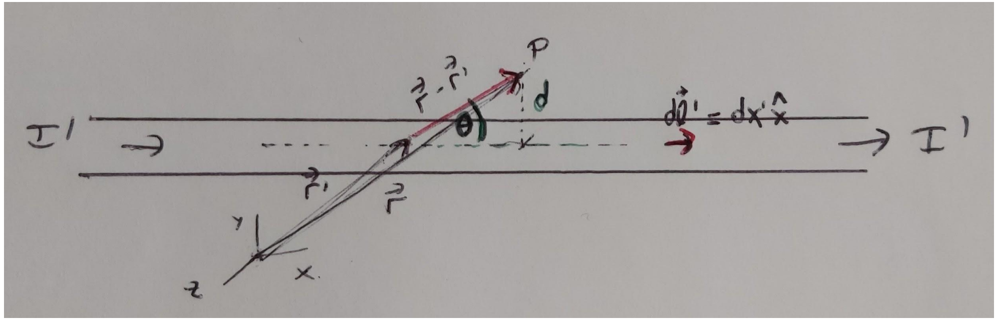
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 15

Campo magnético por integración directa

Supongamos un cable infinito con corriente I'. Calculemos el campo magnético en un punto genérico P a distancia d del cable.

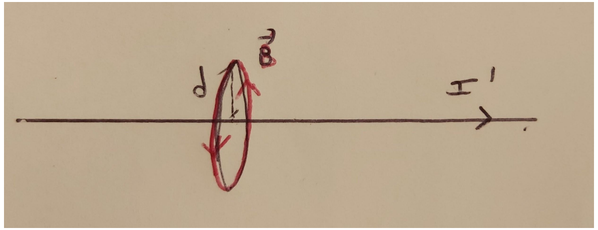


$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{C'} \kappa\, I'\, \overrightarrow{\mathbf{dl'}} \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl' |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'| \sin\theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl'\, d}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(d^2 + l'^2)^{3/2}} dl'\, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\xi = l'/d \quad , \quad d\xi = dl'/d$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\kappa I'}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\kappa I'}{d} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I'}{d} \hat{\mathbf{z}}$$

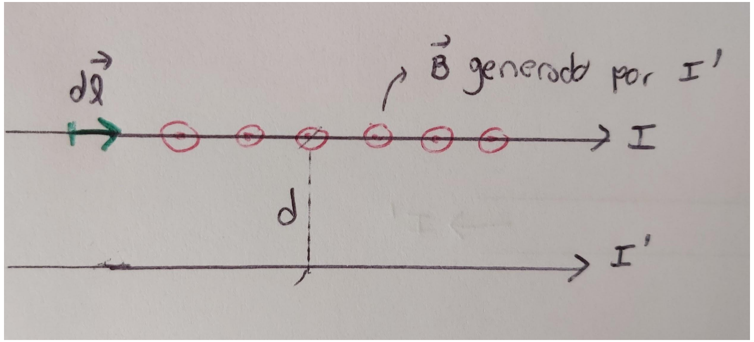
Por simetría vale lo mismo en cualquier punto P a lo largo del eje del cable y también alrededor del cable si estoy a la misma distancia d → queda un campo axial alrededor del cable



$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I'}{d}\hat{\varphi}$$

Notar que el campo decrece con la distancia al cable como 1/d

Supongamos tenemos dos cables paralelos, con corrientes $I\,,I'$



La fuerza que ejerce el campo de I' sobre el cable con I será

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \int_C I\,\overrightarrow{\mathbf{dl}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = -\int_C I\,\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I'}{d}dl\,\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,I'}{d}L\hat{\mathbf{y}}$$

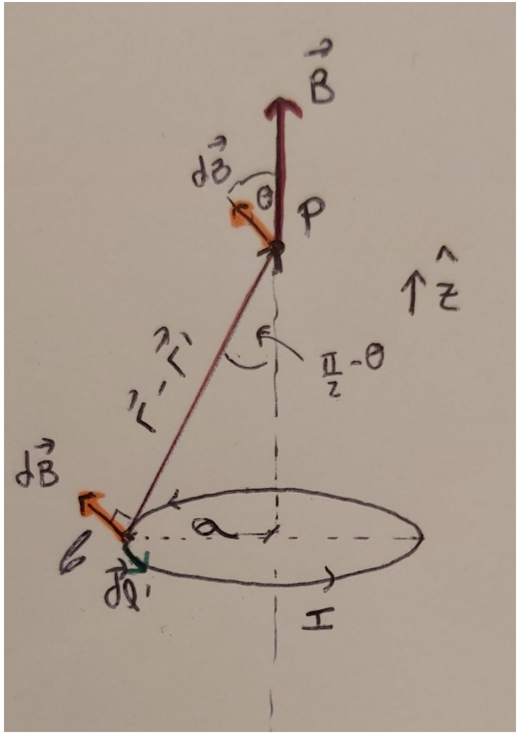
La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{F}}}{L} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,I'}{d}\hat{\mathbf{y}}$$

Esto nos da una fuerza atractiva para corrientes de igual signo y repulsiva para corr. de signo opuesto

<u>Espira</u>: conductor delgado cerrado por el que circula una corriente estacionaria I.

Vamos a calcular el campo magnético de una <u>espira circular</u>, en el eje de la espira.



$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_C \kappa\, I\, \overrightarrow{\mathbf{dl}'} \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} = \kappa\, I\, \hat{\mathbf{z}} \int_C \frac{dl' \ \cos\theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2} = \kappa\, I\, \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\, d\varphi$$

aquí usamos que las componentes perpendiculares al eje z se compensan y además que:

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2 = a^2 + z^2 \quad , \quad dl' = a\, d\varphi \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje} = \frac{2\pi\, \kappa\, I\, a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \qquad \vec{\mathbf{B}}_{eje}(z=0) = \vec{\mathbf{B}}_{max} = \frac{2\pi\, \kappa\, I}{a} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje}(z \gg a) = \frac{2\pi\, \kappa\, I\, a^2}{|z|^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\, \kappa\, I\, S}{|z|^3} \hat{\mathbf{z}} \ \ \text{con} \ \ S = \pi\, a^2$$

Si definimos la superficie (de la espira) orientada $\overrightarrow{\mathbf{S}} = \pi\, a^2\; \hat{\mathbf{z}}$ y llamamos

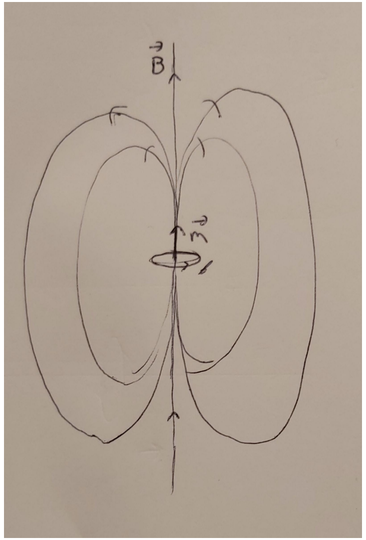
$\overrightarrow{\mathbf{m}} = I\; \overrightarrow{\mathbf{S}}$ al momento magnético de la espira,

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{B}}_{eje}(z \gg a) = \frac{2\,\kappa\, \overrightarrow{\mathbf{m}}}{|z|^3}$$

que es similar al campo de un dipolo eléctrico

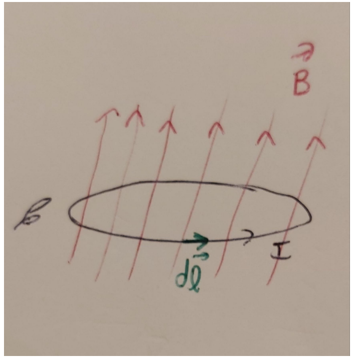
$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_{eje}(z) = \frac{2\,k\; \overrightarrow{\mathbf{p}}}{|z|^3}$$

si identificamos $k \to \kappa\;,\quad \overrightarrow{\mathbf{p}} \to \overrightarrow{\mathbf{m}}$



Idem al campo magnético terrestre o el de un imán

Fuerza y torque sobre una espira (en campo magnético uniforme o espira pequeña)



$$d\overrightarrow{\mathbf{F}} = I\,\overrightarrow{\mathbf{dl}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \oint_{\mathcal{C}} I\,\overrightarrow{\mathbf{dl}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = I\Big[\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{dl}}\Big] \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{ya que} \quad \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{dl}} = 0$$

$$d\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times d\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times (I\overrightarrow{\mathbf{dl}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}) = I\,[\,\overrightarrow{\mathbf{dl}}\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}) - \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}})\,]$$

$$\overrightarrow{\tau} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{r}} \times d\overrightarrow{\mathbf{F}} = I \oint_{\mathcal{C}} [\,\overrightarrow{\mathbf{dl}}\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}) - \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}})\,]$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{dl}}\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}) = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \overrightarrow{\mathbf{dS}} \times \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}) = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \overrightarrow{\mathbf{dS}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{B}}\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}}) = \overrightarrow{\mathbf{B}} \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}} = \overrightarrow{\mathbf{B}} \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{r}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0 \quad \text{ya que} \quad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{r}} = 0$$

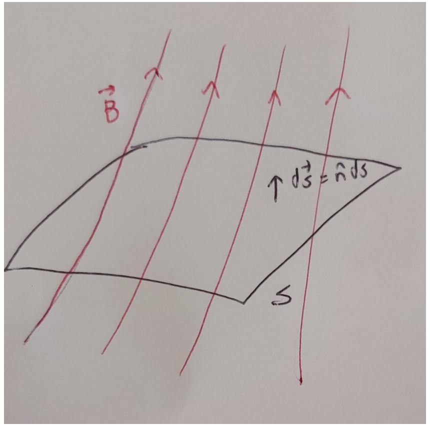
$\mathcal{S}(\mathcal{C})$ es una superficie apoyada en $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\tau} = I \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \overrightarrow{\mathbf{dS}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{m}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{m}} = I \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} \overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

El momento magnético de la espira

Propiedades del campo magnético



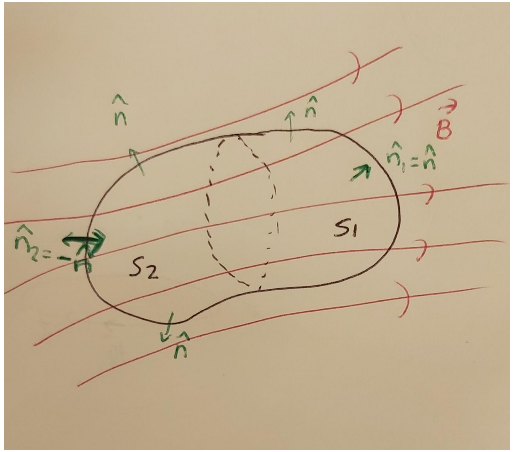
Definimos el flujo magnético a través de una superficie S

$$\Phi_B = \int_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

Propiedad (experimental): si la superficie S es cerrada, entonces el flujo es SIEMPRE cero

$$\Phi_B = \oint_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0$$

El equivalente de la Ley de Gauss para el campo magnético nos dice entonces que la "carga magnética encerrada (por S)" es siempre cero, o sea, NO HAY CARGAS MAGNETICAS AISLADAS $\rightarrow$ experimental

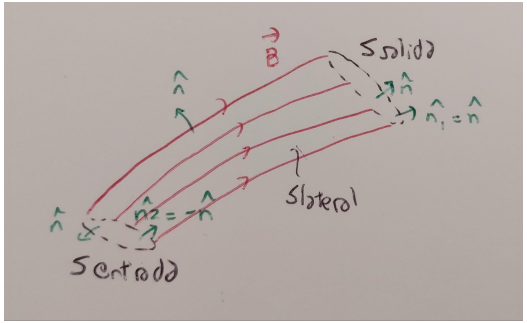


Si a una superficie cerrada S la dividimos en dos partes entonces podemos decir:

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \Phi_{saliente} - \Phi_{entrante}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{saliente} = \Phi_{entrante}$$

y se conserva el flujo magnético.



Dado un conjunto de líneas magnéticas podemos construir un tubo de flujo que conserva el flujo (saliente = entrante)

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{S_{sal}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{entr}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{lat}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_{sal}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \int_{S_{entr}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \Phi_{sal} - \Phi_{entr}$$

Por el teorema de la divergencia resulta:

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} \, d\mathcal{V} \quad , \forall \mathcal{V}(\mathcal{S}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0}$$

esto nos dice también que las líneas del campo magnético no salen ni confluyen a ningún punto (como sí ocurre con las líneas de campo eléctrico que salen o confluyen a las cargas, según su signo)
→ las líneas de campo magnético siempre son cerradas (o siguen indefinidamente).

Propiedad matemática: si un campo tiene divergencia cero entonces se puede obtener como el rotor de otro campo → es el caso del campo magnético:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$\vec{\mathbf{A}}$ se llama potencial vector y está definido a menos de un gradiente ya que si

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}' = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

(se llama *libertad de gauge*)

Para el caso magnetostático podemos obtener (por Biot-Savart) el potencial vector, que para una corriente estacionaria en un cable (espira) es:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\kappa\, I'\, \vec{\mathbf{dl}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

ya que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I'\, \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{\mathbf{dl}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\right] = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I' \left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\right)\right] \times \vec{\mathbf{dl}}' = \oint_{\mathcal{C}} \kappa\, I'\, \vec{\mathbf{dl}}' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})$$

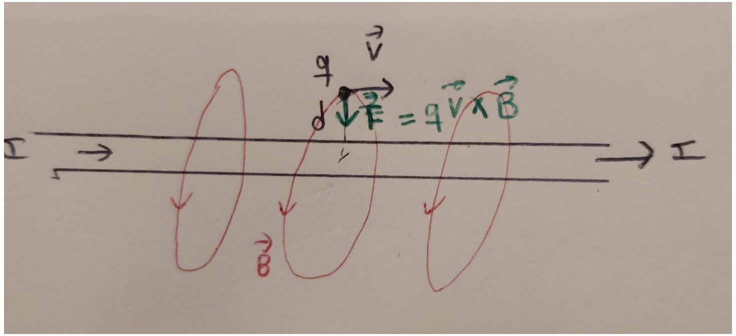
y con esto queda <u>demostrado</u> (para este caso) que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$

Si las corrientes están distribuidas en volumen, entonces vale:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\kappa\, \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}')\, d\mathcal{V}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \qquad \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}} \kappa\, \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}')\, d\mathcal{V}' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$$

Una cuestión en la que antes no nos detuvimos...

supongamos una carga q moviéndose con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ paralela a un cable a una distancia d, por el que circula una corriente I.



Como la corriente en el cable genera un campo magnético, sobre la carga en movimiento actúa la fuerza magnética de Lorentz, $\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$, que hace que la carga se desvíe y se acerque al cable.

Ahora, qué pasa si nos paramos en un sistema de referencia que se traslade con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$?

Allí la carga está quieta, entonces, la fuerza magnética sería 0, y la carga no se desviaría !

(recordemos que la corriente I no implica carga neta en el cable, por lo tanto, eso no produciría campo $\vec{\mathbf{E}}$)

O sea que la acción que ejerce el campo magnético, depende del sistema de referencia ?

La resolución de esta *paradoja del cable* requiere introducir *relatividad especial* : esta y otras inconsistencias fueron las que condujeron a Einstein a reformular las leyes de transformación entre sistemas de referencia inerciales y a formular la Teoría de la Relatividad Especial, bajo la firme convicción de que las leyes del electromagnetismo (Maxwell) eran válidas.

De hecho, el trabajo célebre de Einstein de 1905 donde formula su teoría se llamó

"Acerca de la electrodinámica de los cuerpos móviles".

Para la resolución de la paradoja del cable con relatividad especial consultar el Feynmann, Vol. II, Cap. 13