Física 3: Electricidad y Magnetismo

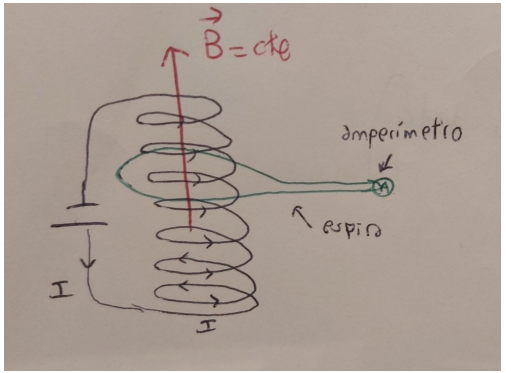
Pablo Dmitruk

Clase 19

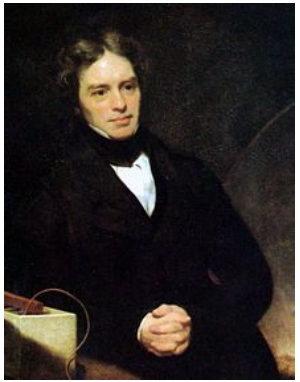
Inducción electromagnética : Ley de Faraday

Oersted (1821) descubrió que una corriente eléctrica produce un campo magnético

→ *Faraday se preguntó será cierto lo inverso* ? → Experimentos (1831):

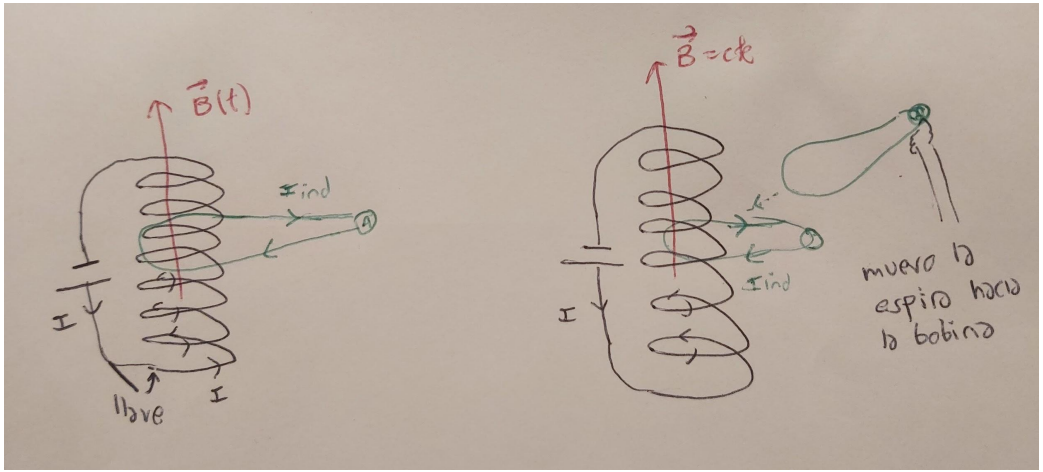


→ Espira (fija) en campo B uniforme: no veo nada



Michael Faraday

Campo B variable en el tiempo → aparece corriente en la espira !

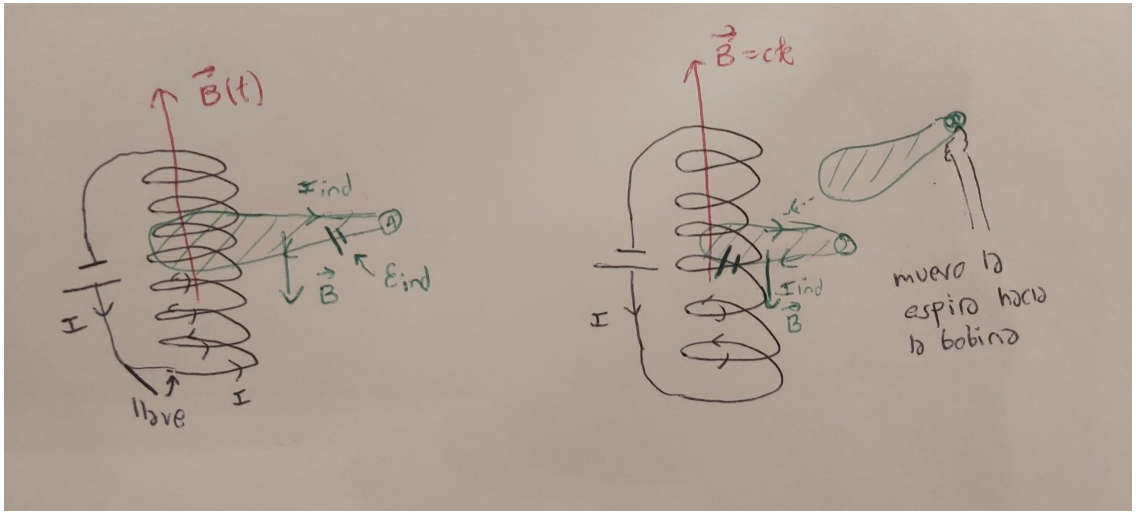


Muevo la espira hacia el campo B (uniforme) → aparece corriente en la espira !

Al variar el flujo de campo magnético a través de la espira se induce una corriente en la espira
→ aparece una f.e.m. inducida

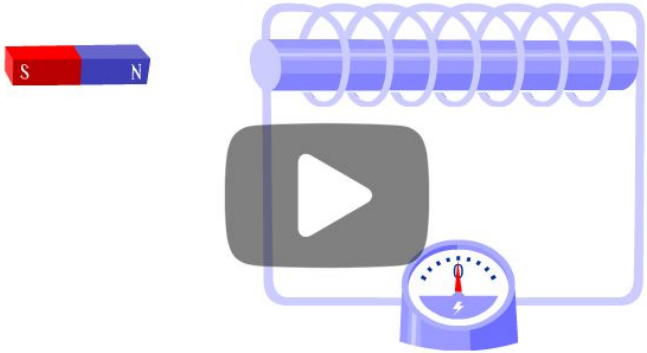
$$\varepsilon_{ind} \propto \frac{d\phi_B}{dt}$$

Ley de Lenz: el signo de la f.e.m. inducida es tal que genere una corriente cuyo campo magnético produce un flujo que se opone al cambio de flujo que indujo la f.e.m.

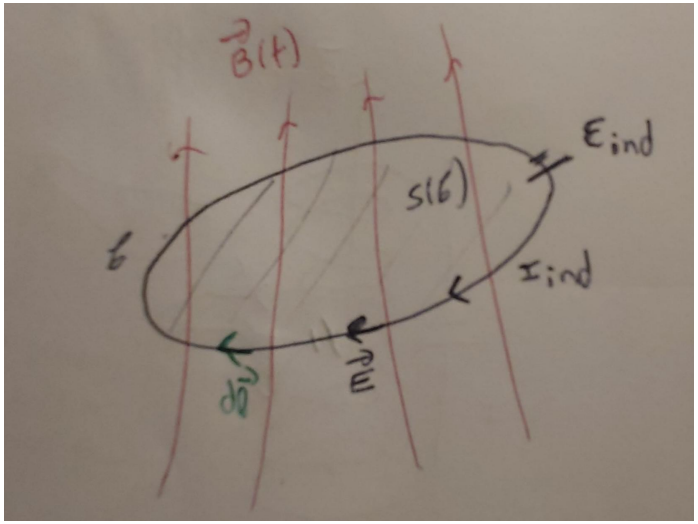


De no ser asi, el flujo se incrementaría indefinidamente, con ello la corriente también y se violaría la conservación de la energía

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}}$$


S
N

Al generarse una corriente eléctrica en la espira hay un campo eléctrico tal que



$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$$

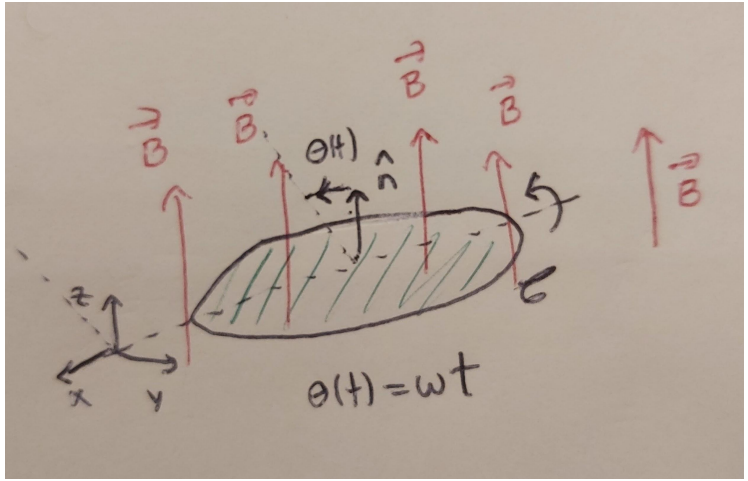
Por Stokes, $$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}}$$

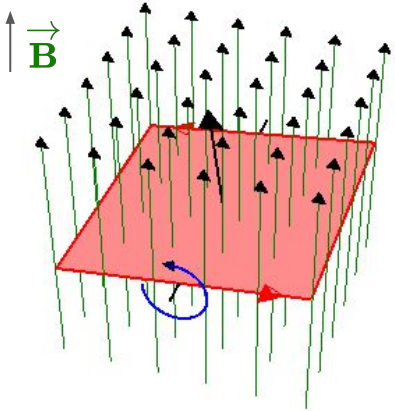
$$\int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = -\int_{S(C)} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{dS}} \quad \forall\ S(C)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

el campo eléctrico deja de ser conservativo como lo era en electrostática (aunque podemos siempre separarlo en una parte conservativa y otra no)

Supongamos una espira que rota sobre un eje, con velocidad angular de rotación constante, en presencia de un campo magnético uniforme y constante.





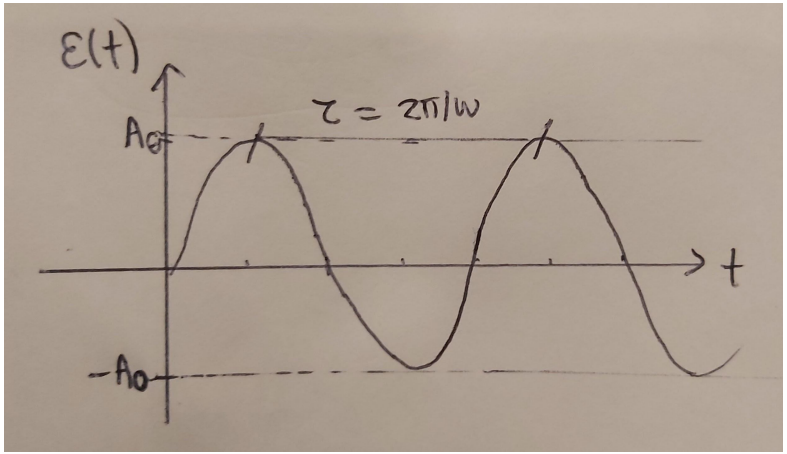
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} B\, \cos(\omega t)\, dS = -\frac{d}{dt}\, B\, \cos(\omega t)\, S = \omega\, B\, S\, \sin(\omega t)$$

Si hay N espiras arrolladas (bobinado) el flujo magnético se multiplica por N y entonces

$$\varepsilon_{ind}(t) = \omega\, B\, N\, S\, \sin(\omega t) = A_0\, \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad A_0 = \omega\, B\, N\, S$$

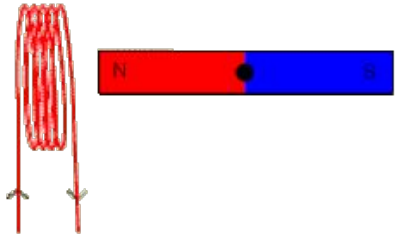
Obtuvimos una f.e.m. (inducida) sinusoidal,

$$\varepsilon(t) = A_0 \ \sin(\omega t)$$



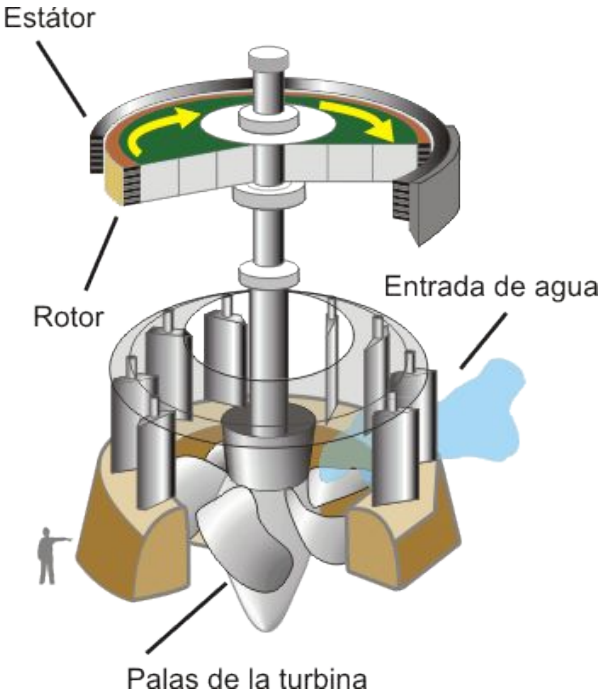
Esto sirve como *generador de voltaje (y corriente) alterna*.

Si la espira tiene una resistencia R, disipará la corriente generada. Podemos pensar esto como un sistema que convierte energía mecánica (al girar la espira) en energía eléctrica y finalmente en disipación, lo que podría servir para encender una lamparita o hacer funcionar algún artefacto eléctrico → *generador eléctrico*



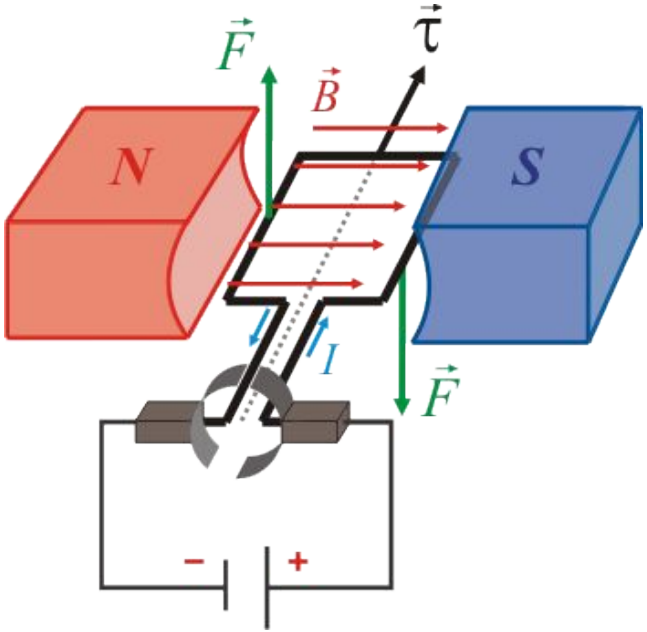
aquí la espira está fija y el campo B es variable

dínamo de botella (bicicletas)



→ central hidroeléctrica:
estator = espira, rotor = imán (conectado al eje turbina)

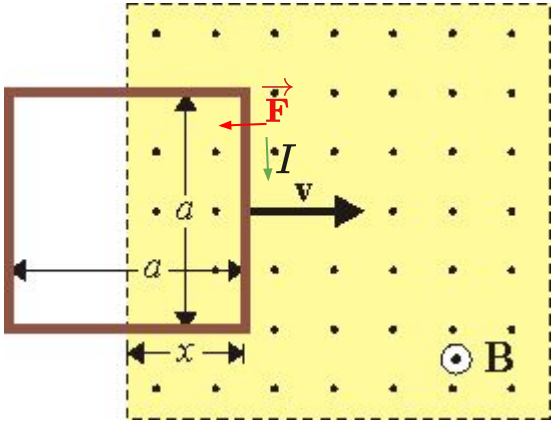
El proceso inverso por el cual *con una corriente eléctrica generamos movimiento* (energía mecánica) constituye un motor eléctrico → Tesla !



haciendo pasar corriente por una espira en presencia de un campo magnético consigo un torque

Frenado magnético de una espira

Supongamos una espira rectangular que entra con una dada velocidad a una región de campo magnético uniforme y perpendicular al plano de la espira



En la espira, al variar el flujo magnético a través de ella aparece una f.e.m. inducida,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = -\frac{d}{dt}\Big(B_0\ a\ x\Big) = -B_0\ a\ \frac{dx}{dt} = -B_0\ a\ v$$

Si la espira tiene resistencia R, la corriente será:

$$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = -\frac{B_0\ a\ v}{R}$$

(esta corriente genera un campo magnético en sentido opuesto al original, de acuerdo a la ley de Lenz)

Con esta corriente la espira siente una *fuerza de frenado*

$$\vec{\mathbf{F}} = \oint_C I\ \vec{\mathbf{dl}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\frac{B_0\ a\ v}{R} a\ B_0\ \hat{\mathbf{x}} = -\frac{B_0^2 a^2 v}{R}\ \hat{\mathbf{x}} = -\frac{B_0^2 a^2}{R}\ \vec{\mathbf{v}}$$

que actúa como una fuerza viscosa (proporcional a la velocidad)

Inductancia, auto-inductancia

Supongamos un grupo de N espiras C_k con I_k la corriente en la espira k y $\vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}})$ el campo generado por la espira k, con k=1,...,N

Consideremos una espira j de ese grupo de espiras. El flujo del campo magnético de la espira k a través de la superficie en la espira j es:

$$\phi_{jk} = \int_{S(C_j)} \vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}_k = \kappa\, I_k\, \vec{\nabla} \times \oint_{C_k} \frac{\overrightarrow{\mathbf{dl}}_k}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_k|}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{jk} = \kappa\, I_k \int_{S(C_j)} \overrightarrow{\mathbf{dS}} \cdot \vec{\nabla} \times \oint_{C_k} \frac{\overrightarrow{\mathbf{dl}}_k}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_k|} = \kappa\, I_k \oint_{C_j} \overrightarrow{\mathbf{dl}}_j \cdot \oint_{C_k} \frac{\overrightarrow{\mathbf{dl}}_k}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_k|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi_{jk}}{I_k} = \kappa \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{\overrightarrow{\mathbf{dl}}_j \cdot \overrightarrow{\mathbf{dl}}_k}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_k|} = M_{jk}$$

coeficiente geométrico que se llama *inductancia mutua*

$$M_{jk} = M_{kj}$$

La corriente en la espira j también genera un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_j(\vec{\mathbf{r}})$ que produce un flujo sobre la superficie de la propia espira j.

$$\phi_{jj} = \int_{S(C_j)} \vec{\mathbf{B}}_j(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \kappa\, I_j \int_{S(C_j)} \vec{\mathbf{dS}} \cdot \oint_{C_j} \frac{\vec{\mathbf{dl}}_j \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_j)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_j|^3} = M_{jj} I_j$$

$$M_{jj} = \frac{\phi_{jj}}{I_j} = L_j$$

se llama la *autoinductancia* y es también un coeficiente geométrico

Unidades: $[L] = \frac{[\phi]}{[I]} = \frac{T\, m^2}{A} = H \ \ (\text{Henry})$

El flujo total en la espira j, debido a los campos de todas las espiras es:

$$\phi_j = \sum_{k=1}^{N} \phi_{jk} = \sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_k$$

que nos da una <u>relación lineal</u> entre los <u>flujos</u> de cada espira y las <u>corrientes</u> de todas las espiras (similar a lo que ocurría con un grupo de conductores entre los voltajes y las cargas totales en c/u)

Supongamos ahora variamos el flujo por efecto de variar las corrientes en las espiras, pero sin que las espiras se deformen o se muevan (es decir, dejamos la geometría fija).

$$\Rightarrow \qquad \varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} M_{jk} \frac{dI_k}{dt}$$

En particular, para una sola espira,

$$\varepsilon_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

expresión que vamos a aplicar en circuitos cuando haya alguna *inductancia*

Inductancia de un solenoide

Supongamos un solenoide de N vueltas, altura h y superficie S $\rightarrow$ $B = \dfrac{\mu_0 N I}{h}$

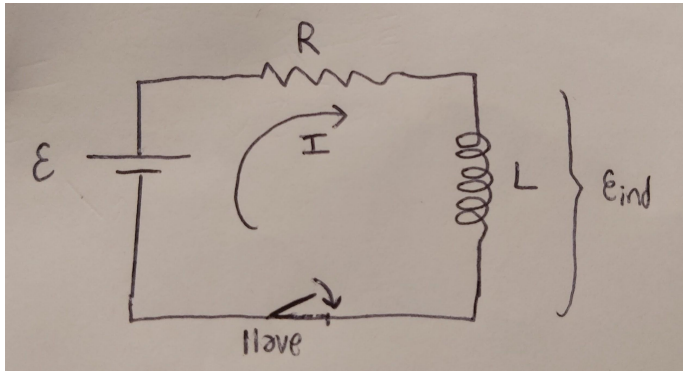
El flujo por cada espira del solenoide es: $\phi_i = B\,S = \dfrac{\mu_0 N I}{h} S$

y como el solenoide se compone de N espiras, el flujo total es: $\phi = N\,\phi_i = \dfrac{\mu_0 N^2 I}{h} S$

de aquí podemos despejar la inductancia (autoinductancia), $L = \dfrac{\phi}{I} = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{h}$

que vemos que depende sólo de la geometría

Inductancia en un circuito



Vimos que en la inductancia aparece una f.e.m.

$$\varepsilon_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

Recorriendo el circuito (en sentido horario) entonces:

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind} = IR \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon - L\frac{dI}{dt} = IR$$

$\varepsilon = L\dfrac{dI}{dt} + IR$ nos queda una ecuación diferencial para I

Si calculamos la potencia entregada por la pila, $P = I\varepsilon = LI\dfrac{dI}{dt} + I^2R = \dfrac{L}{2}\dfrac{dI^2}{dt} + I^2R$

y si integramos entre 0 y t obtenemos, $U = \displaystyle\int_0^t P\,dt = \frac{L\,I^2}{2} + \int_0^t I^2R\,dt$

es decir que la energía entregada se va parte en forma de disipación y parte se acumula en la inductancia

Podemos interpretar entonces la energía magnética almacenada en la inductancia como

$$U = \frac{L\,I^2}{2}$$

En general *para un sistema de espiras*, con coeficientes de inducción M_{jk} la <u>energía magnética almacenada</u> es

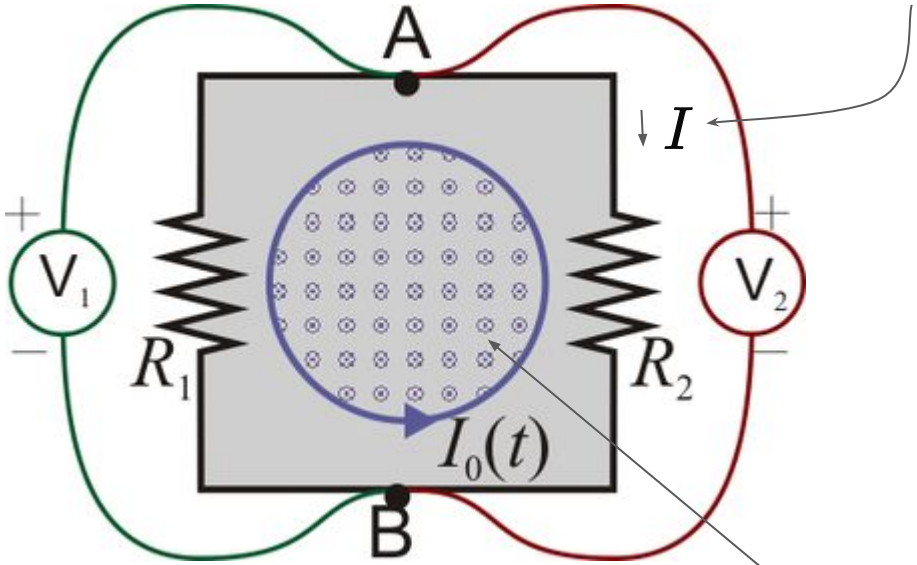
$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_j I_k$$

Ojo cuando tratamos con circuitos influenciados por espiras o solenoides externos con corrientes variables...

<u>circuito alrededor de un solenoide</u>

corriente inducida por el flujo variable

Si la corriente por el solenoide es variable las lecturas de los dos voltímetros son distintas !



$$\oint_{circuito} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = -\frac{d\phi}{dt} \neq 0$$

$$\oint_{circuito} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \int_A^B (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}})_{R_2} + \int_B^A (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}})_{R_1} = I\,R_2 + I\,R_1 = V_2 - V_1 \neq 0$$

solenoide interior
(con flujo variable)