Física 3: Electricidad y Magnetismo

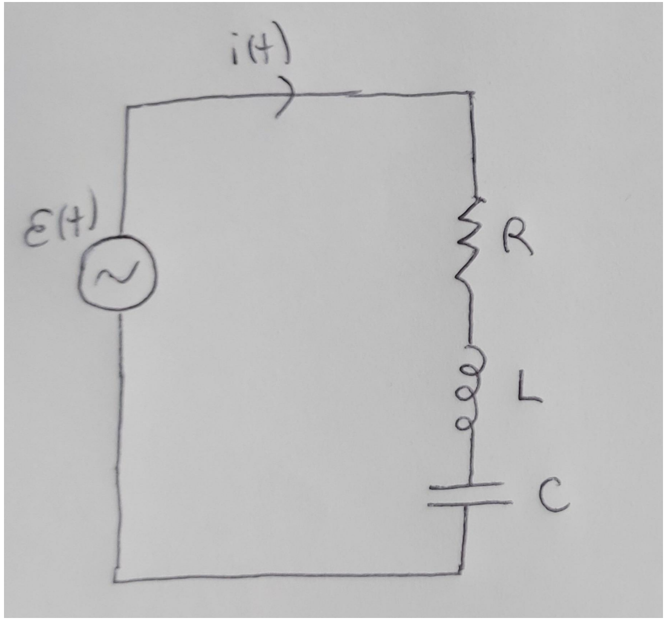
Pablo Dmitruk

Clase 21

Corriente alterna

Consideremos el circuito RLC nuevamente, pero cambiamos la batería por una fuente de voltaje alterno

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \ \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon)$$



Tenemos
$$\varepsilon(t) = R\, i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = R\,\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q$$

Nuevamente hacemos $q = q_h + q_p$

Pero ahora no podemos encontrar una $q_p = cte$ como hicimos antes, ya que la f.e.m. en la ecuación diferencial varía en el tiempo → *vamos a proponer una solución particular $q_p(t)$ que varíe en el tiempo sinusoidalmente y con la misma frecuencia ω que la f.e.m. forzante.*

La solución del homogéneo nos va a dar la parte transitoria que es lo que ya vimos antes, y ahora no nos interesa obtener → lo que buscamos es la solución a tiempos mayores, que ya no va a ser constante.

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \underset{t \gg \tau}{\rightarrow} q_p(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_q)$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Vamos a trabajar con funciones complejas

$$\varepsilon(t) = Re\{\varepsilon_0\ e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}\} = Re\{\varepsilon\ e^{j\omega t}\} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\ e^{j\varphi_\varepsilon} \in \mathbb{C} \qquad j^2 = -1 \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

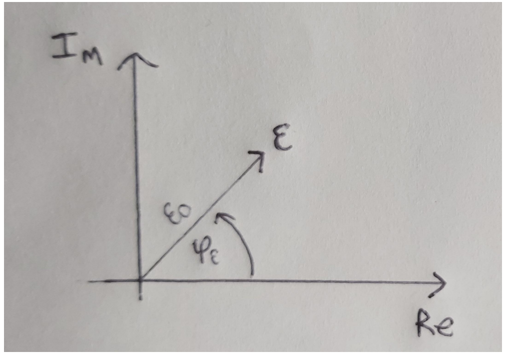
$\varepsilon(t)$ = valor instantáneo f.e.m.

$\varepsilon = \varepsilon_0\ e^{j\varphi_\varepsilon}$ = amplitud compleja de la f.e.m. → número complejo

$\varepsilon_0 = |\varepsilon|$ = amplitud real o valor pico de la f.e.m. → número real

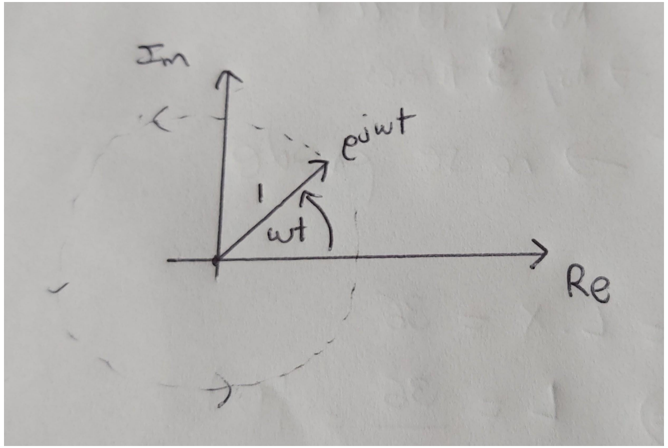
$\varphi_\varepsilon = arg(\varepsilon)$ = fase inicial de la f.e.m.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} = \varepsilon_0(\cos\varphi_\varepsilon + j\sin\varphi_\varepsilon)$$



Multiplicando por $e^{j\omega t} \rightarrow \quad \varepsilon\ e^{j\omega t} = \varepsilon_0\ e^{j\varphi_\varepsilon}\ e^{j\omega t} = \varepsilon_0\ e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}$

obtenemos la *f.e.m. compleja*



El factor complejo $e^{j\omega t}$ se llama *fasor*, es un número complejo que va rotando en el tiempo, con frecuencia ω y amplitud unitaria y le da el carácter temporal a una variable compleja.

$$|e^{j\omega t}| = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Las funciones de respuesta, es decir, la carga y la corriente las vamos a tratar también como funciones complejas (de la misma frecuencia temporal) y entonces hacemos:

$$q(t) = Re\{q_0\ e^{j(\omega t+\varphi_q)}\} = Re\{Q\ e^{j\omega t}\} \qquad Q = q_0\ e^{j\varphi_q} \in \mathbb{C}$$

$$i(t) = Re\{i_0\ e^{j(\omega t+\varphi_i)}\} = Re\{I\ e^{j\omega t}\} \qquad I = i_0\ e^{j\varphi_i} \in \mathbb{C}$$

que además están relacionadas ya que $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I = j\omega\, Q$

Volvamos a la ecuación diferencial,

$$\varepsilon(t) = R\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

que podemos poner también en términos de la corriente, derivando en el tiempo,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = R\,\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

Si reemplazamos con las funciones complejas,

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\;e^{j\varphi_\varepsilon}\;e^{j\omega t} = R\,j\,\omega\,i_0\;e^{j\varphi_i}\;e^{j\omega t} + L\,j^2\;\omega^2\;i_0\;e^{j\varphi_i}\;e^{j\omega t} + \frac{1}{C}\;i_0\;e^{j\varphi_i}\;e^{j\omega t}$$

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\;e^{j\varphi_\varepsilon} = R\,j\,\omega\,i_0\;e^{j\varphi_i} + L\,j^2\omega^2\;i_0\;e^{j\varphi_i} + \frac{1}{C}\;i_0\;e^{j\varphi_i}$$

→ eliminamos el tiempo y quedó una ecuación algebraica

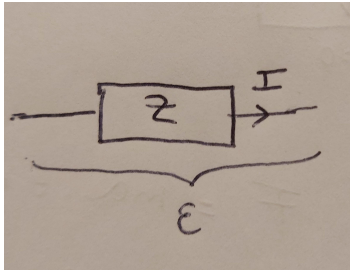
$$j\,\omega\,\varepsilon = R\,j\,\omega\,I + L\,j^2\omega^2\;I + \frac{1}{C}\;I$$

$$\varepsilon = R\,I + j\omega L\,I + \frac{1}{j\omega C}\;I = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I = Z\,I$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

es la impedancia del circuito RLC

La ecuación $\varepsilon = Z\, I$ se puede ver como una *ley de Ohm en amplitudes complejas*.



En el circuito RLC se tiene $Z = R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}$ que podemos pensarlo como las impedancias en *serie* de una resistencia, una inductancia y un capacitor,

$$Z_R = R \;\;,\;\; Z_L = j\omega L \;\;,\;\; Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

En general, $Z = |Z|\, e^{j\varphi_Z} \in \mathbb{C}$

$$Z_R = R = R\, e^{j\,0} \;\;\rightarrow\;\; |Z_R| = R \;,\;\; \varphi_{Z_R} = 0$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L\, e^{j\,\pi/2} \;\;\rightarrow\;\; |Z_L| = \omega L \;,\;\; \varphi_{Z_L} = \pi/2$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\,\pi/2} \;\;\rightarrow\;\; |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \;,\;\; \varphi_{Z_C} = -\pi/2$$

En cada impedancia podemos asociar una tensión compleja, según la ley de Ohm $\varepsilon = Z\,I$

$$\varepsilon_R = Z_R\,I \qquad \varepsilon_L = Z_L\,I \qquad \varepsilon_C = Z_C\,I$$

Las impedancias introducen un *desfasaje* entre tensión y corriente:

Para una resistencia: $i_0\,e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_R} = \dfrac{\varepsilon_0}{R}\,e^{j\varphi_\varepsilon} \quad \rightarrow \quad i_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{R} \;,\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon$ no hay desfasaje

Para una inductancia: $i_0\,e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_L} = \dfrac{\varepsilon_0\,e^{j\varphi_\varepsilon}}{\omega L\,e^{j\pi/2}} \quad \rightarrow \quad i_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\omega L} \;,\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon - \dfrac{\pi}{2}$

Para un capacitor: $i_0\,e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_C} = \varepsilon_0\,e^{j\varphi_\varepsilon}\,\omega C\,e^{j\pi/2} \quad \rightarrow \quad i_0 = \varepsilon_0\,\omega C \;,\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon + \dfrac{\pi}{2}$

La *inductancia y el capacitor desfasan la corriente respecto a la tensión (f.e.m.)* en $\pi/2$

Notar que en general además (salvo para la resistencia) la impedancia depende de la frecuencia $Z = Z(\omega)$

siendo el módulo (y por lo tanto la amplitud real de la corriente resultante) controlado por la frecuencia.

Para una inductancia, $|Z_L| = \omega L$, entonces la impedancia aumenta con la frecuencia → deja pasar menos corriente si aumenta la frecuencia → tiene sentido por Faraday !

Para un capacitor, $|Z_C| = \dfrac{1}{\omega C}$, y la impedancia aumenta cuando la frecuencia es chica → deja pasar

menos corriente al disminuir la frecuencia → capacitor se cargó completamente

En general decimos $\underbrace{Z(\omega) = R(\omega)}_{\text{resistencia}} + j\, \underbrace{X(\omega)}_{\text{reactancia}}$

$Y(\omega) = \dfrac{1}{Z(\omega)}$ se llama la admitancia

$Y(\omega) = \overbrace{G(\omega)}^{\text{conductancia}} + j\, \overbrace{B(\omega)}^{\text{susceptancia}}$

Los circuitos de corriente alterna se resuelven *aplicando las leyes de Kirchoff pero para las tensiones y corrientes complejas*, donde los elementos son las impedancias (juegan el rol de las resistencias).

Impedancia serie $$Z_{\sum} = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$

Impedancia paralelo $$Z_{\|}^{-1} = \sum_{k=1}^{N} Z_k^{-1}$$

y empleamos Kirchoff $$\sum_k I_k = 0 \qquad \rightarrow \text{nodos}$$

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_k I_k \; Z_k \qquad \rightarrow \text{tensiones}$$

una vez que resolvemos el sistema algebraico y obtenemos las corrientes complejas, si queremos las corrientes reales, multiplicamos por $e^{j\omega t}$ y tomamos la parte real.