Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 5

Facundo Pugliese

Repaso: Divergencias, rotores y dieléctricos

Para todo dieléctrico (LIH, electrete u otro) vale:

$$\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P}$$

Campo	$\nabla\cdot$	$\nabla\times$
E	ρ/ε_o	0
P	$-\rho_P$	?
D	ρ_L	?

Para poder definir unívocamente cada campo, **necesito conocer sus divergencias y rotores.**

Pero dado que E es irrotacional, tengo que $\nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P}$

En el fondo, las propiedades del dieléctrico nos dan la ecuación que nos falta

Para un LIH:

$$\nabla \times \bar{E} = \nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P} = 0$$

Para un electrete:

$\bar{P}$ es dato y puedo calcular $\nabla \times \bar{P}$

Electretes: Materiales con polarización fija

Como dijimos, un electrete es un material dieléctrico con **polarización P dada, independiente del campo eléctrico externo**.

Esto nos permite calcular la densidad de polarización en volumen y en superficie:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

Sumando las cargas libres (normalmente dato) y obtenemos directamente las densidades de carga totales para calcular E cómo en la Guía 1.

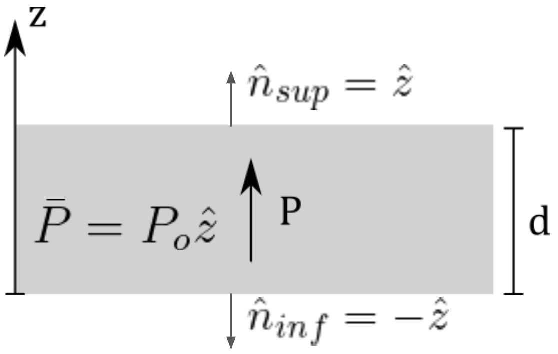
Teniendo E y P, obtenemos D inmediatamente con $\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P}$

Ejercicio 21: Dos electretes para entrar en calor

21. Para los electretes de las figuras, muestre que $\vec{D}=0$ en el primer caso y $\vec{E}=0$ en el segundo caso. Recuerde que un electrete es un material que presenta polarización en ausencia de fuentes externas, por lo tanto no es un material lineal.

(a) (b)

Ejercicio 21(a)



Lo primero que notamos es que no hay carga libre en el sistema (solo tenemos un dieléctrico neutro), por lo que E será generado por cargas de polarización:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad\qquad \sigma_P = -\Delta\bar{P} \cdot \hat{n}$$

Cómo P es constante, no tenemos carga en volumen

$$\rho = \rho_L + \rho_P = 0$$

Para la densidad en superficie, analizo las 2 interfaces z=0 y z=d

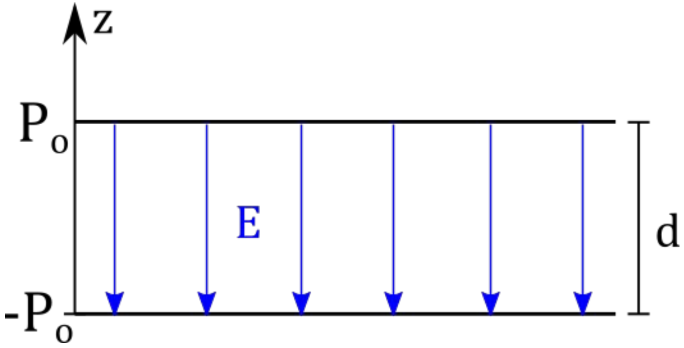
$$z = 0: \qquad \sigma_p^{(inf)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right] \cdot \hat{n}_{inf} = -\left[0 - P_o\hat{z}\right] \cdot (-\hat{z}) = -P_o$$

$$z = d: \qquad \sigma_p^{(sup)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right] \cdot \hat{n}_{sup} = -\left[0 - P_o\hat{z}\right] \cdot \hat{z} = P_o$$

Por lo tanto, tenemos 2 planos paralelos con densidad superficial P_o y -P_o

Ejercicio 21(a)

Para el campo eléctrico, el problema se reduce a dos planos paralelos con densidad de carga superficial opuesta, cuyo resultado conocemos



$$\bar{E}(z) = \begin{cases} -\frac{P_o}{\varepsilon_o}\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Juntando esto con la polarización

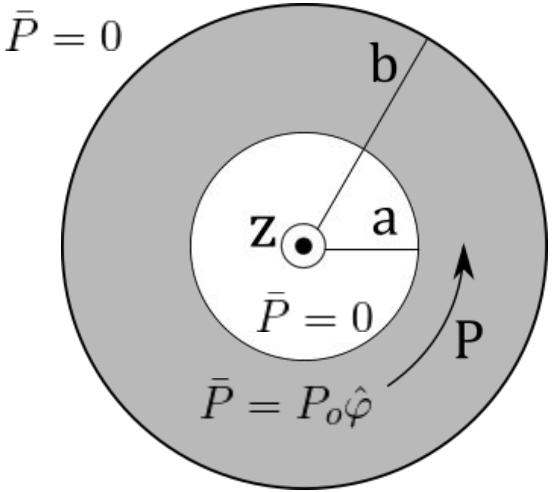
$$\bar{P}(z) = \begin{cases} P_o\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Con esto puedo obtener D usando:

$$\bar{D}(z) = \varepsilon_o\bar{E} + \bar{P}(z) = \begin{cases} \varepsilon_o\left(-\frac{P_o}{\varepsilon_o}\hat{z}\right) + P_o\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Luego, **D=0 en todo el espacio** ¡No tenemos carga libre en el sistema!

Ejercicio 21(b)



Miremos el sistema desde arriba.

Igual que antes, no tenemos cargas libres, por lo que la carga será totalmente de polarización

$$\rho_P = -\nabla\cdot\bar{P} \qquad\qquad \sigma_P = -\Delta\bar{P}\cdot\hat{n}$$

En cilíndricas: $\nabla\cdot\bar{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rP_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$

Por lo tanto, solo podemos tener carga superficial en las interfaces r=a y r=b

$$r=a: \qquad \sigma_P^{(a)} = -\left[\bar{P}_{ext}-\bar{P}_{int}\right]\cdot\hat{n}_a = P_o\hat{\varphi}\cdot(-\hat{r}) = 0$$

$$r=b: \qquad \sigma_P^{(b)} = -\left[\bar{P}_{ext}-\bar{P}_{int}\right]\cdot\hat{n}_b = P_o\hat{\varphi}\cdot\hat{r} = 0$$

Pero se ve que tampoco...

Ejercicio 21(b): Campo eléctrico del vacío

Por lo tanto, el sistema se reduce a… **nada**. No hay carga en ningún punto del espacio, por lo que el **campo eléctrico es nulo.**

Obtenemos entonces $\bar{D}(\bar{r}) = \bar{P}(\bar{r}) = \begin{cases} P_o\hat{\varphi} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Es razonable pensar que E será nulo dado que no hay cargas (o fuentes). Pero si tampoco hay carga libre, ¿cómo puede ser que tengamos D no nulo?

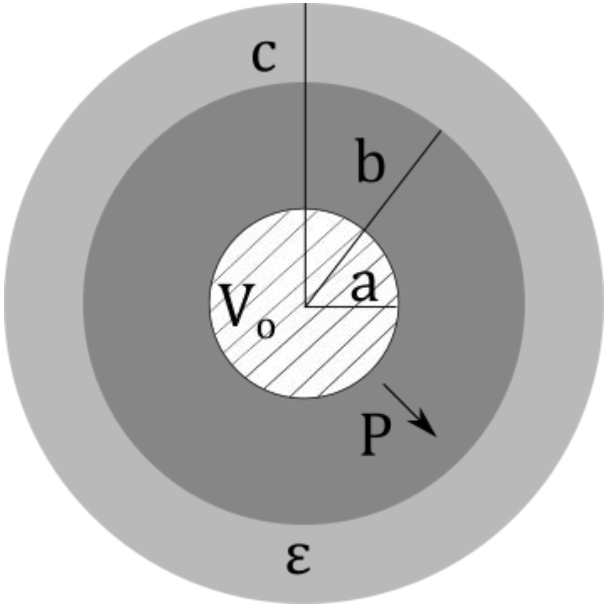
El problema es que **la carga libre no es la única fuente de D**, pues

$$\nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial P_r}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rP_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial (rP_o)}{\partial r}\hat{z} = \frac{P_o}{r}\hat{z} \implies \boxed{\nabla \times \bar{D} = \frac{P_o}{r}\hat{z} \quad , \quad \nabla \cdot \bar{D} = 0}$$

¡Continuará dentro de un mes!

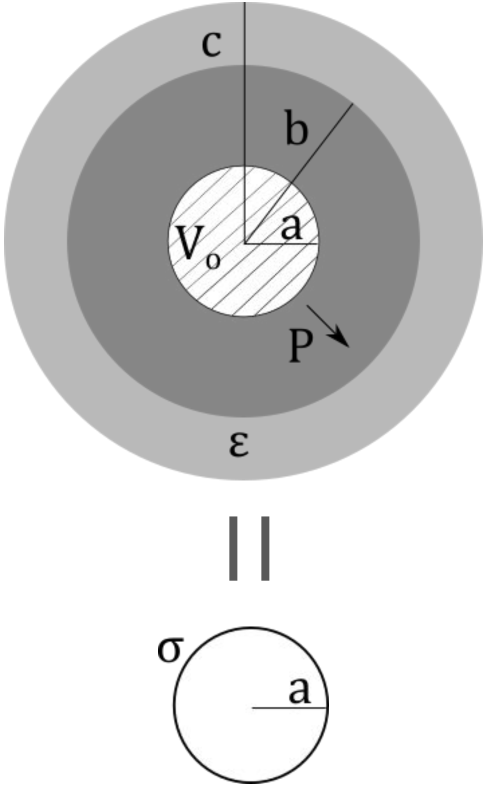
Mezcladito: Juntando medios



Tenemos una esfera conductora maciza de radio a conectada a una batería con potencial V_0 rodeada por un electrete de polarización radial $\bar{P} = P_o \hat{r}$ de radio interno a y externo b.
Todo este sistema está envuelto en un dieléctrico LIH de permitividad ε, radio interno b y externo c.

a) Calcular E, P y D en todo el espacio
b) Obtener las densidades de carga libre y polarización
c) ¿Cómo es el campo eléctrico en el exterior para V_0=0? ¿Y para $Q_{conductor}$=0?

Mezcladito: Cargas



Empecemos por identificar donde puede haber carga.

<u>Carga libre:</u> Cómo los dieléctricos son neutros, solo puede haber carga en la **superficie del conductor ($r=a$).** Por simetría, esta densidad σ debe ser uniforme.

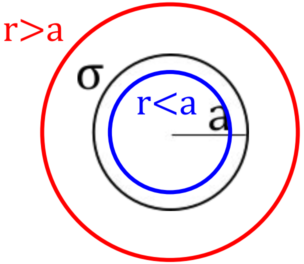
<u>Carga de polarización:</u> Solo en los dieléctricos

$a < r < b$: Electrete, ya conozco P por lo que puedo calcular ρ_P y σ_P directamente

$b < r < c$: Dieléctrico LIH, necesitamos conocer E ó D para obtener P y calcular ρ_P y σ_P.

¿Que calculamos entonces?

Mezcladito: Corriente de desplazamiento



Para D, el sistema no es más que un cascarón esférico con densidad de carga superficial uniforme, así que usando la simetría esférica podemos calcularlo con Gauss.
Tomamos una esfera de radio r y usamos

$$\oint_{S_r} \bar{D}(\bar{r}) \cdot \mathrm{d}\bar{S}_r = Q^L_{enc}$$

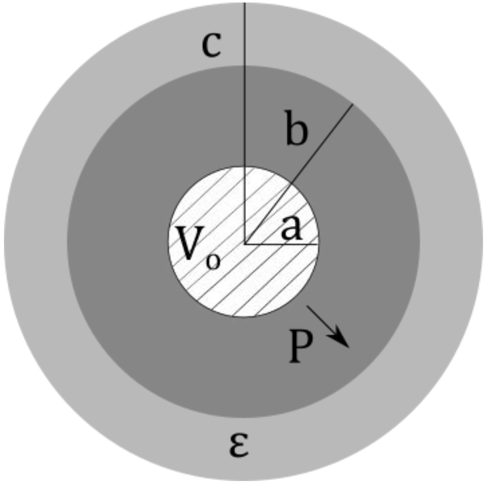
$$\oint_{S_r} \bar{D}(\bar{r}) \cdot \mathrm{d}\bar{S}_r = \oint_{S_r} D(r)\hat{r} \cdot \mathrm{d}S_r\hat{r} = 4\pi r^2 D(r)$$

$$Q^L_{enc} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ 4\pi a^2\sigma & \text{si } r > a \end{cases}$$

Por lo tanto, D tiene la misma forma fuera del conductor, **independientemente de los dieléctricos presentes**

$$\boxed{\bar{D}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}}$$

Mezcladito: Campo eléctrico



$$\bar{D}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

Conociendo D en todo el espacio, podemos calcular E en cada región usando $\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P}$

Separemos en regiones:

Conductor (r < a): $\boxed{\bar{P} = 0} \Longrightarrow \boxed{\bar{E} = 0}$

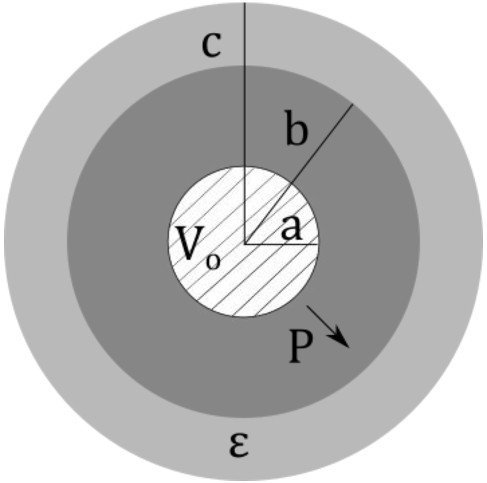
Electrete (a < r < b): $\boxed{\bar{P} = P_o\hat{r}} \Longrightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{\bar{D} - \bar{P}}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma a^2 - P_o r^2}{\varepsilon_o r^2}\hat{r}}$

LIH (b < r < c): $\bar{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\bar{E} \Longrightarrow \bar{D} = \varepsilon\bar{E} \Longrightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon r^2}}$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon}\frac{a^2\sigma}{r^2}}$$

Exterior (c < r): $\boxed{\bar{P} = 0} \Longrightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon_o} = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_o r^2}\hat{r} = \frac{4\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} = \frac{kQ_L}{r^2}\hat{r}}$

Mezcladito: Juntando todo



$$\bar{D}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ \frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } c < r \end{cases}$$

$$\bar{P}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ P_o\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ 0 & \text{si } c < r \end{cases}$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{\sigma a^2 - P_o r^2}{\varepsilon_o r^2}\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_o r^2}\hat{r} & \text{si } c < r \end{cases}$$

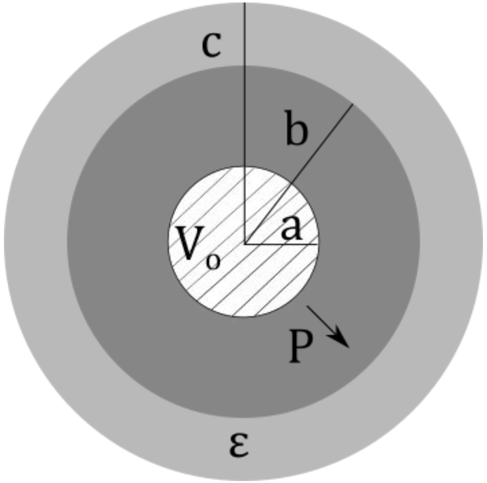
Parece terminado, pero aún no conocemos el σ inducido. Tenemos que usar la condición de contorno del potencial.

Integramos E para obtener el potencial y usamos las condiciones de contorno y continuidad

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } r < a \\ \frac{\sigma a^2 + P_o r^2}{\varepsilon_o r} + \phi_1 & \text{si } a < r < b \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon r} + \phi_2 & \text{si } b < r < c \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_o r} + \phi_3 & \text{si } c < r \end{cases}$$

$\phi(a^+) = \phi(a^-) = V_o \qquad \phi(b^+) = \phi(b^-) \qquad \phi(c^+) = \phi(c^-) \qquad \phi(\infty) = 0$

Mezcladito: Densidades de carga



$$\bar{P}(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ P_o\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ 0 & \text{si } c < r \end{cases}$$

Para obtener σ, resolvemos el sistema anterior y sale

$$\frac{a^2\sigma}{b\varepsilon_o}\left[\left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}-1\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)+\frac{b}{a}\right] = V_o - \frac{P_o a}{\varepsilon_o}\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

Y de yapa tenemos la única densidad superficial de carga libre del sistema (ubicada en $r=a$).

Calculemos también la densidad de polarización en $r=a$

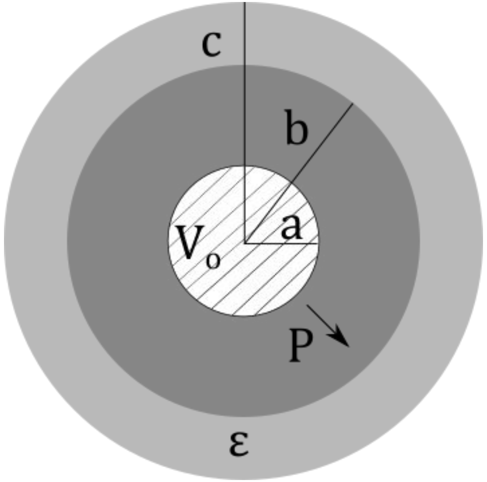
$$\sigma_P(r=a) = -\left[\bar{P}(a^+)-\bar{P}(a^-)\right]\cdot\hat{r} = -P_o$$

Vamos ahora a la interfaz en $r=b$

$$\sigma_P(r=b) = -\left[\bar{P}(b^+)-\bar{P}(b^-)\right]\cdot\hat{r} = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{b^2}+P_o$$

Finalmente $r=c$: $\sigma_P(r=c) = -\left[\bar{P}(c^+)-\bar{P}(c^-)\right]\cdot\hat{r} = +\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2}{c^2}\sigma$

Mezcladito: Densidades de carga



Por lo tanto, tenemos 3 densidades superficiales de polarización en las interfaces r=a, r=b y r=c.

$$\sigma_P(r=a) = -P_o$$

$$\sigma_P(r=b) = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{b^2} + P_o$$

$$\sigma_P(r=c) = +\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2}{c^2}\sigma$$

Confirmemos que la carga total de polarización es nula

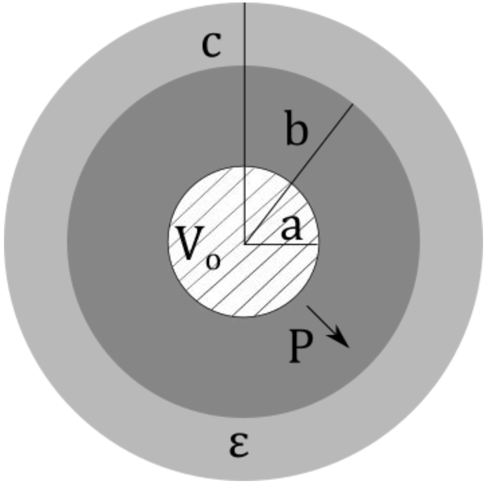
$$-Q_P = A_a\sigma_P^{(a)} + A_b\sigma_P^{(b)} + A_c\sigma_P^{(c)} = 4\pi a^2 P_o + 4\pi b^2\left(\cancel{\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{b^2}} - P_o\right) - 4\pi c^2\cancel{\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2}{c^2}}\sigma = 4\pi P_o(a^2-b^2) \neq 0$$

¡Faltó la densidad en volumen!

$$\text{En } a<r<b: \quad \rho_P = -\nabla\cdot\bar{P} = -\nabla\cdot(P_o\hat{r}) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2P_o)}{\partial r} = -\frac{2P_o}{r}$$

$$\text{En } b<r<c: \quad \rho_P = -\nabla\cdot\bar{P} = -\nabla\cdot\left[\frac{(\varepsilon-\varepsilon_o)}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{r^2}\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{(\varepsilon-\varepsilon_o)}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{r^2}\right] = 0$$

Mezcladito: Últimos comentarios



Corrigiendo, tenemos 3 densidades superficiales de polarización en las interfaces $r=a$, $r=b$ y $r=c$.

$$\sigma_P(r=a) = -P_o$$

$$\sigma_P(r=b) = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2\sigma}{b^2} + P_o$$

$$\sigma_P(r=c) = +\frac{\varepsilon-\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{a^2}{c^2}\sigma$$

Y una densidad volumétrica $\quad \text{En } a < r < b: \quad \rho_P(r) = -\frac{2P_o}{r}$

Dejo en sus manos confirmar que ahora la carga de polarización total es nula.

Para $V_o=0$, vemos que σ≠0 y hay campo eléctrico en el exterior $\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_o r^2}\hat{r} \neq 0}$

Vean que ocurre para $Q_{conductor}=0$, ¿que impone esto sobre σ? ¿hay campo?