**CAPACIDAD Y CAPACITORES**

La Capacidad es la propiedad que tiene un objeto de retener carga eléctrica.

Un capacitor es un dispositivo que retiene carga de manera muy efectiva. Consiste en poner dos conductores a una diferencia de potencial y separarlos una cierta distancia. El conductor a potencial más alto se carga con carga $Q$ y el otro con $-Q$. La Capacidad de un capacitor queda definida como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{1}$$

Donde $Q$ es la carga retenida en el capacitor, y $\Delta V$ es la diferencia de potencial entre los dos conductores.

La Capacidad $C$ depende únicamente de la geometría del capacitor, y del medio entre los conductores. Por ahora solo vamos a ver casos donde el medio es el vacío.

**Ejercicio 8 a: Calcular la capacidad de una esfera conductora maciza de radio R, en el vacío.**

Suena raro pensar en la capacidad de algo que no es un capacitor. Siempre tenemos dos conductores y en este caso solo hay uno. Una forma de ver este problema es verlo como la esfera maciza y una superficie en el infinito que, como siempre, decimos que está a potencial cero.

Ahora bien, el problema no da datos de carga ni de potencial. Está bien porque debería llegar a una expresión para C que solo dependa de la geometría y el medio.
Puedo elegir entonces, dos maneras de resolverlo:

**1) Elegir como 'dato' la carga $Q$ contenida en la esfera**. Este es el caso de resolución fácil y rápida, pero más irreal.

**2) Elegir como 'dato' el potencial $V_0$ sobre la esfera.** Este es el caso más cuentoso de resolver, pero más real.

En la vida real nadie habla de cuánta carga tiene una batería por ejemplo, sino de cuántos volts (unidad de potencial) es. Por eso la distinción entre ambos casos.

**Empecemos por el fácil. Conocemos la carga $Q$ de la esfera.**

Debido a la simetría esférica del problema, sabemos que el potencial toma forma del de una carga puntual $Q$, y solo depende de la coordenada radial $r$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{2}$$

para $r > R$.
Para $r \leq R$, el potencial vale

$$V_{esfera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \tag{3}$$

ya que la esfera maciza es conductora, y el potencial es el mismo en todos sus puntos.

Habíamos dicho que el potencial en el infinito valía cero.

Entonces, $\Delta V = V_{esfera} - V_{inf} = V_{esfera}$.

Y la capacidad es,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_{esfera}} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R. \tag{4}$$

**Ahora supongamos que en vez de conocer la carga, conocemos el potencial $V_0$ en la esfera.**

Sabemos que la expresión del potencial fuera de la esfera va como $1/r$, pero no sabemos escribirlo sin usar el valor de la carga, que esta vez no conocemos.

La ecuación que resuelve el potencial es la de Poisson, que fuera de una distribución de cargas se convierte en la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V = 0 \tag{5}$$

y nuestras condiciones de contorno son: $V(r \leq R) = V_0$, y $V(\infty)$=0.

En coordenadas esféricas la ecuación se escribe,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi} = 0 \tag{6}$$

Como mis condiciones de contorno valen para superficies de $r = cte$, puedo suponer que el potencial depende solamente de $r$ (que en realidad ya lo sé), y tirar toda la parte no radial de la ecuación. Si la solución que obtengo usando esta suposición funciona, por unicidad sé que es la correcta. Entonces,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \tag{7}$$

Tiro el $1/r^2$ y me queda entonces,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \longrightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = cte = A \tag{8}$$

Paso el diferencial de $r$, y el $r^2$ e integro,

$$V(r) = \int \frac{A}{r^2} dr = -\frac{A}{r} + B \tag{9}$$

Tiene sentido: una ecuación diferencial de orden 2 me da 2 constantes de integración. Las puedo obtener porque tengo dos condiciones de contorno:

$$V(\infty) = B = 0 \longrightarrow B = 0 \tag{10}$$

entonces,

$$V(R) = -\frac{A}{R} = V_0 \longrightarrow A = -V_0 R \tag{11}$$

Y el potencial queda finalmente,

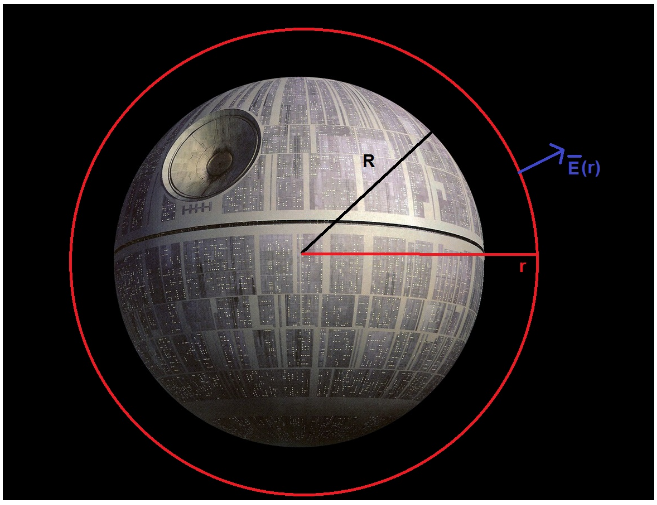
$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ \frac{V_0 R}{r} & r > R \end{cases} \tag{12}$$

Pregunta: ¿por qué calculé el potencial en todo el espacio si en la expresión de $C$ solo necesito $\Delta V$? (que es $\Delta V = V_0 - V_{inf} = V_0$)

Respuesta: Me falta calcular la carga $Q$, que la obtengo usando Gauss a partir del campo $\vec{E}$,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{V_0 R}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases} \tag{13}$$

Ahora tomo una superficie esférica de Gauss de radio genérico $r$ que encierra a toda la esfera conductora y aplico la ley de Gauss. La carga encerrada es la carga total de la esfera $Q$ que quiero hallar:




$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{14}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V_0 R}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{15}$$

El producto escalar da 1, los $r^2$ se cancelan, y la integral doble da $4\pi$. Entonces,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 R \tag{16}$$

Finalmente,

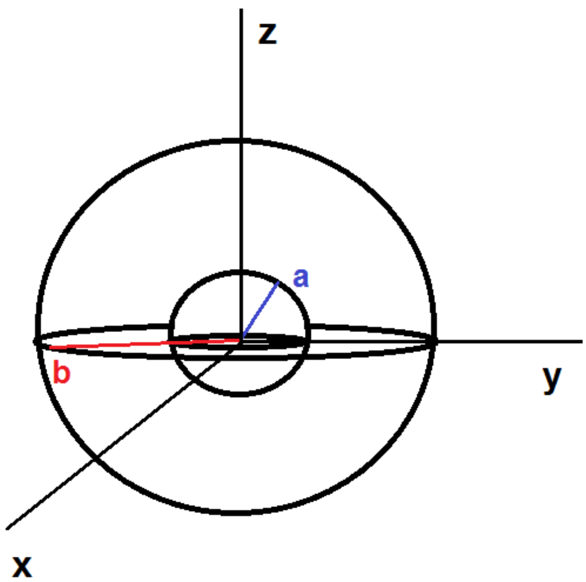
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R \tag{17}$$

Que es el resultado que obtuve en (4). Es interesante ver como la capacidad de una esfera crece linealmente con su radio, y no con su volumen.

En los problemas de electrostática, generalmente se resuelve la ecuación de Laplace para el potencial, con dos tipos de condiciones de contorno: o sé la carga, o sé el potencial en algunas partes del espacio.

**Ejercicio 8 b: capacitor esférico**

Ahora sí tenemos un capacitor: dos superficies conductoras conectadas a distinto potencial que almacenan una carga, donde el conductor exterior posee carga total opuesta al interior. En este caso son dos casquetes esféricos de radio a y b:

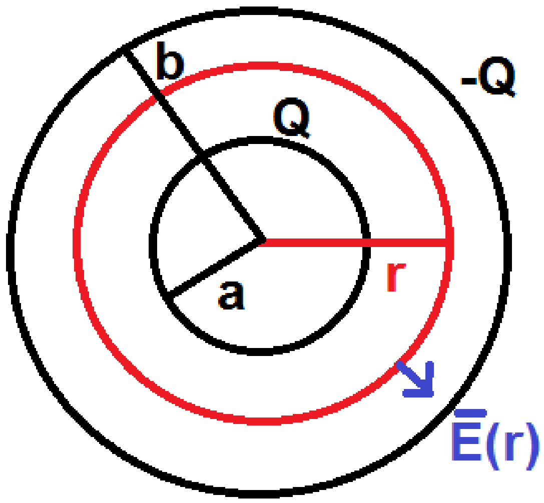



Ahora bien, al igual que antes, el problema no me dice si conozco la carga o si conozco los potenciales de los conductores.

**Comienzo con el caso en el que conozco la carga $Q$.**

Lo que necesito hallar es la diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$, donde $V_1$ siempre es el potencial al que está conectado el conductor con carga positiva (la esfera chica en este caso).

Planteo una superficie de Gauss esférica, de radio arbitrario $a < r < b$ y aplico la ley de Gauss:




Asumo que por la simetría esférica de las superficies, el campo solo tiene componente $\hat{r}$

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sin\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{18}$$

Entonces, como ya nos imaginábamos:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{19}$$

para $a < r < b$. El campo fuera del capacitor no me interesa. Igual haciendo Gauss dentro de a y fuera de b se ve claramente que el campo es cero.

Para obtener $\Delta V$ entre ambas superficies, tengo que integrar el campo entre ambos radios,

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_b^a E(r)dr = \int_a^b E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\bigg|_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{20}$$

Y la capacidad,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{21}$$

depende solo de la geometría y el medio entre los conductores (vacío en este caso).

**Ahora supongamos que no conozco la carga, pero conozco los potenciales $V_1$ (esfera interior) y $V_2$ (esfera exterior).**

Planteo la ecuación de Laplace para la región entre ambos conductores. Al igual que en el problema anterior, por la simetría de las condiciones de contorno, que son para superficies de $r = cte$, puedo asumir que el potencial depende solo de $r$ y tirar los otros dos términos del laplaciano. Me queda entonces,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \tag{22}$$

cuya solución ya obtuve en (9) y es

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B \tag{23}$$

Para hallar las constantes A y B, planteo las dos condiciones de contorno, en $r = a$ y $r = b$,

$$V(a) = V_1 = -\frac{A}{a} + B \tag{24}$$

$$V(b) = V_2 = -\frac{A}{b} + B \tag{25}$$

Resto $V_1 - V_2 = \Delta V$ y obtengo A,

$$\Delta V = -\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = -A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \longrightarrow A = -\frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{26}$$

Remplazo A en (24) y obtengo B,

$$V_1 = \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\frac{1}{a} + B \longrightarrow B = V_1 - \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\frac{1}{a} \tag{27}$$

Remplazando A y B en la solución general,

$$V(r) = V_1 + \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{28}$$

Y el campo es,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\frac{1}{r^2}\hat{r} \tag{29}$$

Ahora tomo la misma superficie esférica de Gauss que tomé antes, para un radio intermedio, pero esta vez conozco el campo en vez de la carga. Remplazo el campo en la ley de Gauss para hallar el valor de la carga:

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\frac{1}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{30}$$

Despejando resulta,

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 \Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{31}$$

Y la capacidad,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 \frac{\Delta V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{32}$$

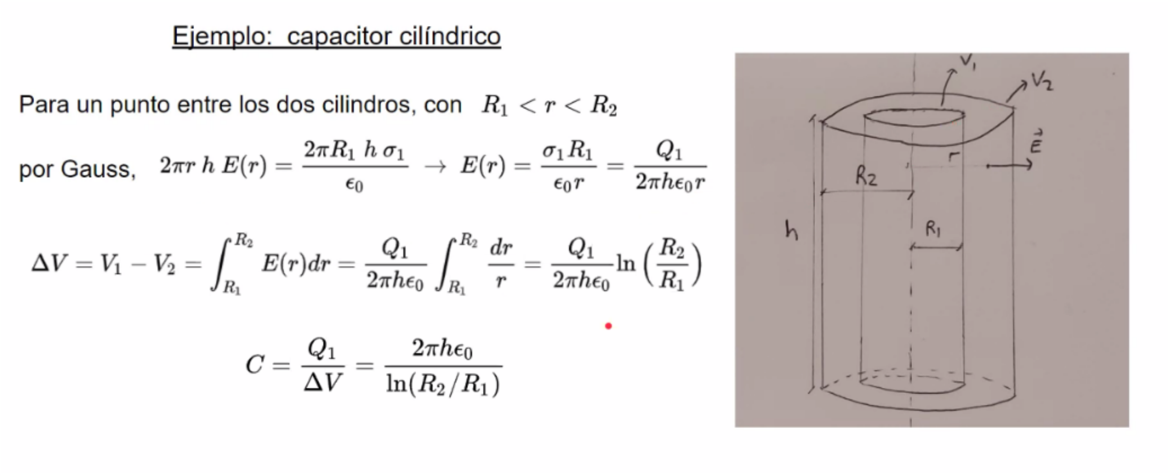
que es el mismo resultado obtenido en (21).

Si hago tender b a infinito, me queda

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \tag{33}$$

que es la capacidad de una esfera de radio a, obtenida en el punto anterior. Pero aquella vez era una esfera maciza, y esta vez es un casquete hueco...**¿por qué $C$ es la misma?**

**Ejercicio 8 c**: El capacitor cilíndrico ya fue resuelto por Pablo en la teórica:




Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

Mirando bien, usó la condición de contorno de conocer $Q$.

**Propuesta**: llegar al mismo resultado asumiendo que no conozco $Q$, pero conozco $V_1$ y $V_2$ en los conductores. Tienen que plantear la ecuación de Laplace pero en coordenadas cilíndricas.

El ejercicio pide calcular la capacidad por unidad de longitud, por lo que pueden asumir 'cilindros infinitos' o bien, cilindros con radio mucho menor a su altura. Si luego multiplican esta capacidad por unidad de longitud por una altura h, deberían llegar a la misma expresión obtenida en la teórica.

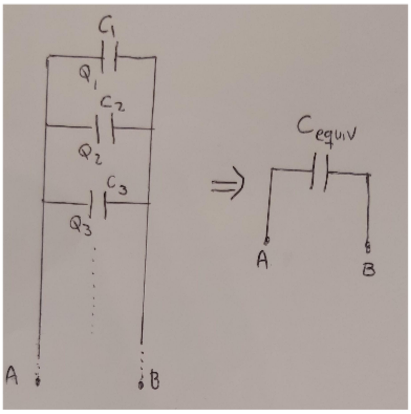
**Ejercicio 14: Capacitores conectados en serie y paralelo, capacidad equivalente.**

Como vieron en la teórica, los capacitores conectados en serie o en paralelo, pueden reducirse a un solo capacitor con una capacidad equivalente.

<u>Conexiones entre capacitores</u>

Todo esto lo analizamos al final

En paralelo:




$$Q_1 = C_1(V_A - V_B)$$

$$Q_2 = C_2(V_A - V_B)$$

$$Q_3 = C_3(V_A - V_B)$$

$$\ldots$$

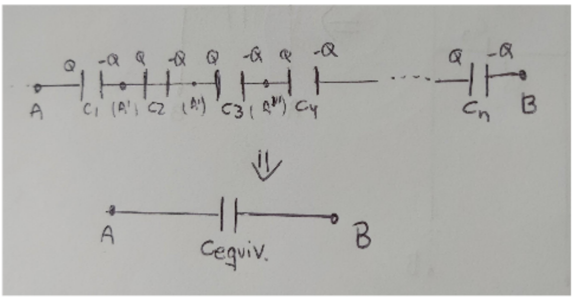
$$Q_{\text{total}} = \sum_i Q_i = (V_A - V_B)\sum_i C_i = (V_A - V_B)\, C_{\text{equiv}}$$

$$\boxed{\Rightarrow C_{\text{equiv}\,\|} = \sum_i C_i}$$

Usemos esto para resolver y después vemos lo de arriba

Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

En serie:




$$V_A - V_{A'} = Q/C_1$$

$$V_{A'} - V_{A''} = Q/C_2$$

$$V_{A''} - V_{A'''} = Q/C_3$$

$$\ldots$$

$$V_{A^{n-1}} - V_{B'} = Q/C_n$$

Todo esto lo vemos al final

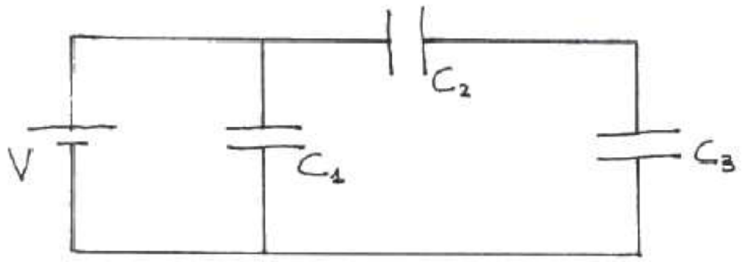
sumando $V_A - V_B = Q\sum_i 1/C_i \;\Rightarrow Q = \dfrac{\Delta V}{\sum_i 1/C_i} = C_{\text{equiv}}\,\Delta V$

$$\boxed{\Rightarrow C_{\text{equiv serie}} = \frac{1}{\sum_i 1/C_i}}$$

Usemos esto para resolver

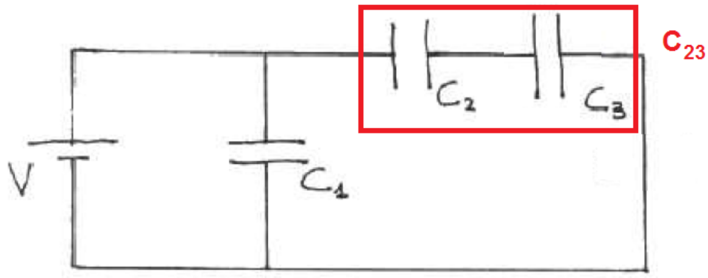
Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

El ej. 14 nos plantea esta situación:




Problema 14

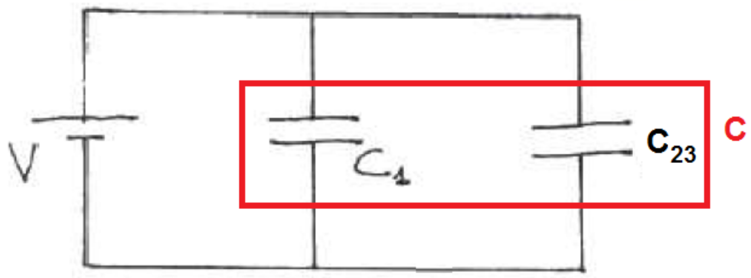
Que por la forma puede resultar un poco engañosa. Es equivalente dibujarlo así:




Ahora voy a calcular una capacidad equivalente $C_{23}$ entre $C_2$ y $C_3$. Uso la fórmula para sumarlos en serie,

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \longrightarrow C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \tag{34}$$

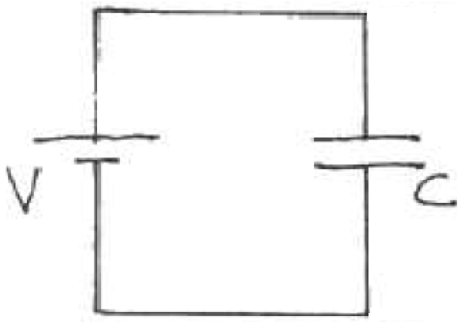
Ahora tengo esto:




Como están en paralelo, la capacidad equivalente es sumarlas directamente,

$$C = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \tag{35}$$

y el circuito equivalente es:



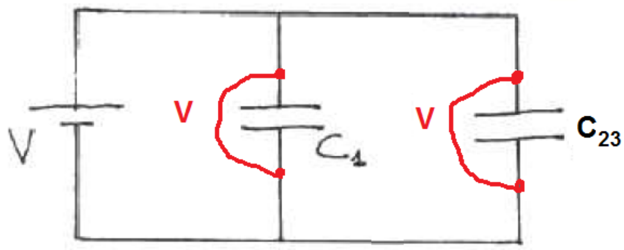

El ejercicio me pide calcular la carga en cada capacitor. Como dije que lo 'azul' de la clase teórica no lo vi, tengo que deducir cómo hacerlo a partir de ya saber lo 'rojo' que era cómo construir $C$ equivalente.

Mirando la figura del circuito equivalente, la carga la calculo así,

$$C = \frac{Q_T}{V} \longrightarrow Q_T = CV \tag{36}$$

donde $Q_T$ es la carga total retenida por los 3 capacitores, y $V$ es una forma 'ingenieril' de escribir $\Delta V$.

Tengamos en cuenta que en este esquema, todo lo dibujado es conductor, o sea que todo lo que se toca está al mismo potencial:




Se ve en el dibujo que ambos capacitores están a diferencia de potencial $V$. Llamo $Q_1$ y $Q_{23}$ a las cargas retenidas por cada capacitor. Entonces,

$$V = \frac{Q_T}{C}, \quad V = \frac{Q_1}{C_1}, \quad V = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \tag{37}$$

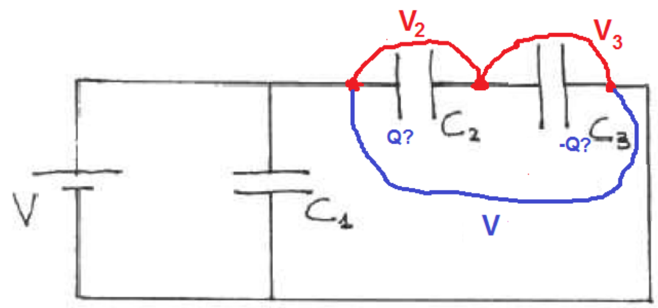
De acá ya obtengo la carga en el capacitor 1 a partir de los datos del problema: $Q_1 = VC_1$. La otra relación ($Q_{23} = VC_{23}$) por ahora no me dice nada porque son magnitudes para un capacitor ficticio equivalente.

Veo que pasa si sumo ambas cargas obtenidas:

$$Q_1 + Q_{23} = VC_1 + VC_{23} = V(C_1 + C_{23}) = \frac{Q_T}{C}C = Q_T \tag{38}$$

**O sea que la carga total de capacitores en paralelo es la suma de las cargas de cada uno.** Si ahora veo lo 'azul' de la parte de capacitores en paralelo, puedo ver que es efectivamente así.

Me falta calcular las cargas de los capacitores 2 y 3. Hago el siguiente dibujo:




En este dibujo veo claramente que $V = V_2 + V_3$. Donde se cumplen,

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}, \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3} \tag{39}$$

Ahora bien, esas $Q$ que dibuje en azul las hice porque si miro el dibujo, el capacitor $C_{23}$ cuya carga es $Q_{23}$, puede ser que tenga las mismas cargas que *cada capacitor por separado* $C_2$ y $C_3$. O sea, mi hipótesis es que $Q = Q_{23} = Q_2 = Q_3$.

Tengo una manera de comprobarlo. Uso la expresión que había obtenido antes para el capacitor ficticio 2-3.

$$Q_{23} = VC_{23} = (V_2 + V_3)\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} = \left(\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}\right)\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} = \frac{Q_2C_3 + Q_3C_2}{C_2C_3}\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} \tag{40}$$

$$Q_{23} = \frac{Q_2C_3 + Q_3C_2}{C_2 + C_3} \tag{41}$$

Si aplico mi hipótesis e igualo todas esas cargas a $Q$,

$$Q = Q\frac{C_2 + C_3}{C_2 + C_3} \longrightarrow 1 = 1 \tag{42}$$

Esto quiere decir que $Q_{23} = Q_2 = Q_3$. **O sea que conectados en serie, los capacitores retienen todos la misma carga.** Puedo volver a la parte 'azul' de la teórica y confirmarlo.

Queda entonces resolver el valor de $Q_2 = Q_3$ y expresarlo en función de los datos del problema:

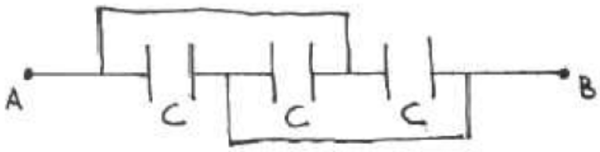
$$V = V_2 + V_3 = \left(\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}\right) = Q_2\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \longrightarrow Q_2 = Q_3 = \frac{V}{\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)} \tag{43}$$

**Al desconectar la batería, ¿se redistribuyen las cargas de los capacitores?**

**Comentario del ej. 15**

El truco para resolver estos circuitos es redibujarlos de una manera más 'visual', siempre respetando las uniones de los cables.

Por ejemplo, el a)




sigue siendo el mismo circuito si lo dibujo así: