POTENCIAL VECTOR, MOMENTO MAGNÉTICO Y DESARROLLO MULTIPOLAR

Como la divergencia de un rotor es cero SIEMPRE, y vimos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, podemos decir entonces que $\vec{B}$ es un rotor.

Escribimos entonces: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ donde $\vec{A}$ es llamado potencial vector.

Se puede demostrar, bajo ciertas condiciones, que conocer el rotor y la divergencia de un vector, determina univocamente a ese vector (Teorema de Helmholtz - Griffiths 3ed, Apéndice B).

Esta elección de divergencia a gusto del usuario es análoga a sumarle una constante al potencial electrostático V, se llama libertad de Gauge, y será explorada en profundidad en otras materias de la carrera.

En los problemas de magnetostática conviene usar el Gauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, y es el que vamos a usar para resolver los ejercicios de esta guía.

Esta conveniente elección sale de la siguiente cuenta. Por ley de Ampere sabemos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{1}$$

Remplazando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ obtengo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \tag{2}$$

y finalmente, con el Gauge de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{3}$$

que son 3 ecuaciones de Poisson, para cada componente de $\vec{A}$ y $\vec{J}$, cuya solución general ya conozco, porque la usé para V infinidad de veces:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{4}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv' \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv' \tag{5}$$

La idea va a ser resolver problemas de magnetostática, con resultados y métodos ya vistos en electrostática. Habrá que hacer los cambios pertinentes (que los saco de ver la analogía de arriba). Por ejemplo:

$V \longrightarrow A_i$

$\rho \longrightarrow j_i$

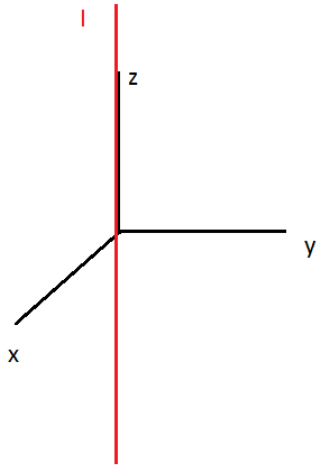
$\epsilon_0 \longrightarrow 1/\mu_0$

Problema 13a

13. Si se elige el gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, dada una distribución de corrientes es posible calcular $\vec{A}$ resolviendo tres problemas electrostáticos (porque?). Utilice este hecho para calcular el potencial vector y el campo magnético de las siguientes distribuciones :

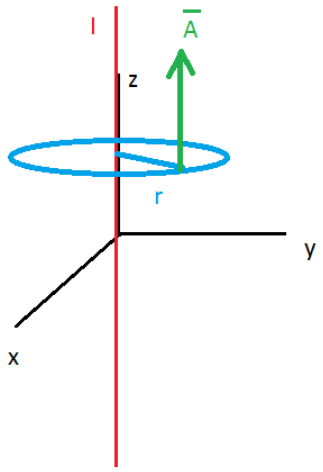
a) corriente I circulando por un alambre recto muy largo.

Elijo centrarlo en el eje z, y como es muy largo, no importa a que distancia del origen está cada extremo.



Analizo las simetrías del sistema, usando coordenadas cilíndricas. Como es muy largo puedo decir que tengo simetría de traslación en z, y como lo veo igual desde cualquier ángulo ϕ, tengo simetría de revolución alrededor de z. Entonces el potencial vector va a depender solo de r: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(r)$

Si analizo la expresión integral que obtuve para $\vec{A}$, veo que en realidad tengo 3 expresiones, una para cada componente. Como la corriente está solo en z, me sobrevive únicamente la componente A_z.



La integral queda,

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{6}$$

Haciendo esta analogía con electrostática, se puede ver claramente como es el mismo problema que para un cable cargado con densidad de carga lineal uniforme λ,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{7}$$

para el cual no necesito integrar, pues ya conozco la expresión,

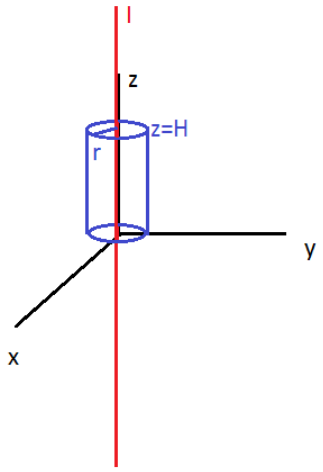
$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln(r) \tag{8}$$

.

Haciendo las transformaciones que mostré antes hacia el magnetismo, reemplazo y queda:

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} ln(r) \tag{9}$$

Ahora bien, no hicimos ninguna cuenta. Solo usamos una analogía entre electro y magnetismo que cumplen la misma ecuación (Poisson). Pero podríamos hacer más cuentas a lo electrostática explotando esto.



Lo que hice en la figura anterior, fue encerrar el cable dentro de un cilindro de Gauss, y voy a aplicar Gauss.

Si mi nuevo V, es A_z, quién sería la nueva versión de $\vec{E}$?

No se si se puede dar un nombre a este nuevo campo o atribuirle una propiedad física, pero así como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, mi nuevo $\vec{E}$ va a ser $-\vec{\nabla}A_z$.

¿Y estaría mal decir que en vez de la carga encerrada, tengo la corriente encerrada?

Los cambios que hago entonces son:

$Q_{enc}/\epsilon_0 \longrightarrow \mu_0 i_{enc}$

$E = -\vec{\nabla}V \longrightarrow -\vec{\nabla}A_z$

Entonces,

$$\oint -\vec{\nabla}A_z \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_{enc} \tag{10}$$

Como A_z, se comporta igual que V, puedo arriesgarme y asumir que $-n\vec{a}blaA_z$, se va a comportar igual que $-\vec{\nabla}V = \vec{E}$, donde en el problema análogo (el hilo muy largo cargado), el flujo de $\vec{E}$ se da únicamente a través de la superficie lateral del cilindro gaussiano. Entonces,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^H -\vec{\nabla}A_z \cdot \hat{r}rd\phi dz = \mu_0 IH \tag{11}$$

donde simplemente cancelé el flujo a través de las tapas, y reemplacé el diferencial de la superficie lateral por su forma en cilíndricas. Además, reemplacé la corriente encerrada por IH.

Queda ver que es $-\vec{\nabla}A_z$. Ya habíamos establecido que por las simetrías del problema, A_z solo podía depender de r. Entonces,

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{r} \cdot \hat{r}r2\pi H = \mu_0 IH \tag{12}$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{13}$$

Integrando, llego al mismo resultado de antes.

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} ln(r) \tag{14}$$

Como las demás componentes de $\vec{A}$ eran 0, lo expreso en forma vectorial muy fácilmente,

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} ln(r)\hat{z} \tag{15}$$

Para ver que todo esto esté bien, debería volver al magnetismo de verdad, o sea, hallar $\vec{B}$, donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{\nabla} \times ln(r)\hat{z} \tag{16}$$

Con el pasar de los años (de las horas sentado practicando), calcular un rotor se vuelve más o menos intuitivo: Lo mejor es sentarse a hacer la cuenta aunque sea engorrosa, para ir adquiriendo esa intuición. Escribo la forma del rotor en coordenadas cilíndricas y calculo,

$$\vec{\nabla} \times ln(r)\hat{z} = \frac{1}{r} det \begin{pmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ln(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} ln(r)\hat{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} ln(r)\right) r\hat{\phi} = -\frac{1}{r}\hat{\phi} \tag{17}$$

Finalmente, reemplazando en (16),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{18}$$

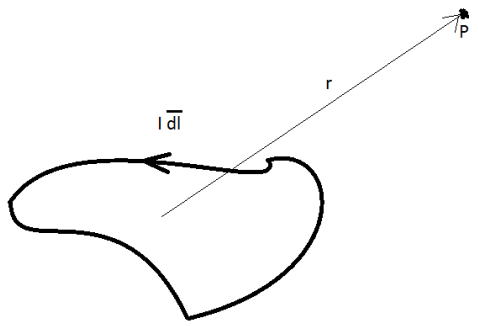
que es el resultado para un cable infinito (o muy largo) con corriente I, usando la ley de Ampere.

Expansón multipolar de $\vec{A}$

Al igual que para V, podemos ver como nos queda $\vec{A}$ visto desde muy lejos, haciendo un resarrollo de Taylor del factor $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ en suma de potencias de $\frac{1}{|\vec{r}|}$. Esto lo puedo hacer ya que $|\vec{r}| >> |\vec{r'}|$ para todo r' de la distribución de corrientes que tenga.

Cuando estoy muy lejos de una distribución de corrientes, siempre la voy a ver como un circuito cerrado. No puede circular corriente por un cable sin cerrar el circuito. Esto lo idealizamos mediante la noción de *espiras*. Una espira es una curva cerrada por la que circula corriente en un sentido determinado.

Entonces cuando haga un desarrollo multipolar para $\vec{A}$, la distribución de corrientes se va a ver como una espira, desde un punto lejano P



Tengo que hacer el desarrollo de Taylor mencionado, para

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' \vec{dl}'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{19}$$

$$\vec{A}_{lejos} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \oint_C \vec{dl}' + \frac{1}{r^2} \oint_C (\hat{r} \cdot \vec{r'}) \vec{dl}' + ... \right) \tag{20}$$

El primer término desaparece ya que es la integral de un camino cerrado. Como es el primer término, se lo llama monopolar. Que sea cero es consistente con $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$.

El segundo término se puede expresar usando,

$$\oint_C (\hat{r} \cdot \vec{r'}) \vec{dl}' = -\hat{r} \times \int_S \vec{dS}' \tag{21}$$

como

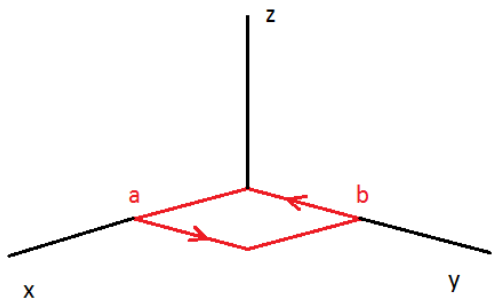
$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \tag{22}$$

donde

$$\vec{m} = I \int_S \vec{dS} \tag{23}$$

Problema 13b

b) espira rectangular de lados a y b (en este caso calcule el potencial y el campo lejos de la espira).



Comienzo por calcular el momento dipolar $\vec{m}$,

$$\vec{m} = I\int_S d\vec{S} = Iab\hat{z} = Iab[cos(\theta)\hat{r} - sin(\theta)\hat{\theta}] \tag{24}$$

Reemplazo en la expresión para $\vec{A}_{dip}$,

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi}\frac{cos(\theta)\hat{r} - sin(\theta)\hat{\theta}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi}\frac{sin(\theta)}{r^2}\hat{\phi} \tag{25}$$

Finalmente, calculo $\vec{B}$,

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi}\vec{\nabla}\times\frac{sin(\theta)}{r^2}\hat{\phi} = \frac{1}{r^2 sin(\theta)}\begin{pmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & rsin(\theta)\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & 0 & rsin(\theta)\frac{sin(\theta)}{r^2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi r^3}(2cos(\theta)\hat{r} + sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{27}$$