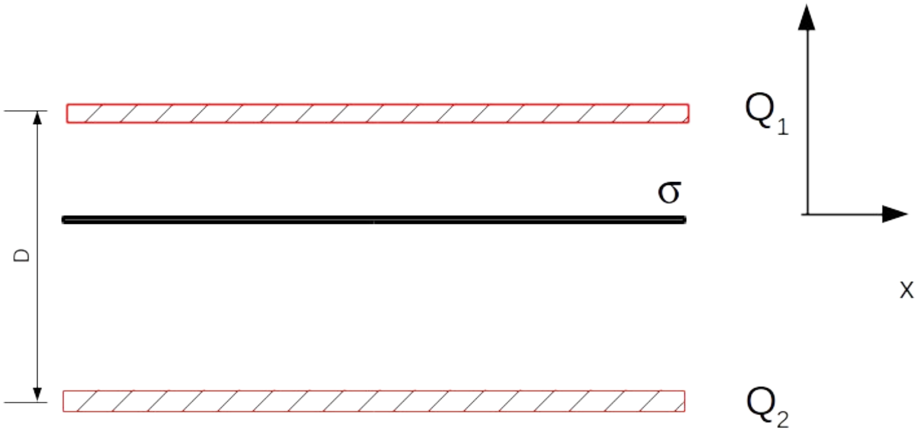
$$\vec{E}_{\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} sg(z)\hat{z}$$



Problema 2.9

El campo eléctrico en todo el espacio se puede calcular por superposición de cada una de las placas cuyos valores son:

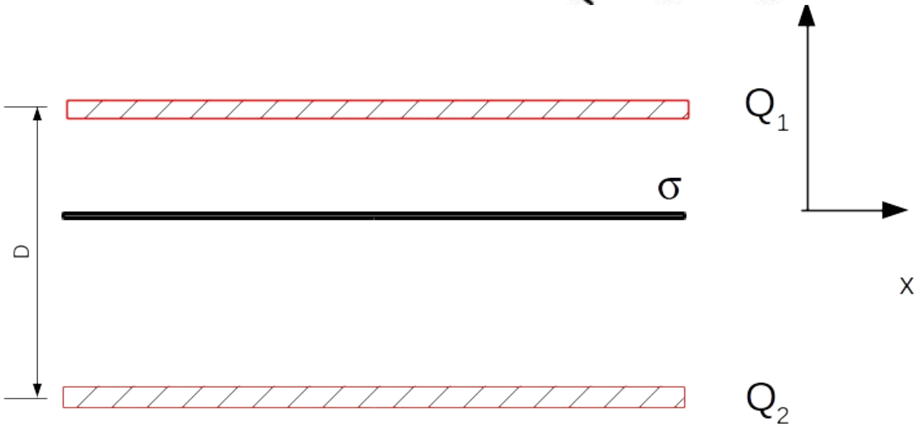
$$\vec{E}_{tot} = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma + \sigma_2)\hat{z}/2\varepsilon_0 & \text{si } z > d \\ (-\sigma_1 + \sigma + \sigma_2)\hat{z}/2\varepsilon_0 & \text{si } 0 < z < d \\ (-\sigma_1 - \sigma + \sigma_2)\hat{z}/2\varepsilon_0 & \text{si } -(D-d) < z < 0 \\ (-\sigma_1 - \sigma - \sigma_2)\hat{z}/2\varepsilon_0 & \text{si } -(D-d) > z \end{cases}$$



Problema 2.9

A partir del campo eléctrico podemos calcular el potencial en todo el espacio, integrando el campo:

$$V(z) = -\int \vec{E}_{tot} d\vec{r} = \begin{cases} -(\sigma_1 + \sigma + \sigma_2) z / 2\varepsilon_0 + A & \text{si } z > d \\ -(-\sigma_1 + \sigma + \sigma_2) z / 2\varepsilon_0 + B & \text{si } 0 < z < d \\ -(-\sigma_1 - \sigma + \sigma_2) z / 2\varepsilon_0 + C & \text{si } -(D-d) < z < 0 \\ -(-\sigma_1 - \sigma - \sigma_2) z / 2\varepsilon_0 + D' & \text{si } -(D-d) > z \end{cases}$$



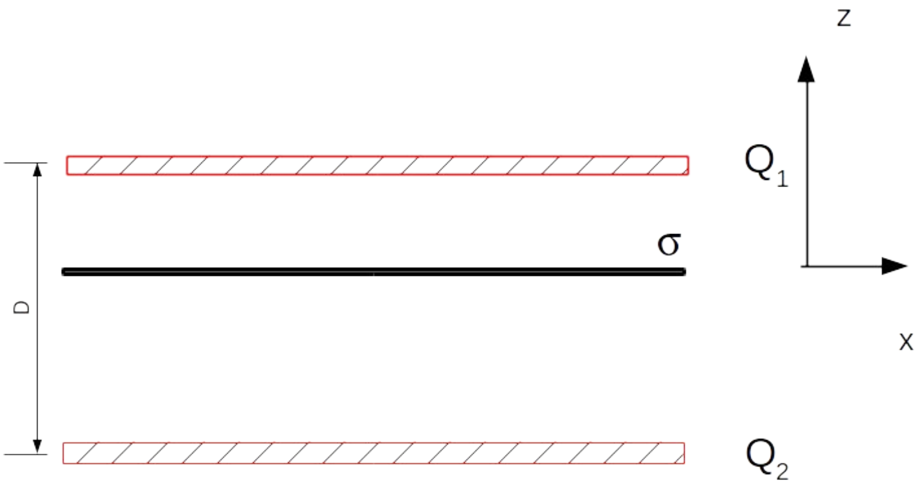
Tenemos 6 incógnitas: A, B, C, D' y las cargas de las placas metálicas σ_1 y σ_2.

Problema 2.9

Tenemos las siguientes condiciones:

Continuidad del potencial

$$V(z \to d^+) = V(z \to d^-)$$
$$V(z \to 0^+) = V(z \to 0^-)$$
$$V(z \to -(D-d)^+) = V(z \to -(D-d)^-)$$



Problema 2.9

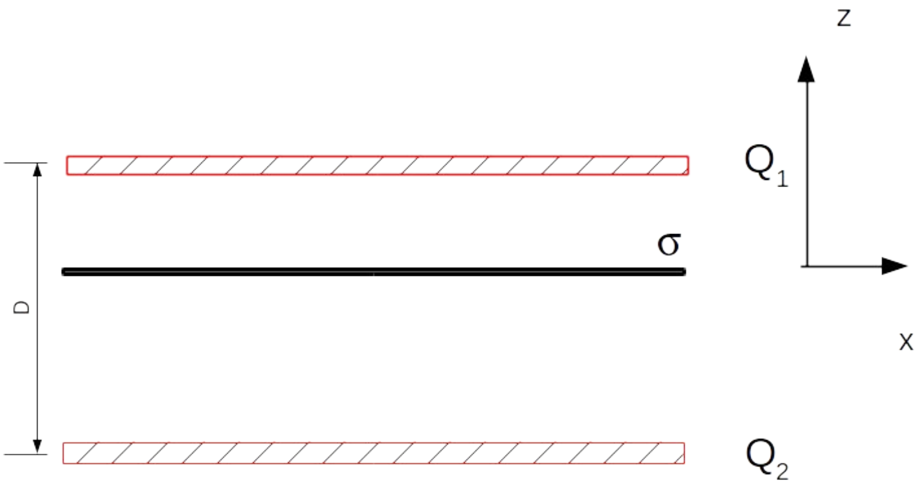
Tenemos las siguientes condiciones:

Mismo potencial en ambas placas (cable)

$$V(z=d) = V(z=-(D-d))$$

Cero de potencial

$$V(z=0)=0$$



Conservación de la carga

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

6 ecuaciones independientes con 6 incógnitas

Problema 2.9

Resolviendo

$$B = 0$$

$$C = 0$$

$$A = \frac{\sigma_1 d}{\varepsilon_0}$$

$$D' = -\frac{\sigma_2(D-d)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma - \sigma_2)d}{2\varepsilon_0} = \frac{(\sigma_1 + \sigma - \sigma_2)(D-d)}{2\varepsilon_0}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

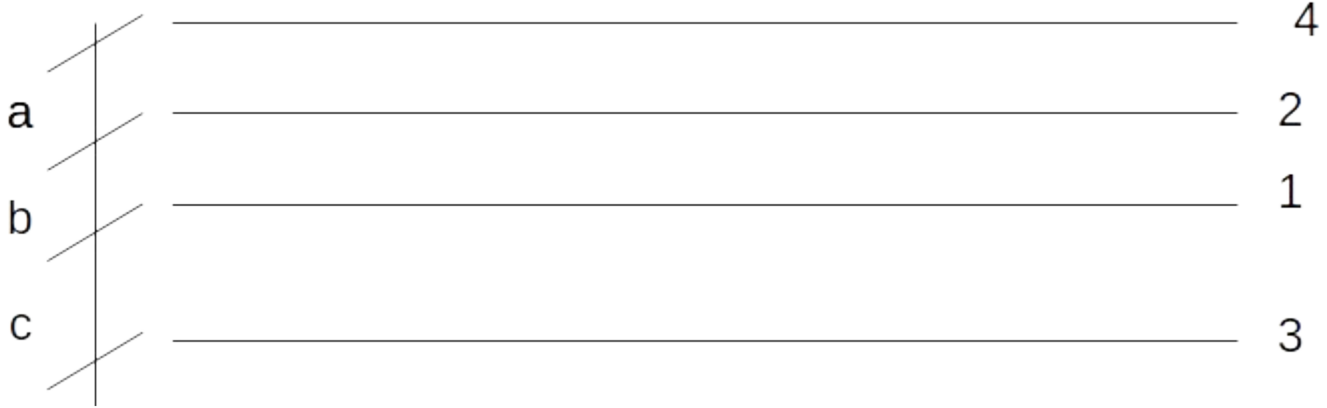
Problema 2.11

11. Obtenga los coeficientes de capacidad e inducción C_{11}, C_{12}, C_{21} y C_{22} para la configuración de planos conductores de la figura, despreciando efectos de borde (las dimensiones de los planos son mucho mayores que las distancias entre ellos). Para ello considere que V_3=V_4=0 y $V_2 > V_1 > 0$ (los coeficientes no dependen de los valores de los potenciales).

    - Grafique el potencial en todo el espacio, teniendo en cuenta que debe ser lineal (¿por qué?) entre dos placas consecutivas.
    - Encuentre σ_1 y σ_2 utilizando que el salto de la componente normal del campo eléctrico es σ/ε_0 y obtenga los coeficientes de capacidad.

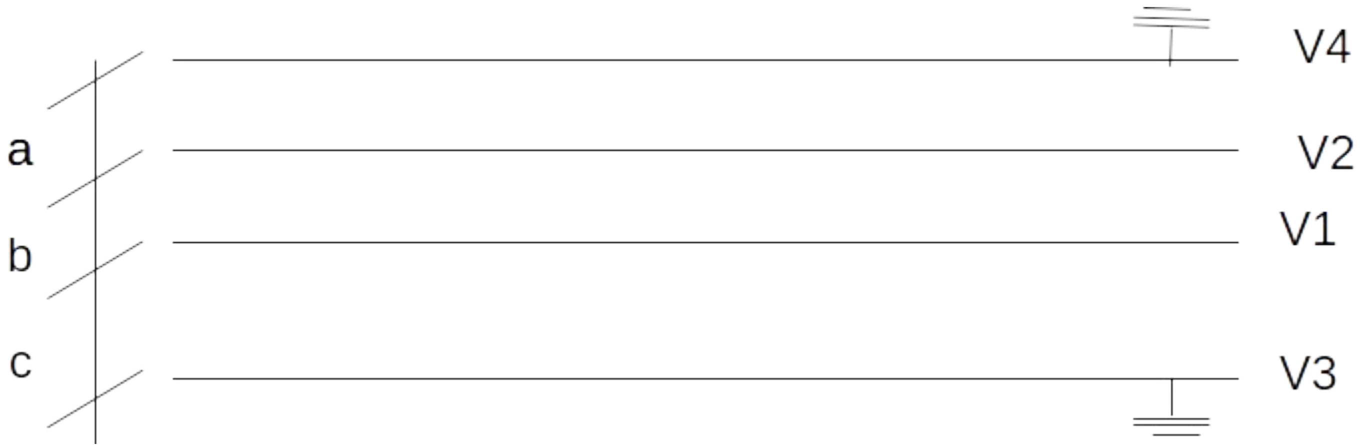
Problema 2.11

Se tienen 4 planos "infinitos" paralelos a potencial fijo: V_1, V_2, V_3 y V_4.



Problema 2.11

Se tienen 4 planos "infinitos" paralelos a potencial fijo: V_1, V_2, V_3 y V_4.



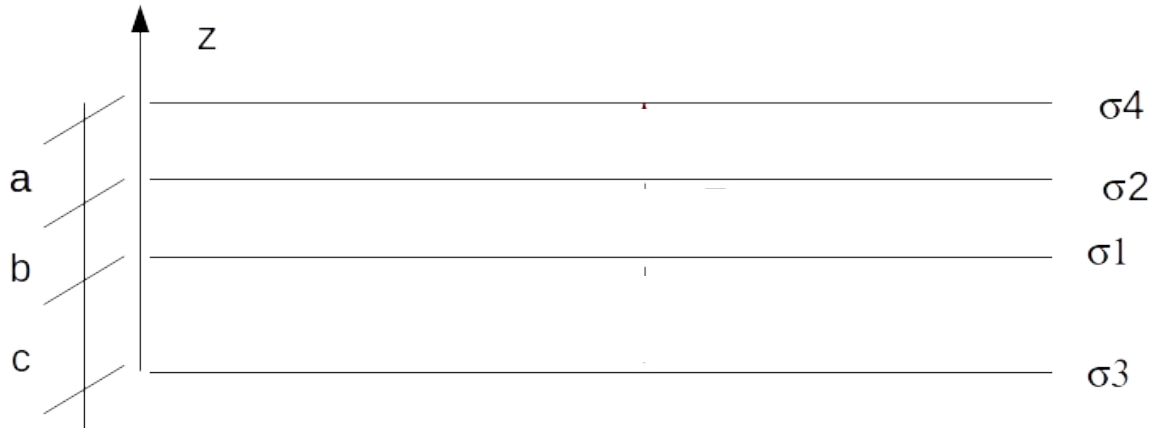
Cada plano adquirirá una carga que depende del potencial propio y de las placas circundantes.

Problema 2.11

Estas cargas dependen linealmente del potencial a través de los coeficientes de capacidad. En particular:

$$Q = CV$$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 + C_{14}V_4$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 + C_{24}V_4$$



Problema 2.11

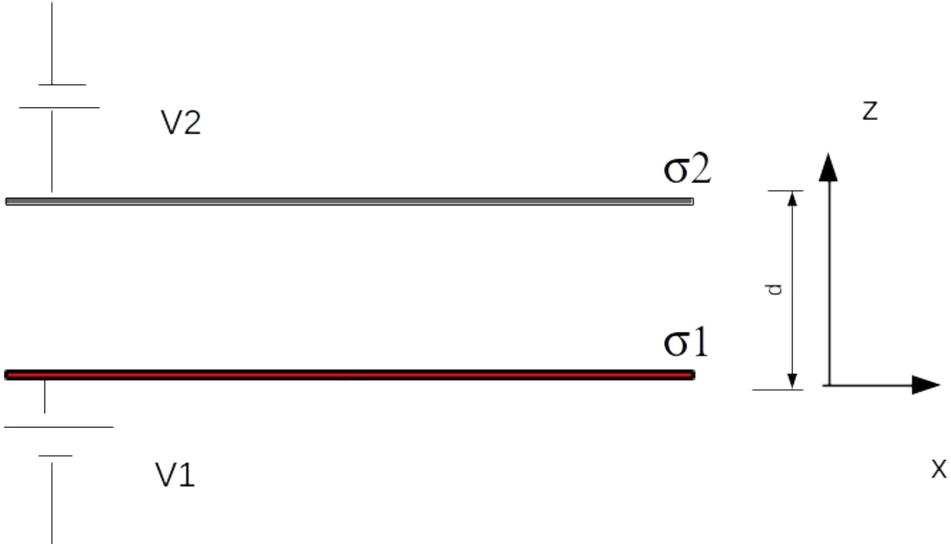
Considerando que las placas superior e inferior están conectadas a Tierra.

$$V_3 = V_4 = 0$$
$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Donde los coeficientes dependen de la geometría de la distribución.¿Cómo los calculamos?

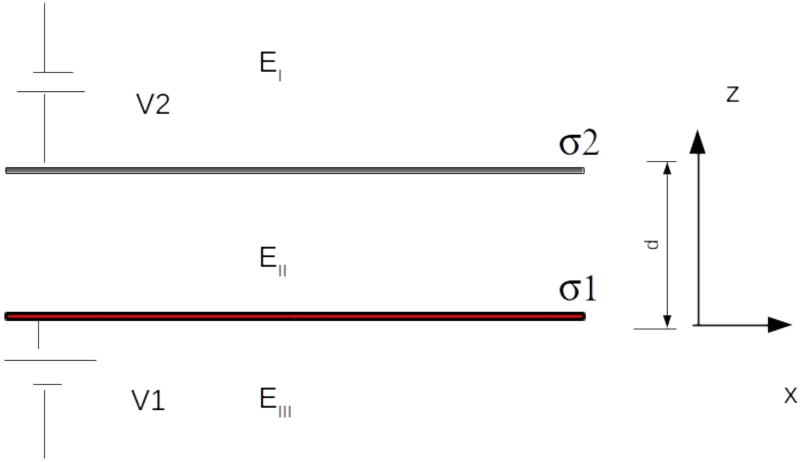
Hagamos un paréntesis

Supongamos que tenemos 2 planos solos conectados a baterías arbitrarias V_1 y V_2 con cargas Q_1 y Q_2.



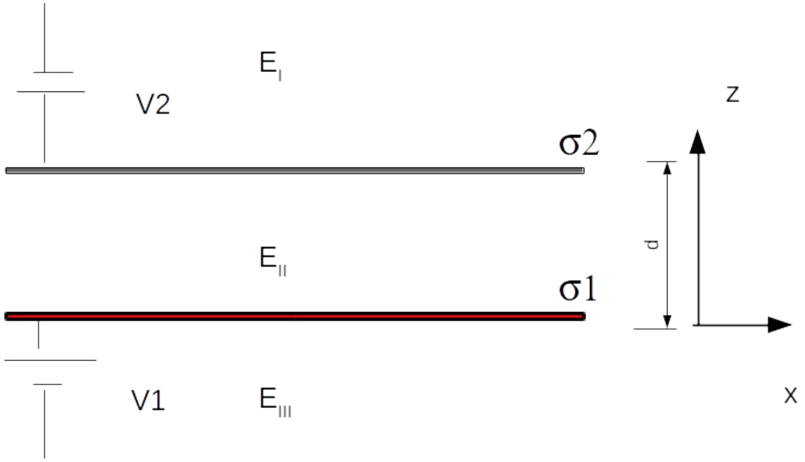
Hagamos un paréntesis

Estas cargas generan campo en todo el espacio, el cual podemos calcular a partir del principio de superposición.



Hagamos un paréntesis

Estas cargas generan campo en todo el espacio, el cual podemos calcular a apartir del principio de superposición.



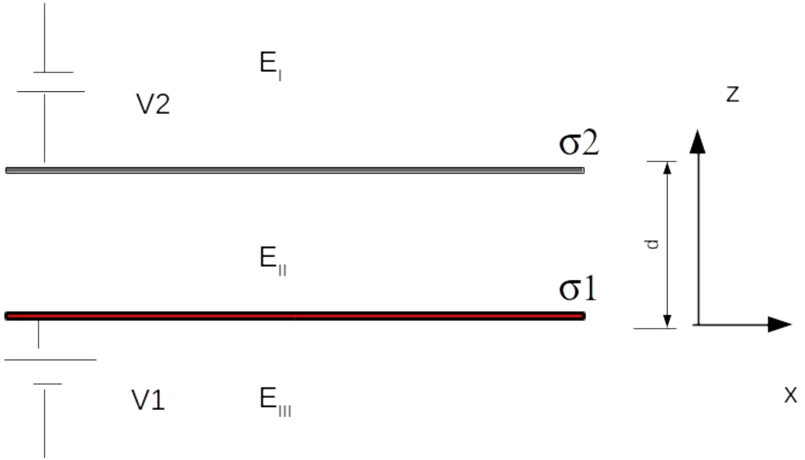
$$\vec{E}_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\,\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{E}_{III} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

Hagamos un paréntesis

El potencial se puede calcular a partir de este campo, y será una función lineal



$$V_I = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} z + A$$

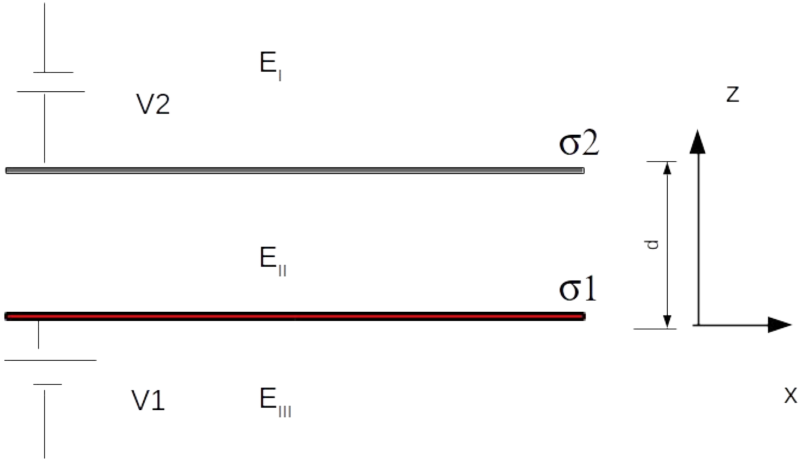
$$V_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} z + B$$

$$V_{III} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} z + C$$

Ya vimos en otros problemas de la guía que podemos calcular el potencial en todo el espacio. Sin embargo a veces trabajar con diferencias de potencial puede permitirnos conocer las cargas o los campos con ‘menos’ cuentas.

Hagamos un paréntesis

Por lo tanto si queremos calcular el campo entre placas...



$$V_I(z=d) = V_1$$

$$V_{II}(z=0) = V_2$$

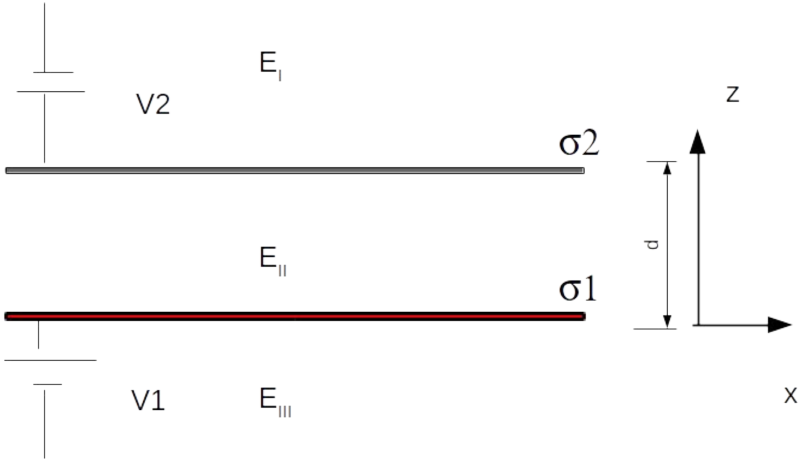
$$V_2 - V_1 = -\int_0^d (E_{II})dz = -dE_{II}$$

$$E_{II} = \frac{V_2 - V_1}{d}$$

Ya sabemos que E_{III} es constante, por eso puede salir de la integral.

Volvemos a Problema 2.11

Por lo tanto si queremos calcular el campo entre placas...



$$V_I(z = d) = V_1$$

$$V_{II}(z = 0) = V_2$$

$$V_2 - V_1 = -\int_0^d (E_{II})dz = -dE_{II}$$

$$E_{II} = \frac{V_2 - V_1}{d}$$

Ya sabemos que E_{II} es constante, por eso puede salir de la integral.

Volvemos al Problema 2.11

En este problema nos piden los coeficientes de capacidad:

$$V_3 = V_4 = 0$$
$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

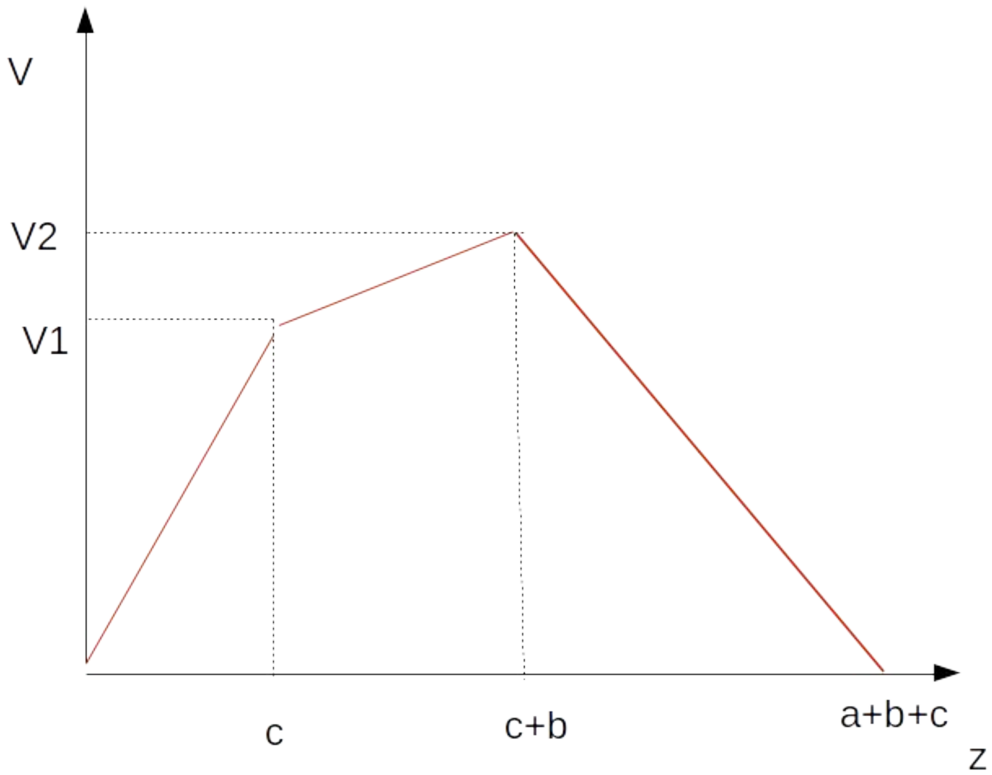
El problema nos plantea que tenemos planos paralelos con cargas uniformes

¿Cómo será el campo entre las placas?¿Cómo será el potencial entre las placas?

¿De qué me sirve saber las relaciones entre los potenciales?

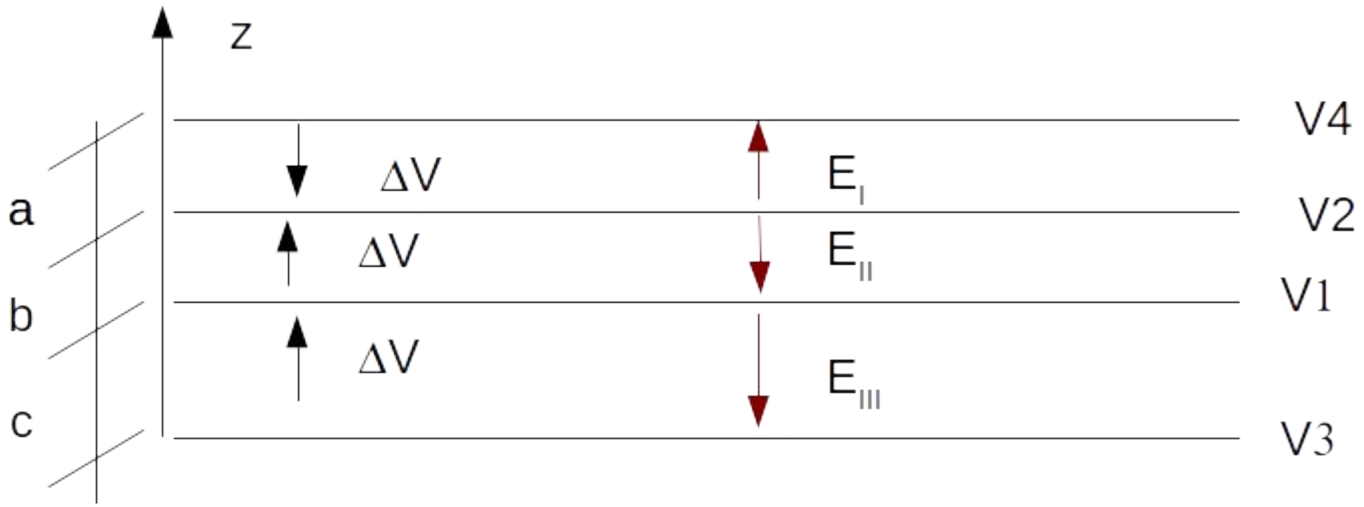
Problema 2.11

El campo entre las placas es constante, el potencial será una función lineal y continua y con la relación entre los potenciales puedo hacer una estimación del sentido del gradiente y por lo tanto del campo eléctrico.



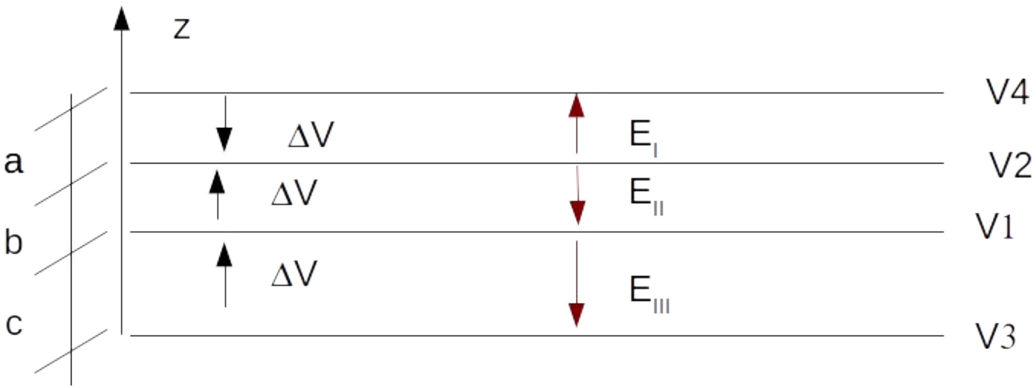
Problema 2.11

El campo entre las placas es constante, el potencial será una función lineal y continua y con la relación entre los potenciales puedo hacer una estimación del sentido del gradiente y por lo tanto del campo eléctrico.



Problema 2.11

A partir del salto del campo eléctrico puedo encontrar una relación entre las cargas y el campo...

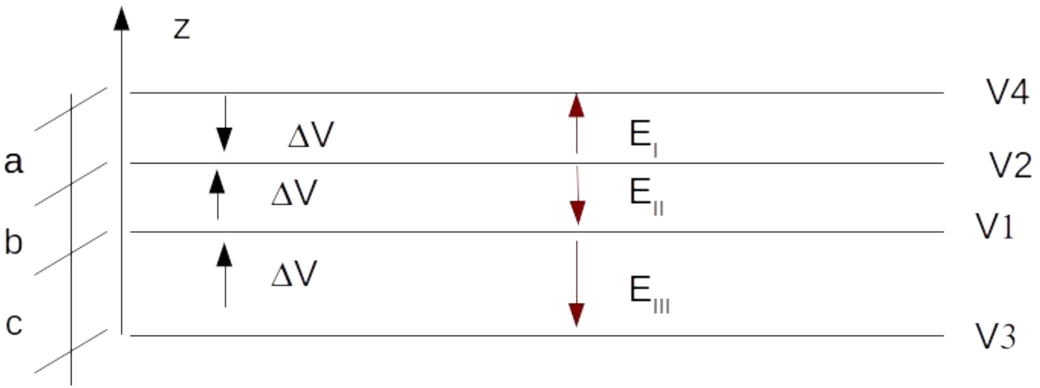


$$(\vec{E}_{II} - \vec{E}_{III}).\hat{z} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$(\vec{E}_{I} - \vec{E}_{II}).\hat{z} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Problema 2.11

Pero a su vez, el módulo del campo eléctrico se puede calcular con la diferencia de potencial entre placas, sabiendo que el campo es uniforme.



$$\vec{E_I} = \vec{\nabla} V_I = \frac{V_2 - V_4}{a}\hat{z}$$

$$\vec{E_{II}} = \vec{\nabla} V_{II} = -\frac{V_2 - V_1}{b}\hat{z}$$

$$\vec{E_{III}} = \vec{\nabla} V_{III} = -\frac{V_1 - V_3}{c}\hat{z}$$

Problema 2.11

Entonces así logramos vincular la carga con el potencial,

$$\sigma_2 = \varepsilon_0(\vec{E_I} - \vec{E_{II}})\hat{z} = \varepsilon_0(\frac{V_2 - V_4}{a} + \frac{V_2 - V_1}{b})$$

$$V_4 = V_3 = 0$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0(\frac{V_2}{a} - \frac{V_2 - V_1}{b})$$

Y lo mismo para la placa 1...

Problema 2.11

Y así logramos vincular la carga con el potencial

$$Q_2 = \sigma_2 * A = A * \varepsilon_0 \left(\frac{V_2}{a} - \frac{V_2 - V_1}{b} \right) = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

$$C_{21} = A * \varepsilon_0 \frac{1}{b}$$

$$C_{22} = A * \varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Se puede ver que los coeficientes de capacidad terminan dependiendo sólo del medio dada por la permitividad eléctrica del vacío y parámetros geométricos.