

# Física 3-Guía 1

Cátedra Dmitruk

Clase 3

Andrea Buccino

# Ticket de entrada

¿Qué tipo de magnitud es el campo eléctrico? Explique.

¿Cualquier distribución de carga puede ser fuente de un campo eléctrico?

¿Qué relación hay entre la fuerza y el campo eléctrico?

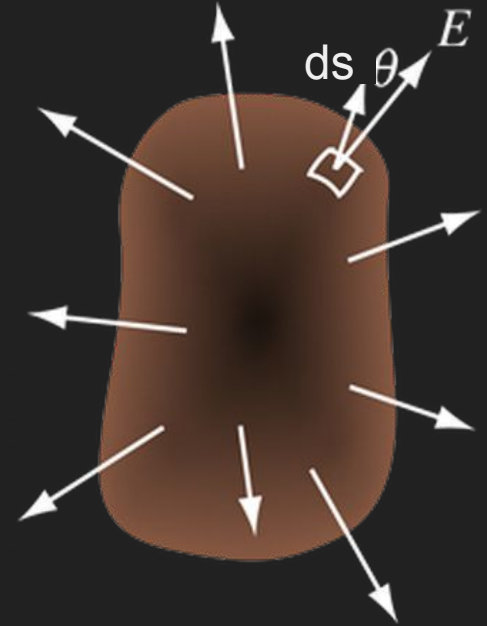
¿Cuáles son los primeros pasos a seguir cuando calcula un campo eléctrico?



# Ley de Gauss

La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga que encierra, a través de la expresión:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$



# Ley de Gauss-Aplicación

Si bien la ley de Gauss es una ley que relaciona el FLUJO del campo eléctrico con la carga, en algunos casos de alta simetría nos permitirá calcular el módulo del campo eléctrico.

Esto podrá hacerse si podemos elegir una superficie cerrada que sea sencilla de parametrizar y donde esa superficie cumpla con:

1. La componente del campo eléctrico sea normal a la superficie.
2. El módulo del campo eléctrico sea constante sobre la superficie.

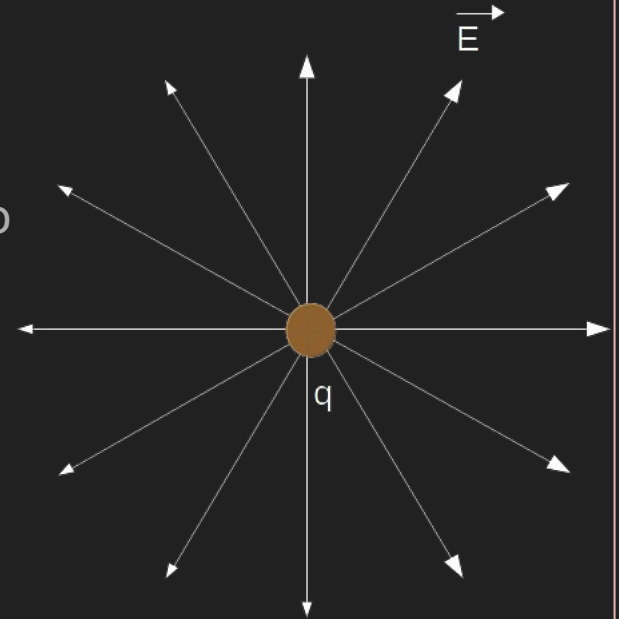
# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

Supongamos una carga puntual en el origen.

Sabemos que este campo tiene simetría

esférica. Por lo tanto, un casquete esférico concéntrico

es la superficie de Gauss indicada.



# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

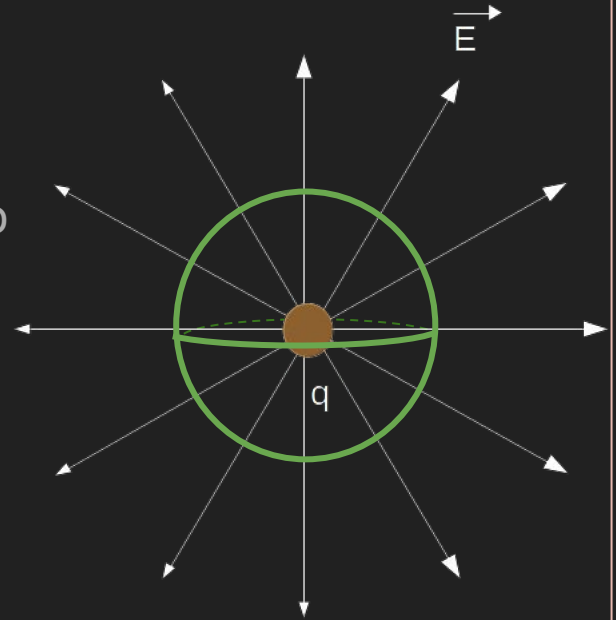
Supongamos una carga puntual en el origen.

Sabemos que este campo tiene simetría

esférica. Por lo tanto, un casquete esférico concéntrico

es la superficie de Gauss indicada.

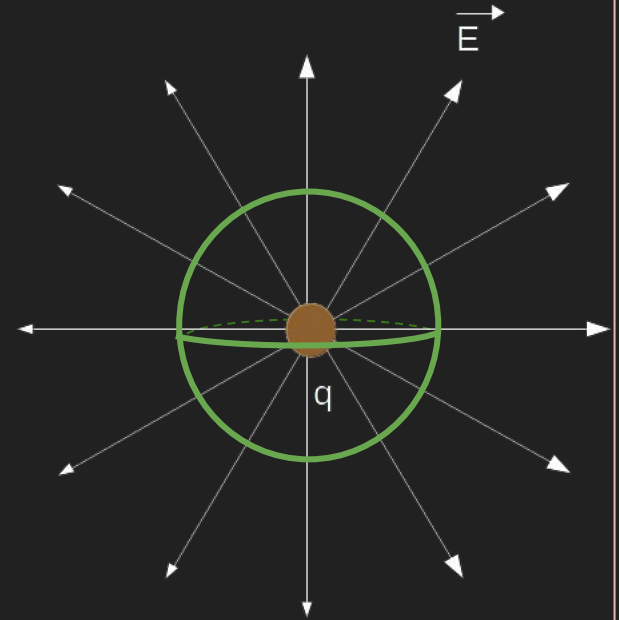
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$



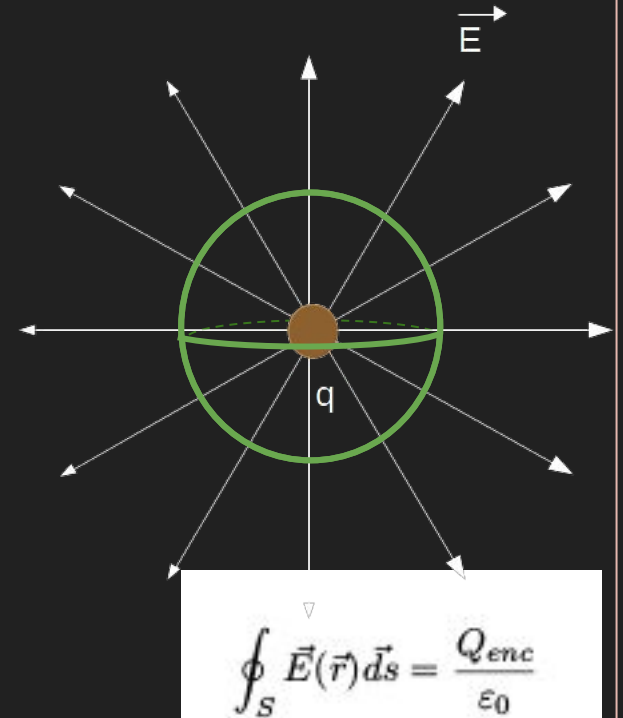
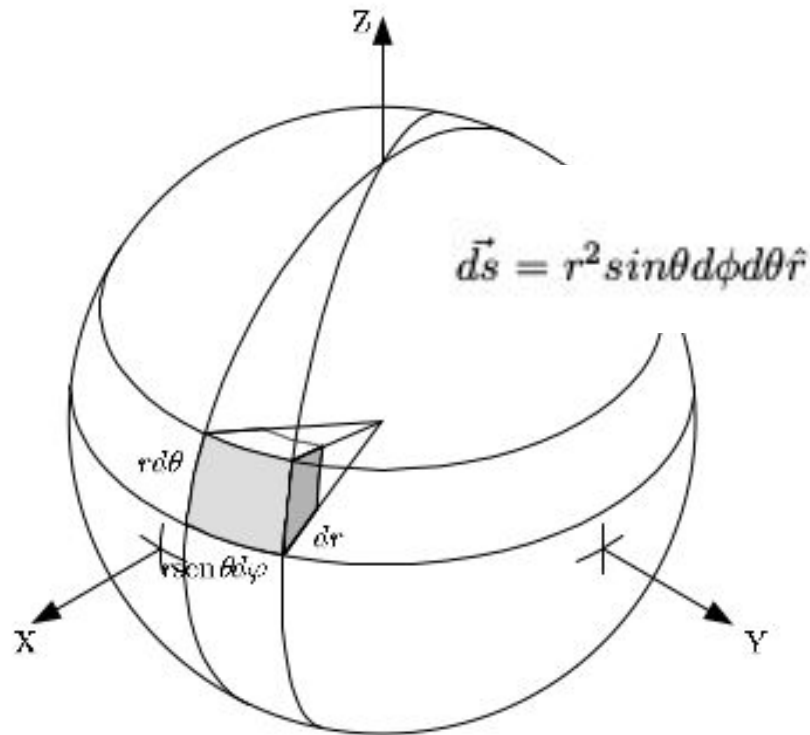
# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$



# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual





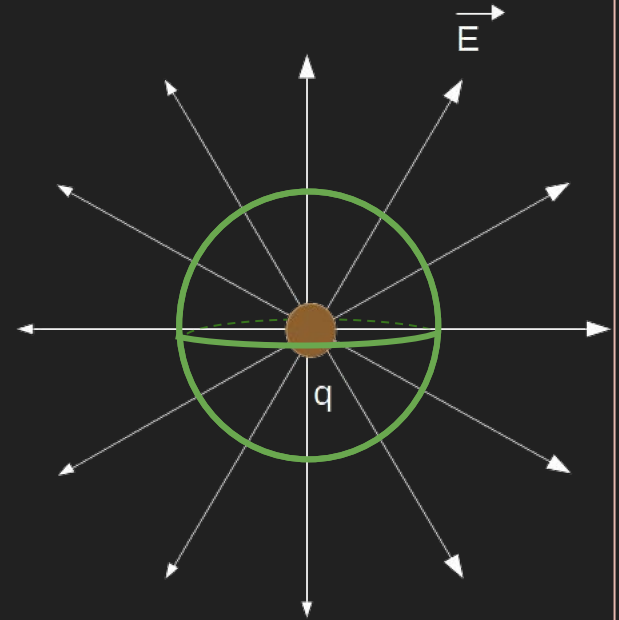
# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin\theta d\phi d\theta \hat{r}$$

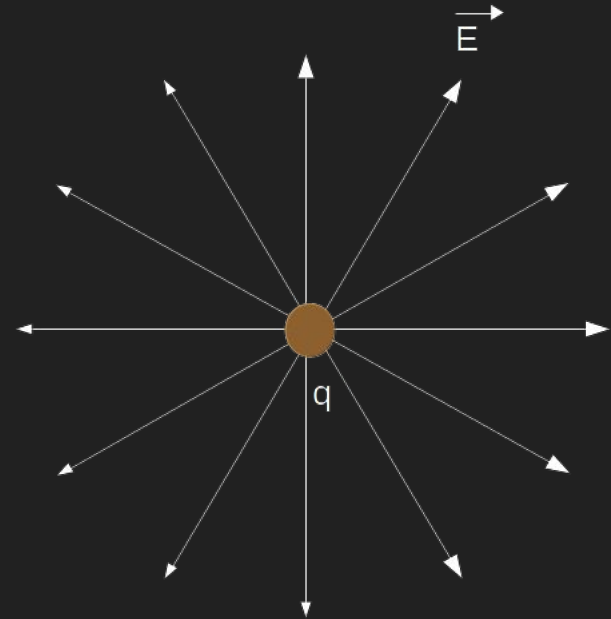
$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r)\hat{r} r^2 \sin\theta d\phi d\theta \hat{r} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



# Ejemplo de cálculo por Gauss en carga puntual

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r) \hat{r} r^2 \sin\theta d\phi d\theta \hat{r} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

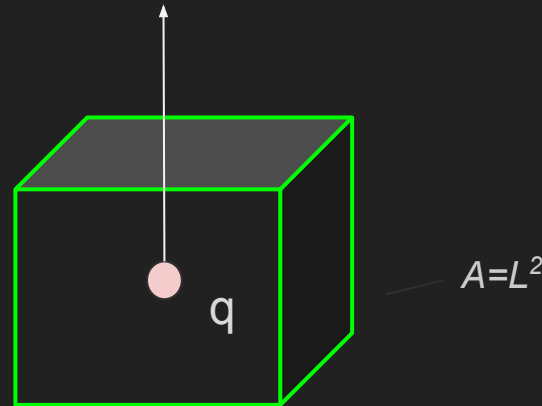
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$



El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga  $q$ . Repita el cálculo cuando la carga  $q$  está en uno de los vértices del cubo.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

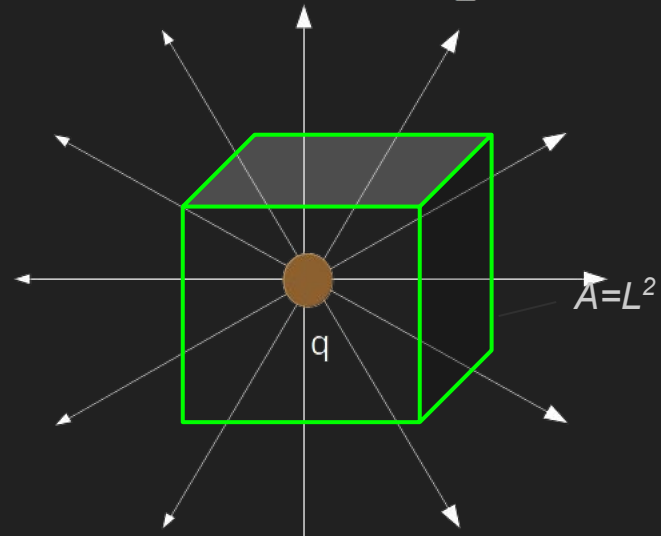


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga  $q$ . Repita el cálculo cuando la carga  $q$  está en uno de los vértices del cubo.

$$6 \int \int_A \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como la carga se encuentra en el centro del cubo, el flujo a través de cada una de las caras es el mismo.

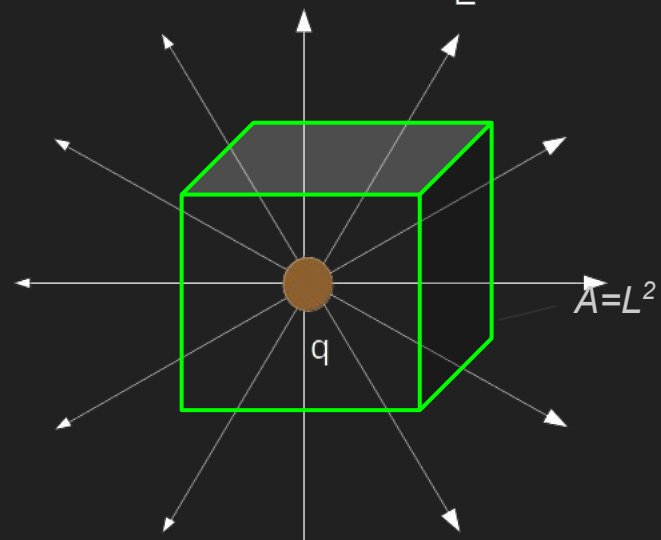


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga  $q$ . Repita el cálculo cuando la carga  $q$  está en uno de los vértices del cubo.

$$6 \int \int_A \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\int \int_A \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

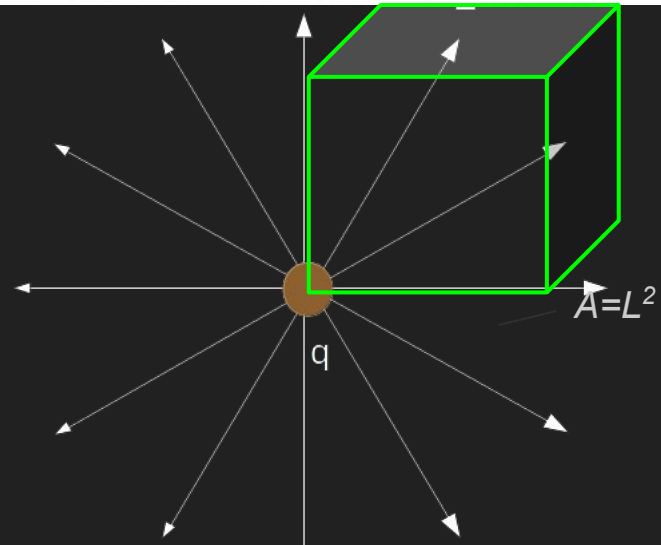


El ejercicio 1.7 permite está destinado a calcular el flujo a través de la superficie. Tengan en cuenta que para aplicar la Ley Gauss la superficie debe encerrar toda la carga.

7. Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo de campo eléctrico sobre cada una de las caras de un cubo, cuando en el centro del cubo se coloca una carga  $q$ . Repita el cálculo cuando la carga  $q$  está en uno de los vértices del cubo.

$$6 \int \int_A \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\int \int_A \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

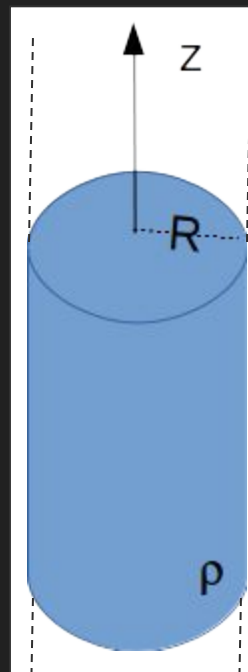


8. En cada uno de los casos siguientes determine, explotando la simetría de la configuración de cargas, cuál será la dirección del campo eléctrico y de cuáles coordenadas dependerán sus componentes. Utilizando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico en todo el espacio, y a partir de éste calcule el potencial electrostático. Grafique las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

- Un hilo infinito con densidad lineal uniforme  $\lambda$ .
- Un cilindro circular infinito de radio  $R$ , cargado uniformemente en volumen con densidad  $\rho$ .
- Un plano con densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ .
- Una esfera de radio  $R$  con densidad  $\rho$  uniforme.
- Una esfera de radio  $R$  con densidad  $\rho = Ar^n$  ( $A, n = \text{constantes}$ ).

8. En cada uno de los casos siguientes determine, explotando la simetría de la configuración de cargas, cuál será la dirección del campo eléctrico y de cuáles coordenadas dependerán sus componentes. Utilizando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico en todo el espacio, y a partir de éste calcule el potencial electrostático. Grafique las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

- Un hilo infinito con densidad lineal uniforme  $\lambda$ .
- Un cilindro circular infinito de radio  $R$ , cargado uniformemente en volumen con densidad  $\rho$ .
- Un plano con densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ .
- Una esfera de radio  $R$  con densidad  $\rho$  uniforme.
- Una esfera de radio  $R$  con densidad  $\rho = Ar^n$  ( $A, n = \text{constantes}$ ).





Analizamos la simetría así podemos elegir una superficie de Gauss adecuada que nos facilite el cálculo del campo eléctrico.

En principio tenemos que elegir un sistema de coordenadas....

Analicemos la simetría así podemos elegir una superficie de Gauss adecuada que nos facilite el cálculo del campo eléctrico.

En principio tenemos que elegir un sistema de coordenadas....

Como la distribución de cargas es uniforme y está contenida en un volumen cilíndrico, es razonable elegir coordenadas cilíndricas.

Con lo cual ...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r} + E_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + E_z(r, \phi, z)\hat{z}$$

Recordemos que la simetría de la distribución de cargas debe reflejarse en la simetría del campo eléctrico...

En principio pensemos si podemos ver qué componentes serán nulas de este campo eléctrico....

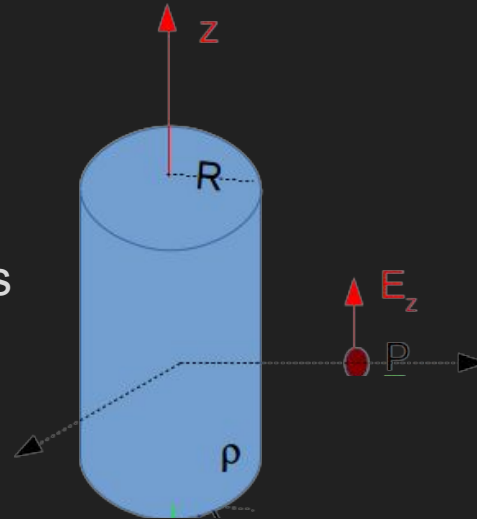
## Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección  $z$ .

Imaginemos el punto  $P$  sobre el eje  $y$ , y

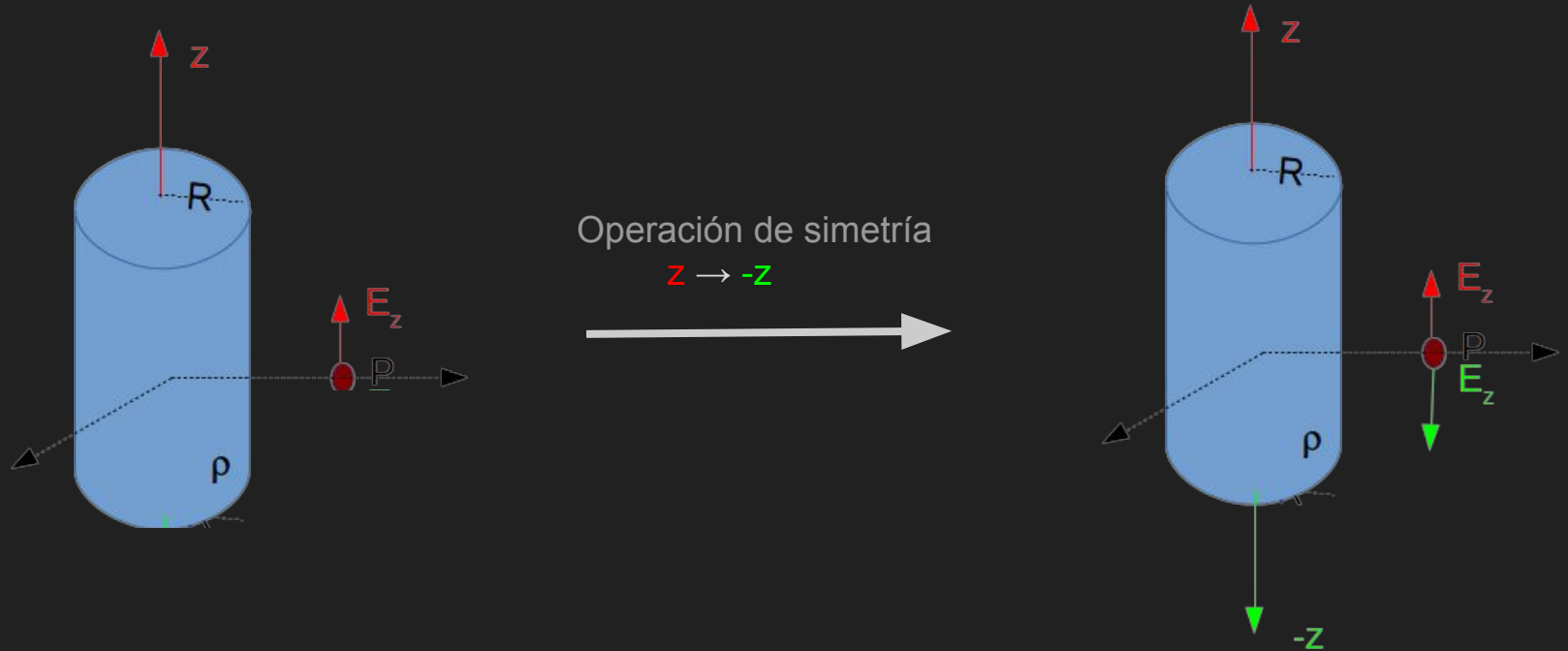
supongamos  $E_z$  no nulo en ese punto.

Realizaremos operaciones de simetría,  
que no cambien la fuente y analizaremos  
qué ocurre con el campo hipotético.



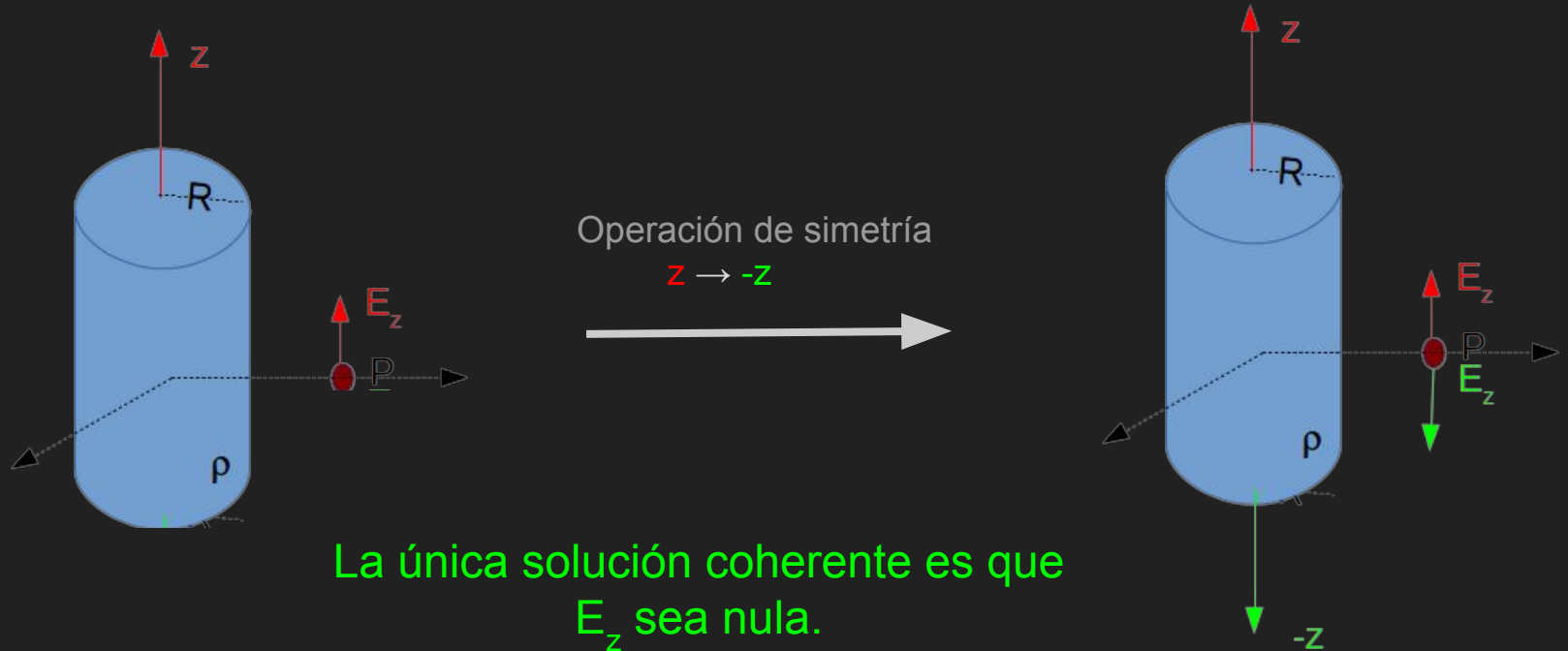
## Simetría Componentes

Analizamos la componente en dirección  $z$ . Imaginemos el punto  $P$  sobre el eje  $y$ , y supongamos  $E_z$  no nulo en ese punto.



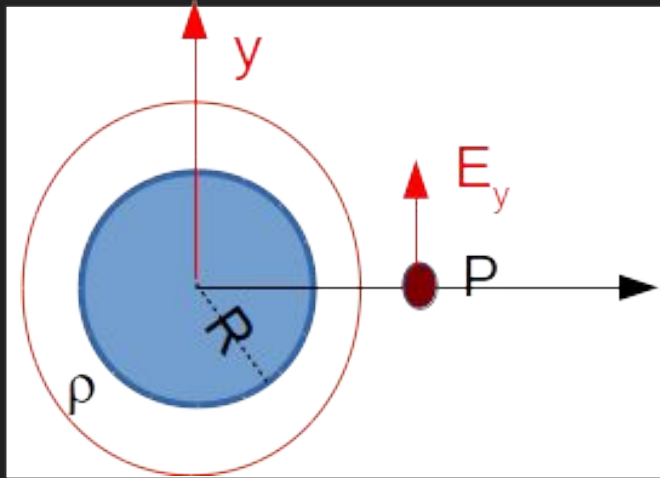
## Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección  $z$ . Imaginemos el punto  $P$  sobre el eje  $y$ , y supongamos  $E_z$  no nulo en ese punto.



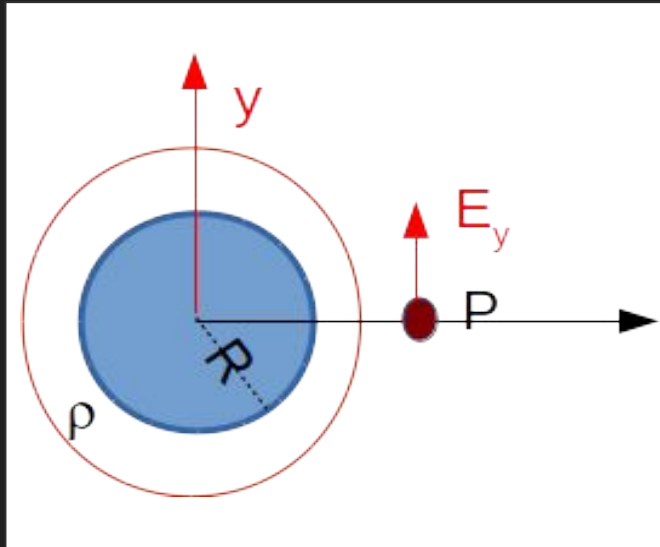
## Simetría Componentes

Analizamos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos  $E_\varphi$  no nulo en ese punto.



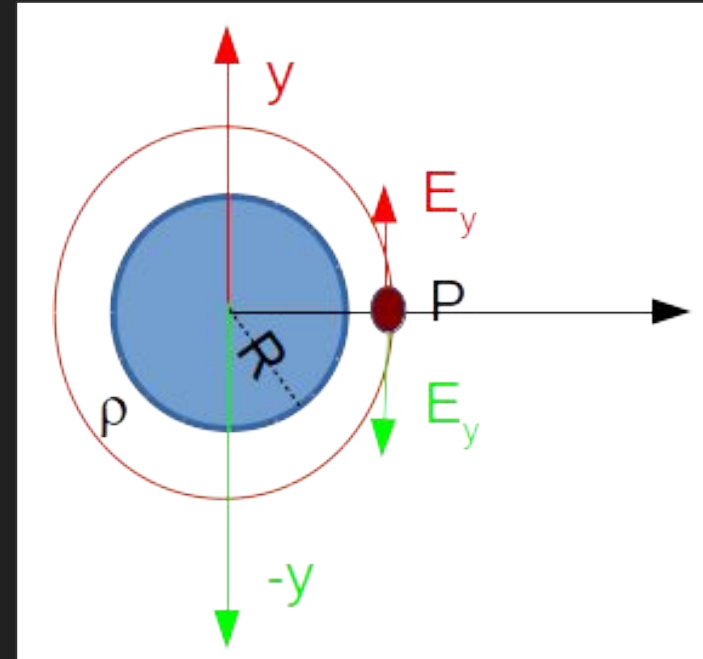
## Simetría Componentes

Analicemos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos  $E_\varphi$  no nulo en ese punto.



Operación de simetría

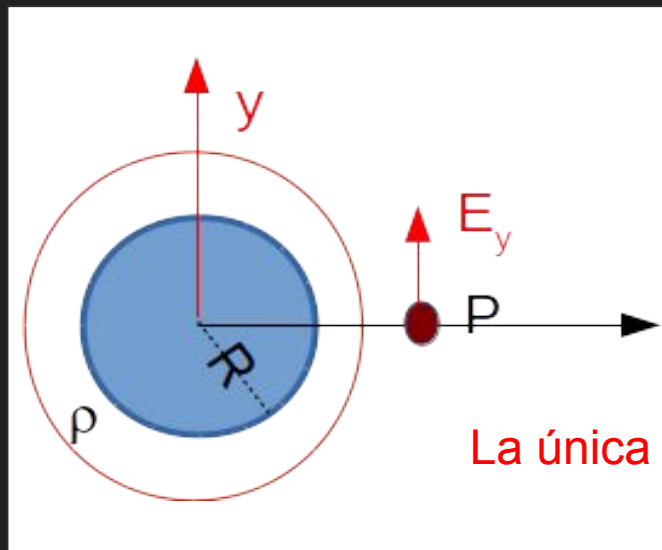
$$y \rightarrow -y$$





## Simetría Componentes

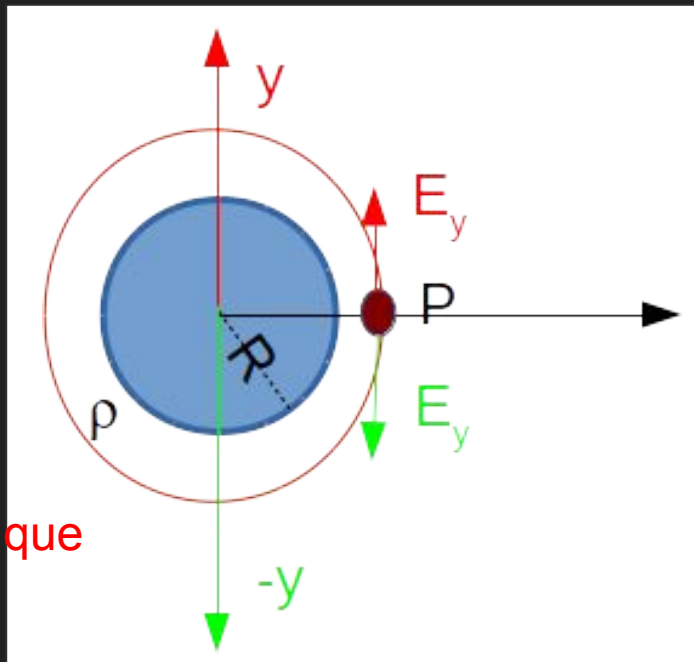
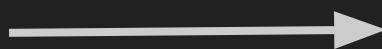
Analicemos la componente en dirección azimutal. Imaginemos el punto P sobre el eje x, y supongamos  $E_\varphi$  no nulo en ese punto.



La única solución coherente es que  $E_\varphi$  sea nula.

Operación de simetría

$$y \rightarrow -y$$



## Simetría Componentes

Del análisis de las componentes podemos decir que el campo sólo tendrá componente radial. Ahora analizaremos las dependencias...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r} + E_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + E_z(r, \phi, z)\hat{z}$$

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r}$$

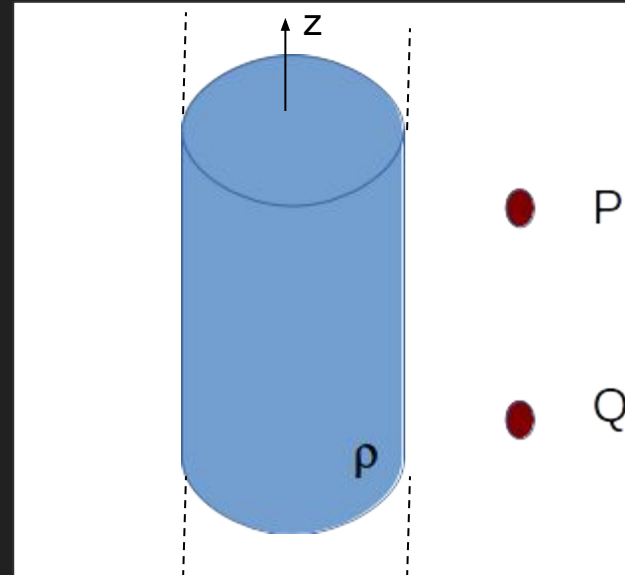
## Dependencia de variables

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r}$$

Analizamos la dependencia con la variable  $z$ .

Dado que el cilindro es infinito en la dirección  $z$ , la distribución tiene simetría de traslación en esa coordenada. Por lo tanto, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente.



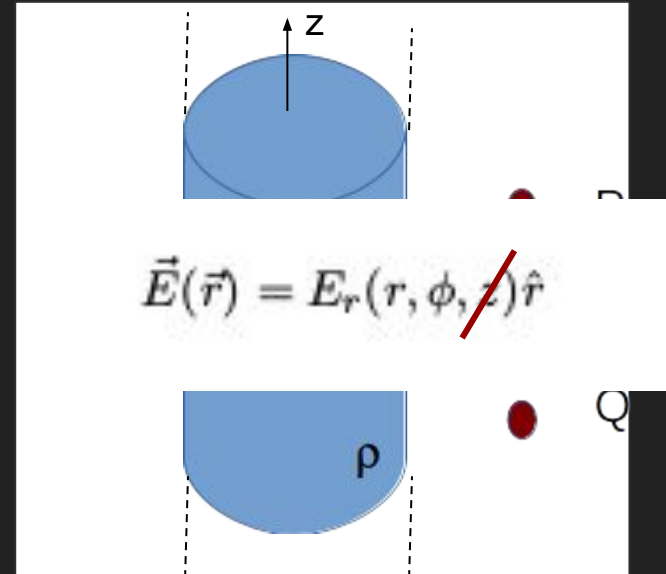
## Dependencia de variables

El campo podría depender de las 3 variables cilíndricas...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z)\hat{r}$$

Analizamos la dependencia con la variable  $z$ .

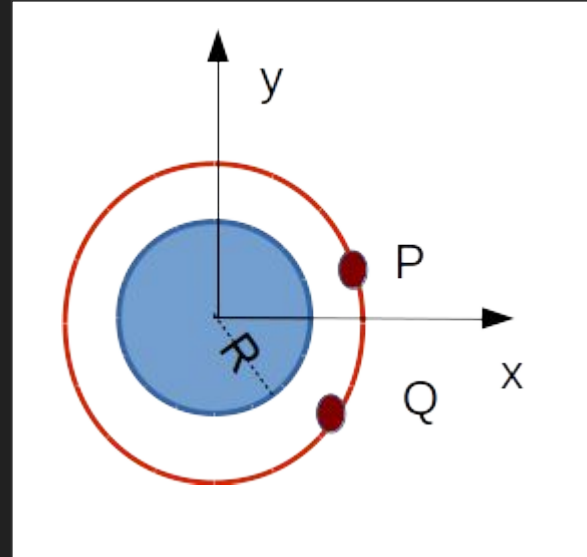
Dado que el cilindro es infinito en la dirección  $z$ , la distribución tiene simetría de traslación en esa coordenada. Por lo tanto, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente.



## Dependencia de variables

Analizamos la dependencia con la variable angular.

Dado que la distribución de cargas se distribuye uniformemente, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente. Por lo tanto, el campo no debe depender de la componente angular.

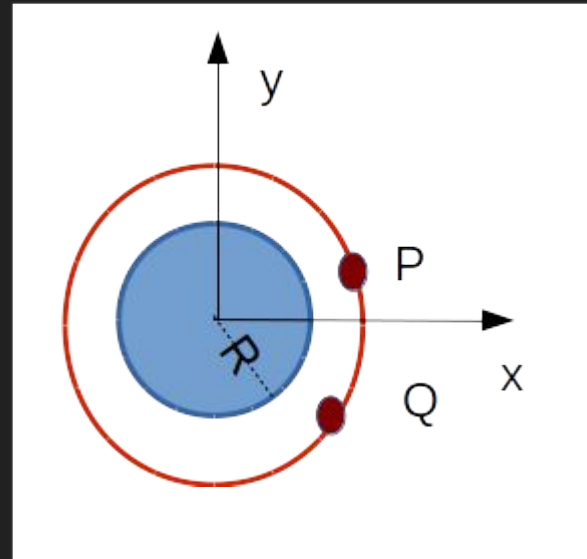


## Dependencia de variables

Analizamos la dependencia con la variable angular.

Dado que la distribución de cargas se distribuye uniformemente, los puntos P y Q son equivalentes eléctricamente. Por lo tanto, el campo no debe depender de la componente angular.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \phi, z) \hat{r}$$

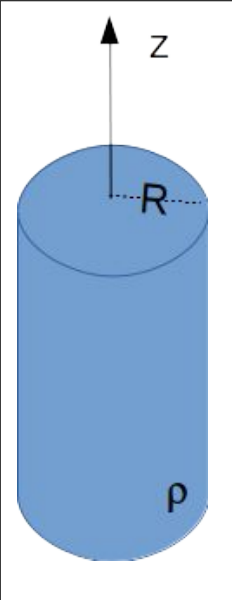


Por el análisis de simetría llegamos a que...

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Por lo tanto, debemos elegir una superficie de Gauss de radio constante y cuya normal sea en la dirección radial.

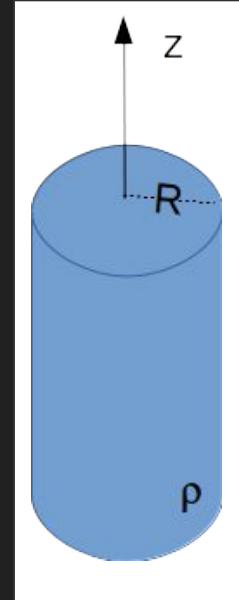
Las caras laterales de un cilindro cumplen con estas condiciones. Recordemos que la superficie de Gauss debe ser cerrada. Consideraremos entonces como superficie de Gauss un cilindro finito de radio  $r$  genérico con tapas.



Dada la distribución:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ \rho_0 & \text{si } R \leq r \end{cases}$$

el campo eléctrico refleja esta simetría y deberemos calcular el campo adentro y fuera del cilindro.





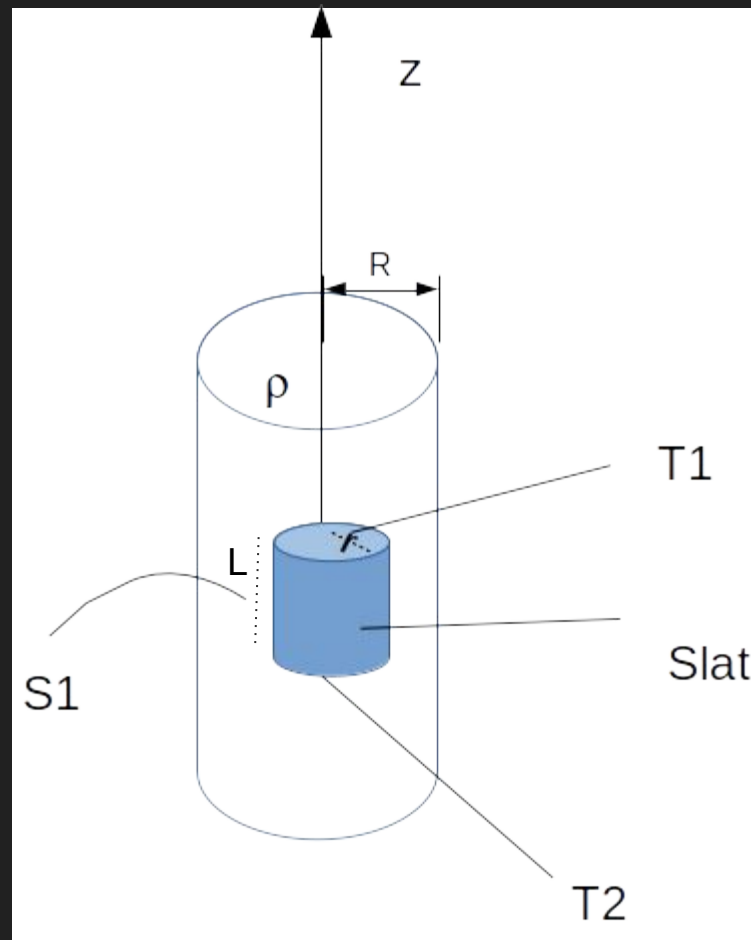
Usando la expresión

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Y sabiendo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Obtenemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada cilíndrica de radio  $r$  y alto  $L$  en el interior  $S_1$  y en el exterior  $S_2$ .



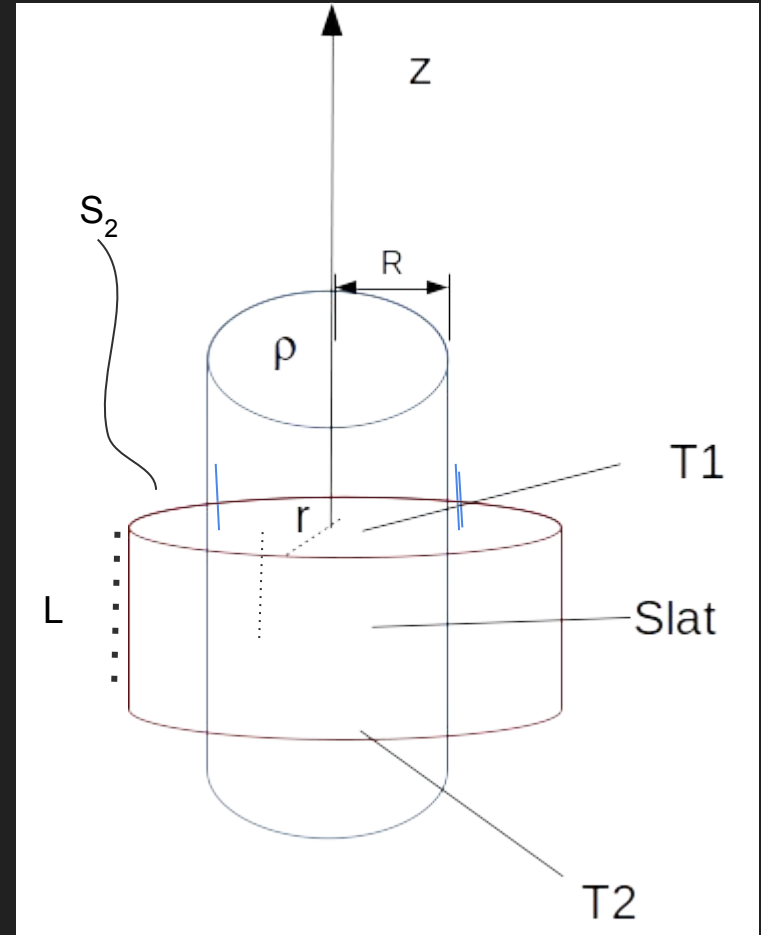
Usando la expresión

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

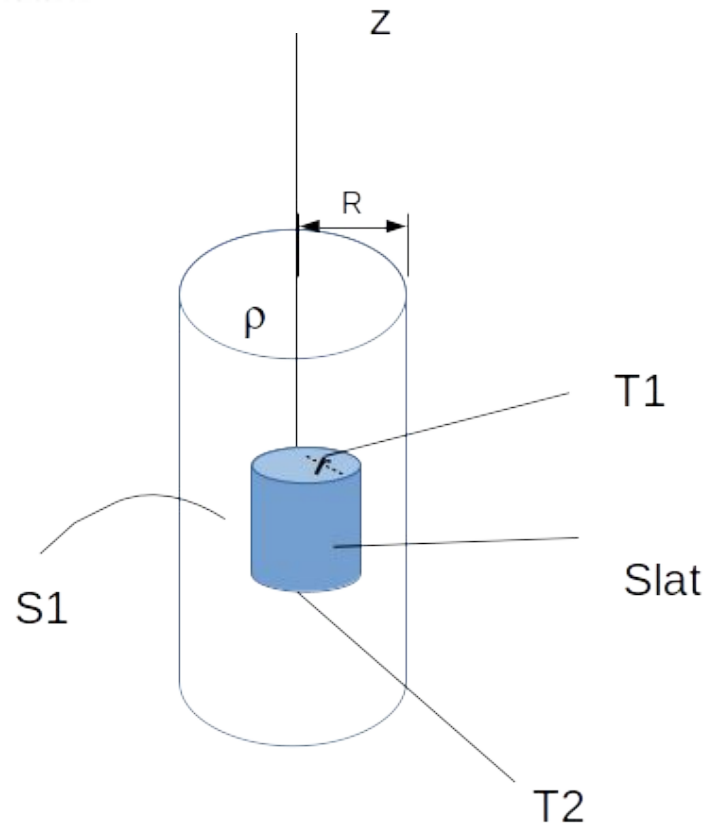
Y sabiendo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Obtenemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada cilíndrica de radio  $r$  y alto  $L$  en el interior  $S_1$  y en el exterior  $S_2$ .

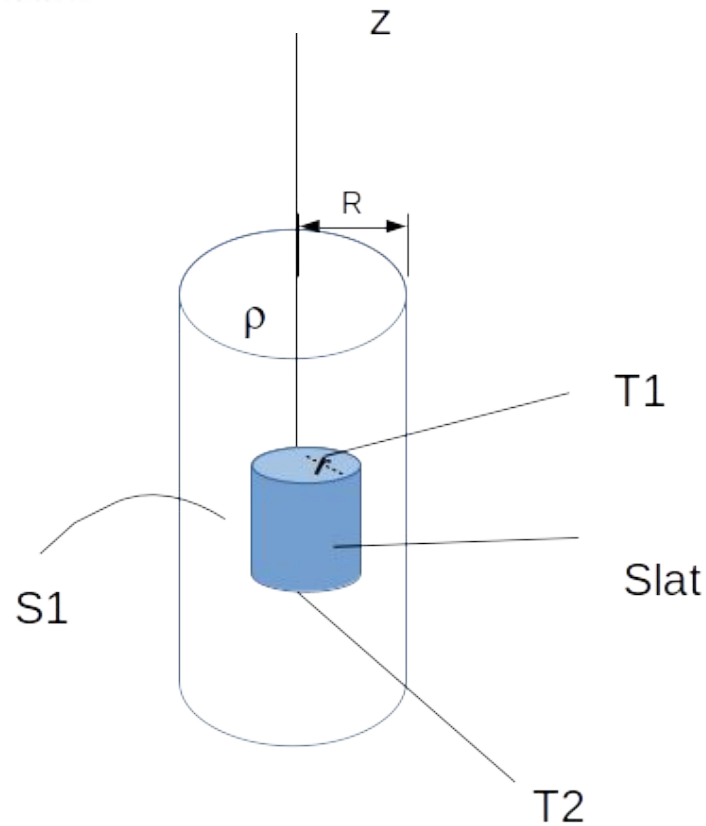


$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int \int_{T1} E(r) \hat{r} dS_1 \hat{z} + \int \int_{T2} E(r) \hat{r} dS_1 (-\hat{z}) + \int \int_{S_{lat}} E(r) \hat{r} dS_{lat} \hat{r}$$



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int \int_{T1} E(r) \hat{r} dS_1 \hat{z} + \int \int_{T2} E(r) \hat{r} dS_1 (-\hat{z}) + \int \int_{S_{lat}} E(r) \hat{r} dS_{lat} \hat{r}$$

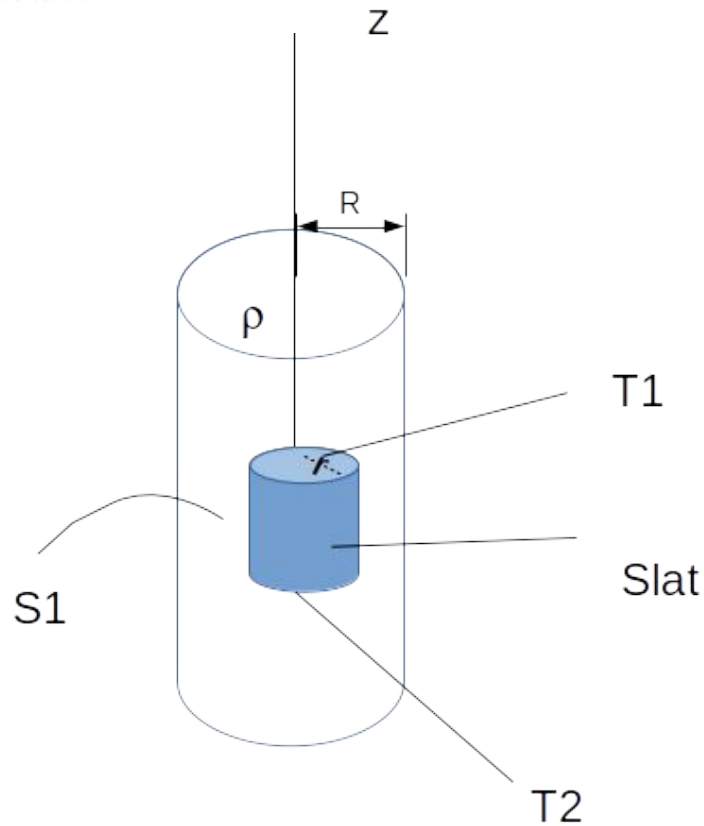
No hay flujo a través de las tapas

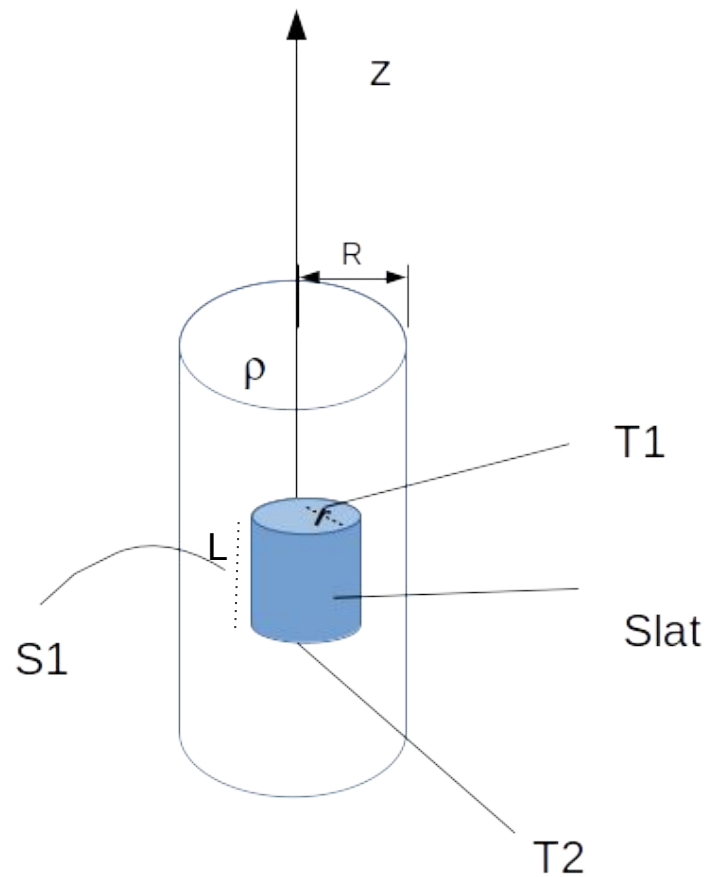
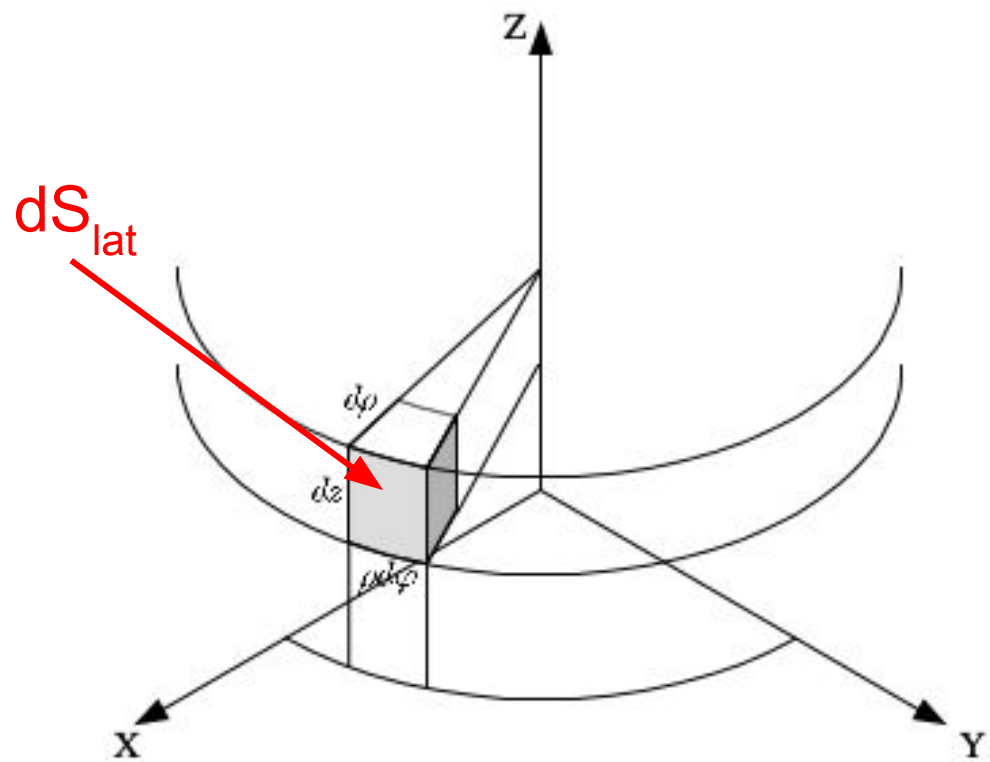


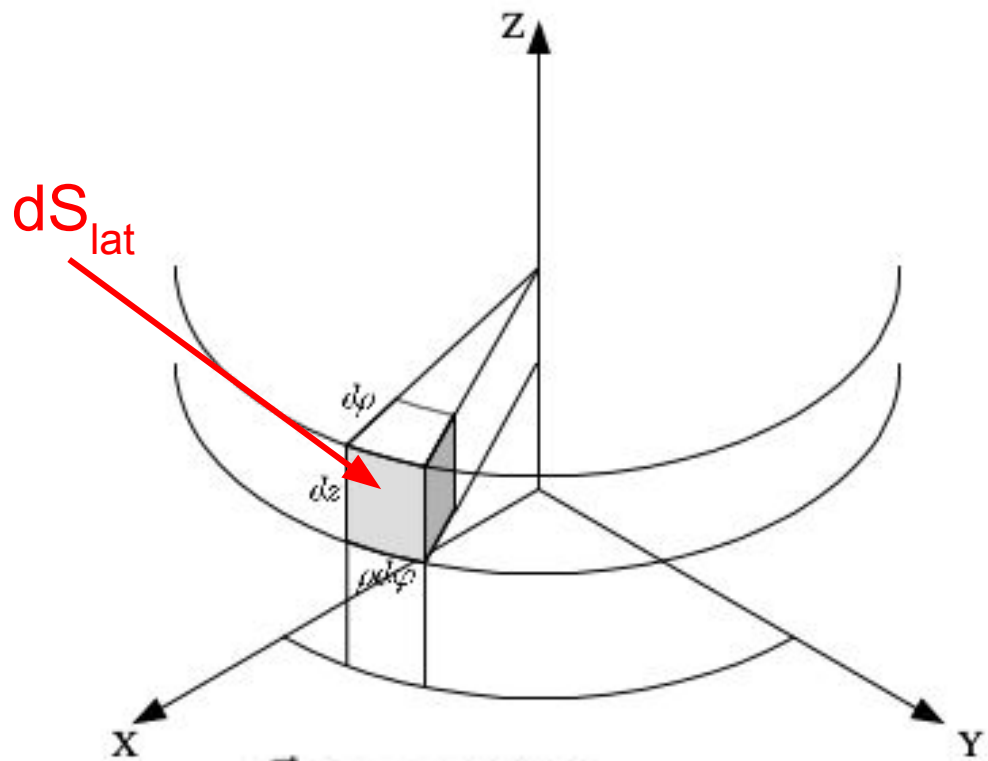
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int \int_{T1} E(r) \hat{r} dS_1 \hat{z} + \int \int_{T2} E(r) \hat{r} dS_1 (-\hat{z}) + \int \int_{S_{lat}} E(r) \hat{r} dS_{lat} \hat{r}$$

No hay flujo a través de las tapas

¿Cómo calculamos  $dS_{lat}$ ?

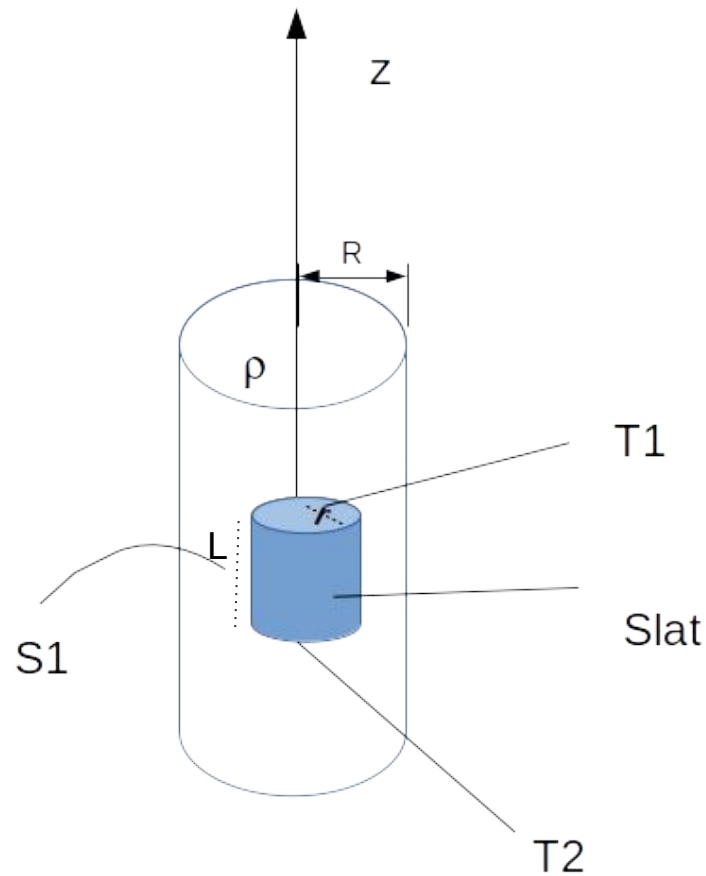




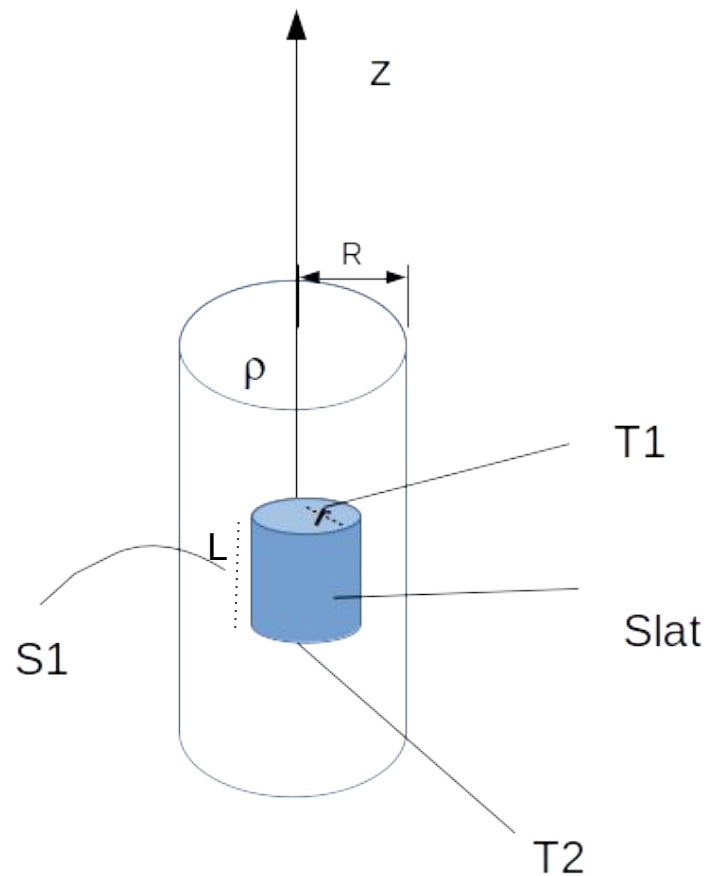


$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$d\vec{s} = rd\phi dz\hat{r}$$



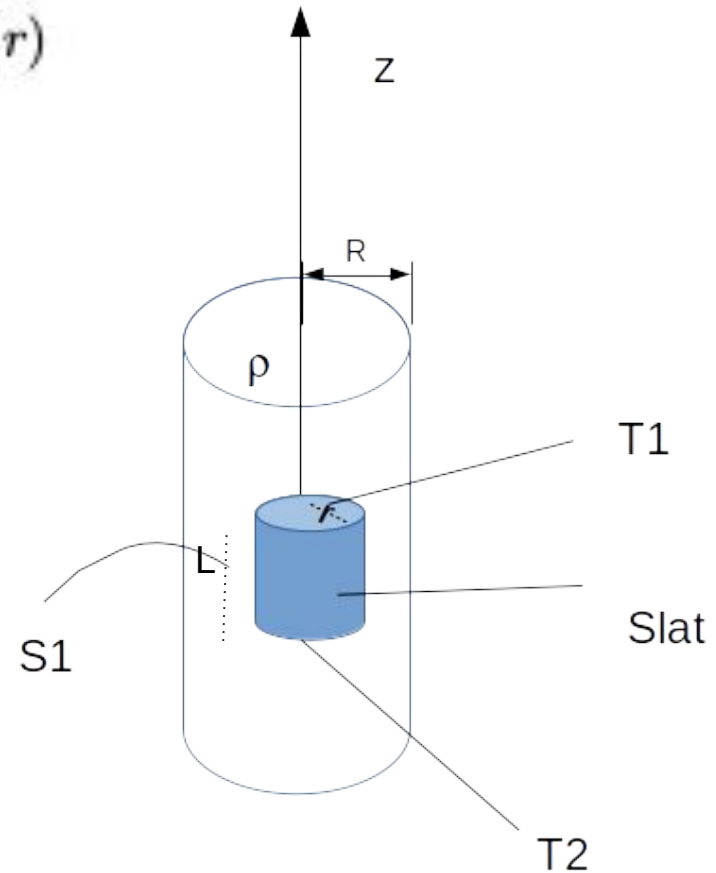
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \hat{r} r d\phi dz \hat{r}$$





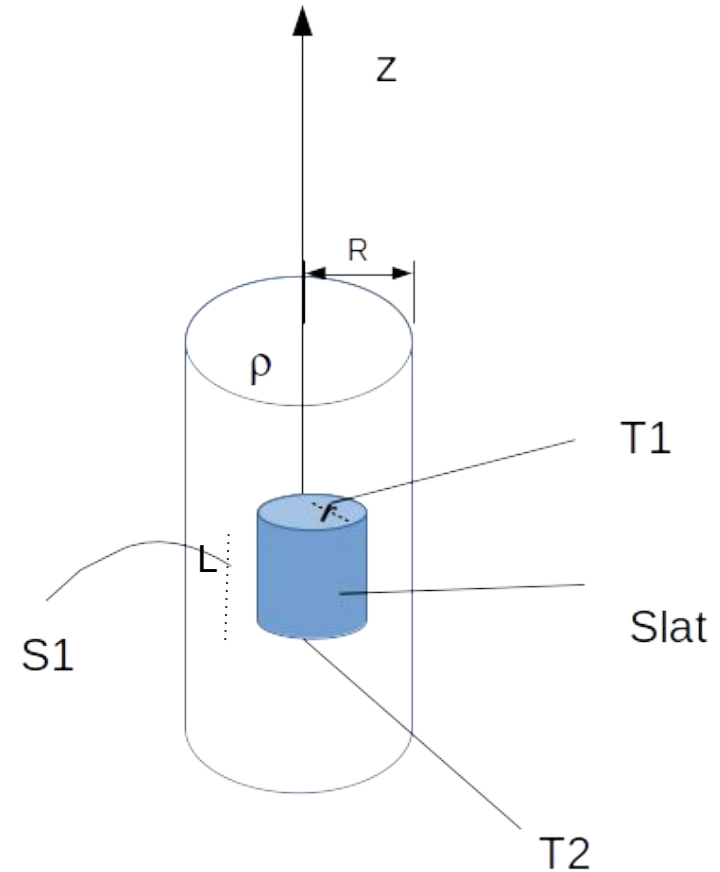
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \hat{r} r d\phi dz \hat{r} = 2\pi r L E(r)$$

Por ahora sólo trabajamos con la simetría del campo sin detenernos si estábamos adentro o afuera del cilindro cagado.



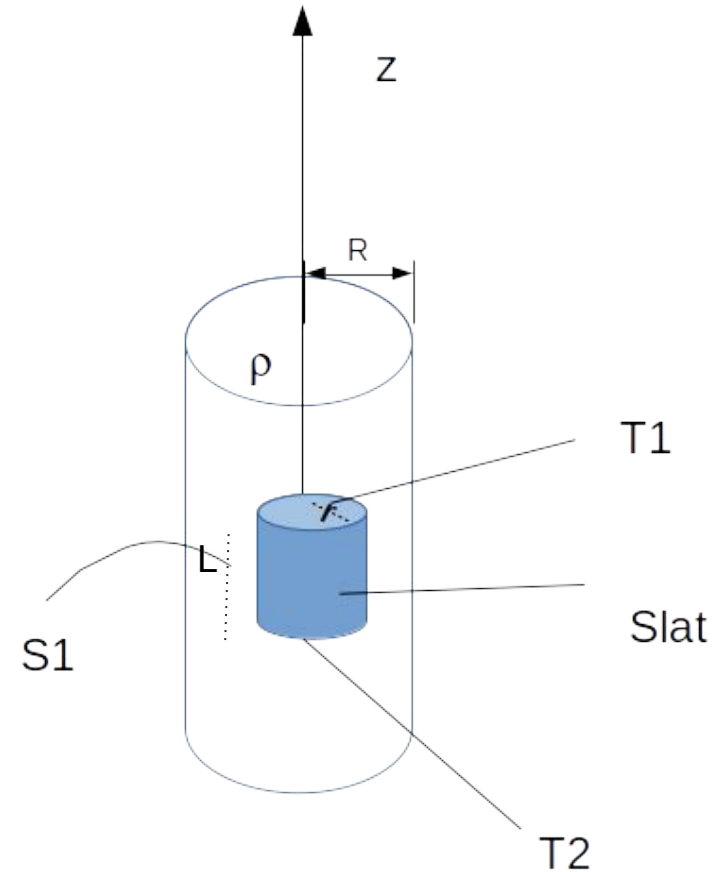
La diferencia entre ambas superficies de Gauss  $S1$  y  $S2$  no está en la simetría sino en la carga que encierran.

Veamos primero el cilindro interior



La diferencia entre ambas superficies de Gauss S1 y S2 no está en la simetría sino en la carga que encierran.

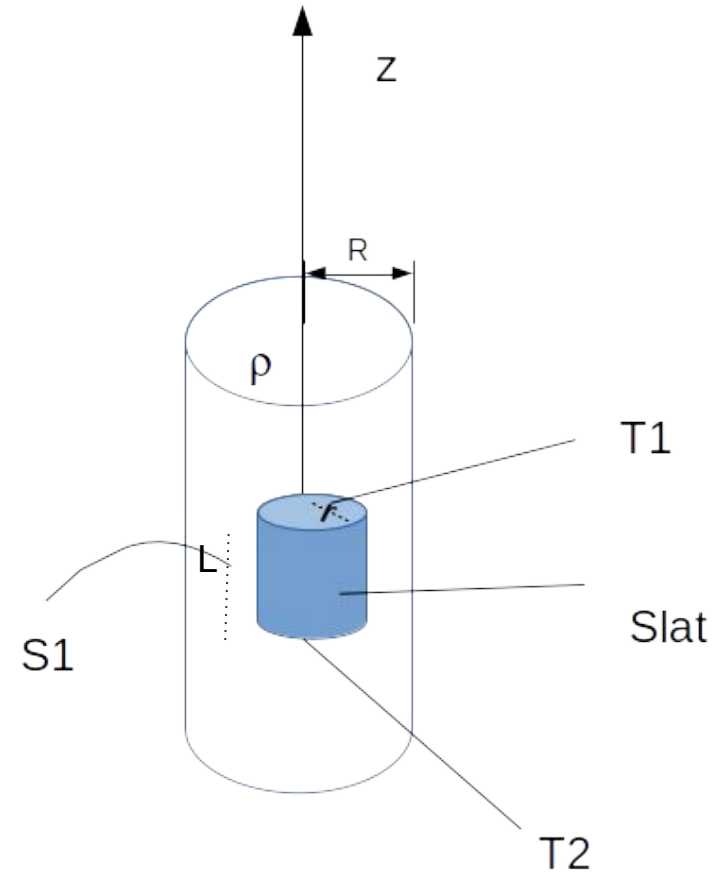
$$dQ_{enc}^{S1} = \rho r d\phi dz dr$$



La diferencia entre ambas superficies de Gauss S1 y S2 no está en la simetría sino en la carga que encierran.

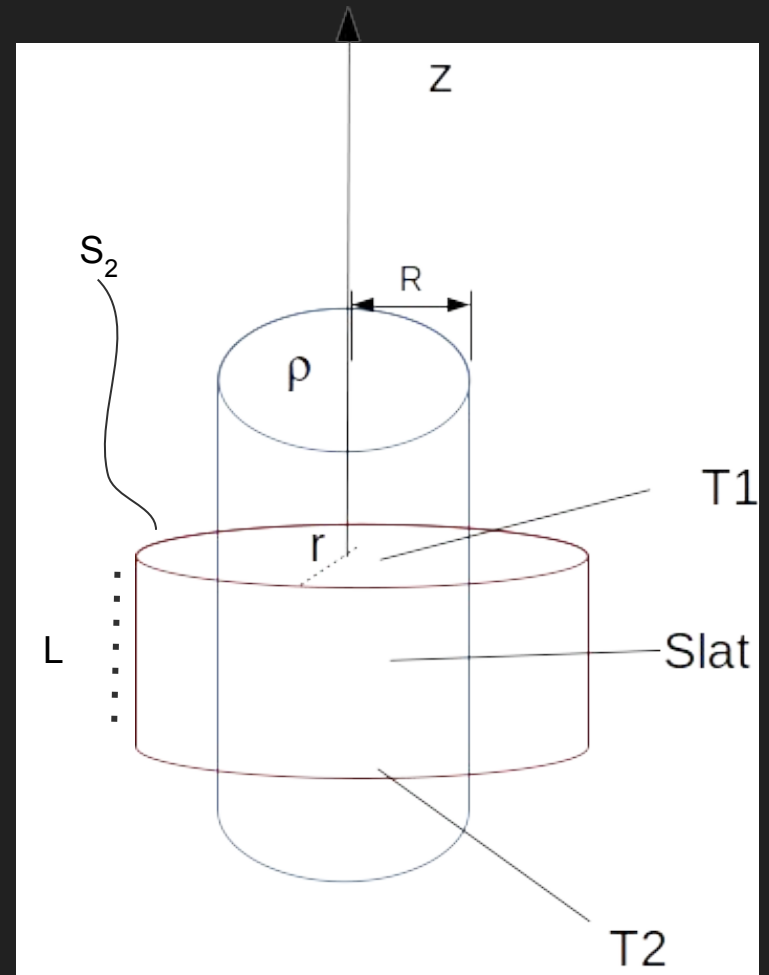
$$dQ_{enc}^{S1} = \rho r d\phi dz dr$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^r \rho r d\phi dr dz = \pi r^2 L \rho$$



Ahora el exterior

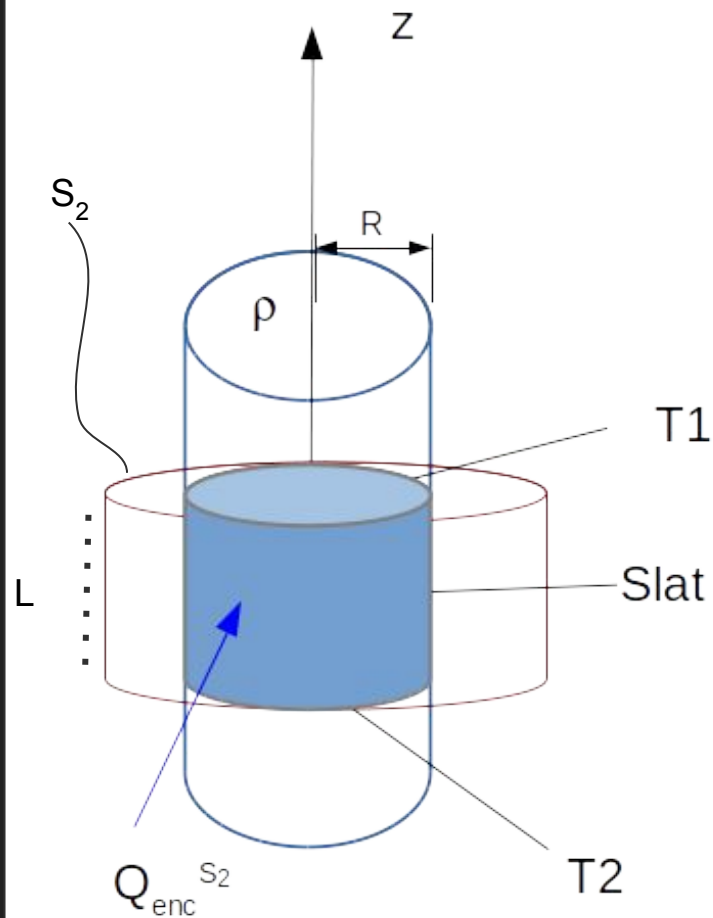
$$dQ_{enc}^{S_2} = \rho r d\phi dz dr$$



Ahora el exterior

$$dQ_{enc}^{S_2} = \rho r d\phi dz dr$$

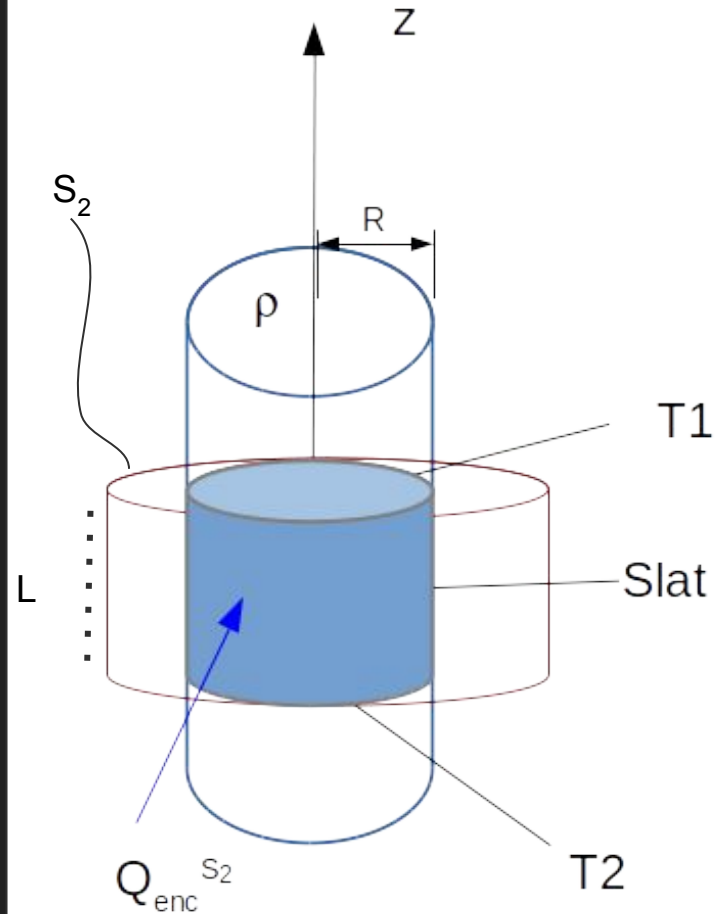
$$Q_{enc}^{S_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$



Ahora el exterior

$$dQ_{enc}^{S_2} = \rho r d\phi dz dr$$

$$Q_{enc}^{S_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$



Recopilando...

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \hat{r} r d\phi dz \hat{r} = 2\pi r L E(r)$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^r \rho r d\phi dr dz = \pi r^2 L \rho$$

$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$



Recopilando...

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \hat{r} r d\phi dz \hat{r} = 2\pi r L E(r)$$

$$Q_{enc}^{S1} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^r \rho r d\phi dr dz = \pi r^2 L \rho$$

+ Ley de Gauss

$$Q_{enc}^{S2} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \rho r d\phi dr dz = \pi R^2 L \rho$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(r)2\pi rL = \begin{cases} \frac{\pi r^2 L \rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \frac{\pi R^2 L \rho}{\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

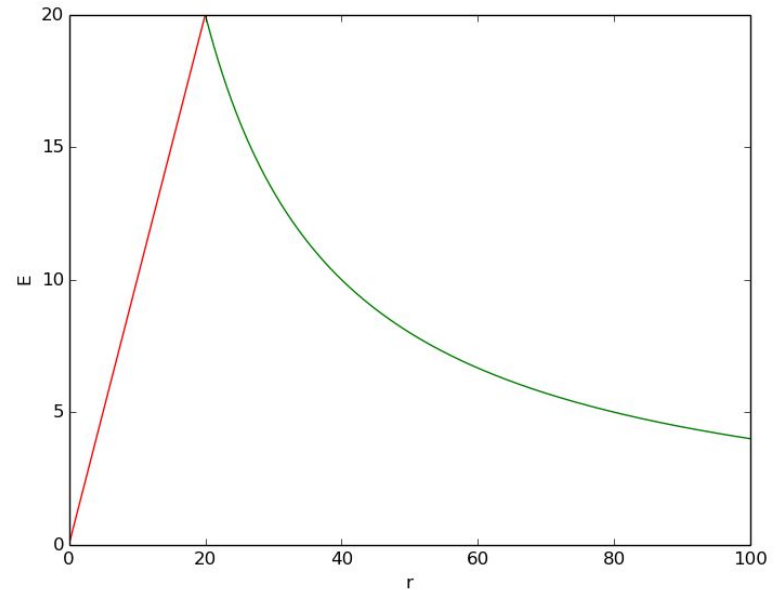
$$E(r)2\pi rL = \begin{cases} \frac{\pi r^2 L \rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \frac{\pi R^2 L \rho}{\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

Finalmente....

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\varepsilon_0} \hat{r} & \text{si } r < R \\ \frac{R^2\rho}{2r\varepsilon_0} \hat{r} & \text{si } R < r \end{cases}$$

Finalmente....

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } r < R \\ \frac{R^2\rho}{2r\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } R < r \end{cases}$$



## Pasos que aplicamos en la resolución del problema 1.8

1. Elegir sistema de coordenadas
2. Analizar simetrías
3. Elegir superficie de Gauss
4. Calcular  $E$  con Ley de Gauss

# Comentario del ejercicio 1.13

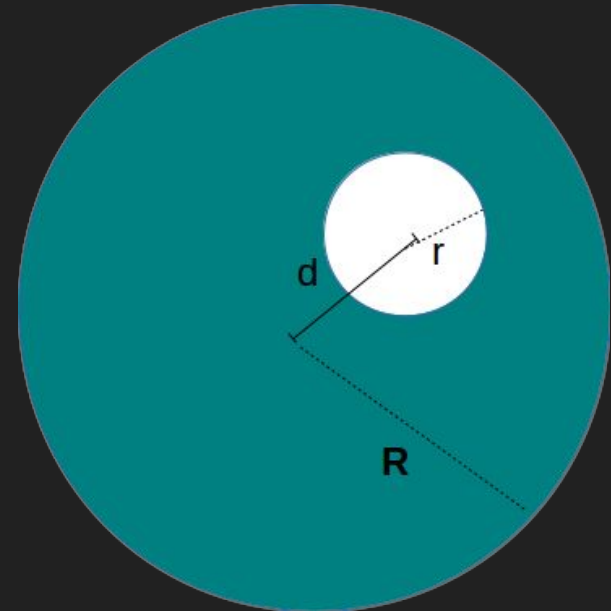
13. • Una esfera de radio  $R$ , cargada uniformemente con densidad  $\rho$ , posee un agujero esférico de radio  $r$  en su interior. El centro del agujero está a una distancia  $d < (R - r)$  del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

Este ejercicio integra la aplicación del Principio de Superposición y la aplicación de la Ley de Gauss, conocimientos explorados en la Guía 1.

13. • Una esfera de radio  $R$ , cargada uniformemente con densidad  $\rho$ , posee un agujero esférico de radio  $r$  en su interior. El centro del agujero está a una distancia  $d < (R - r)$  del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

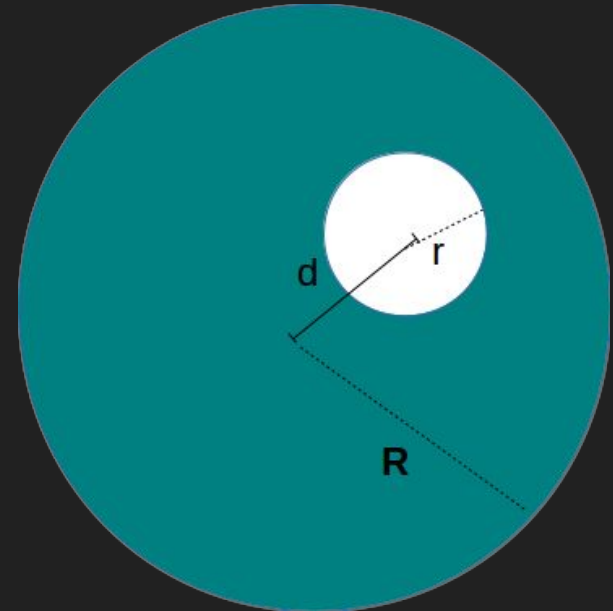
El problema me plantea obtener el campo eléctrico en el eje de simetría de la configuración.

Para eso me planteo qué simetrías tenemos y por ende qué sistema de coordenadas elegimos.



Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

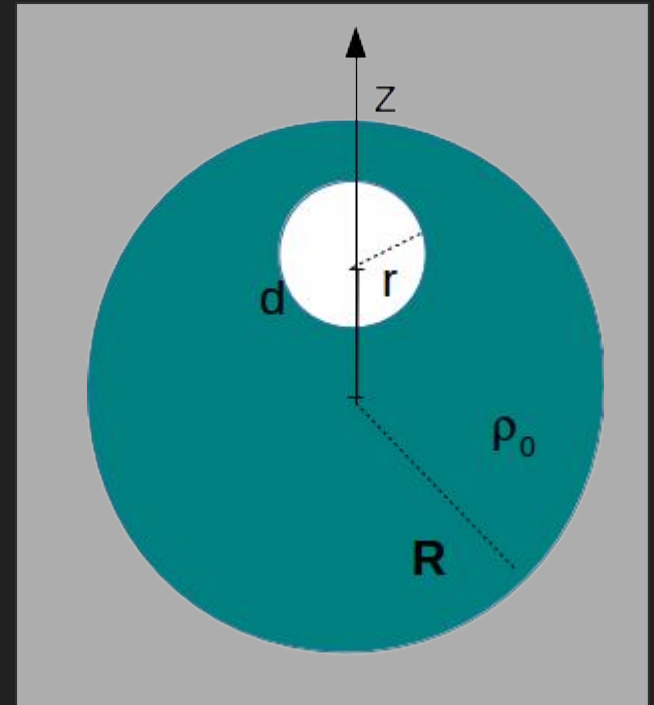
Por lo tanto conviene elegir el eje  $z$  coincidente con esa dirección.





Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

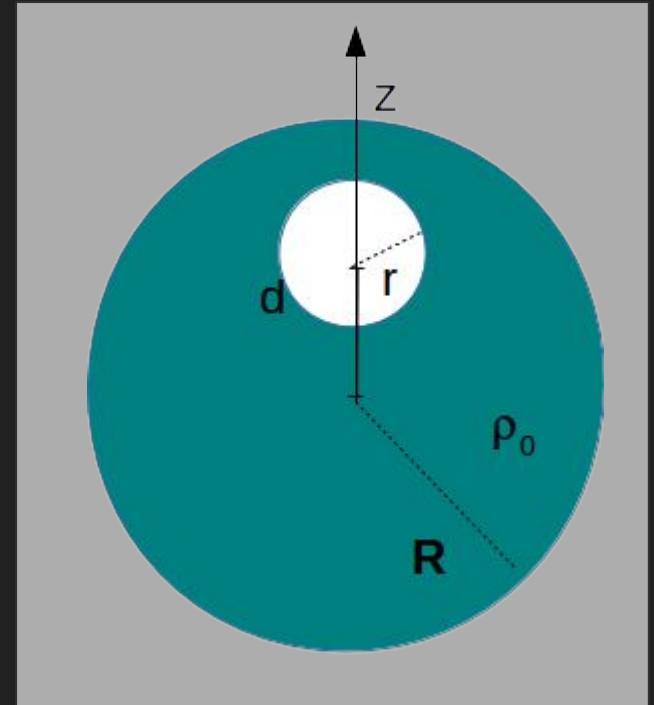
Por lo tanto conviene elegir el eje  $z$  coincidente con esa dirección.



¿Cómo resolvemos este problema?

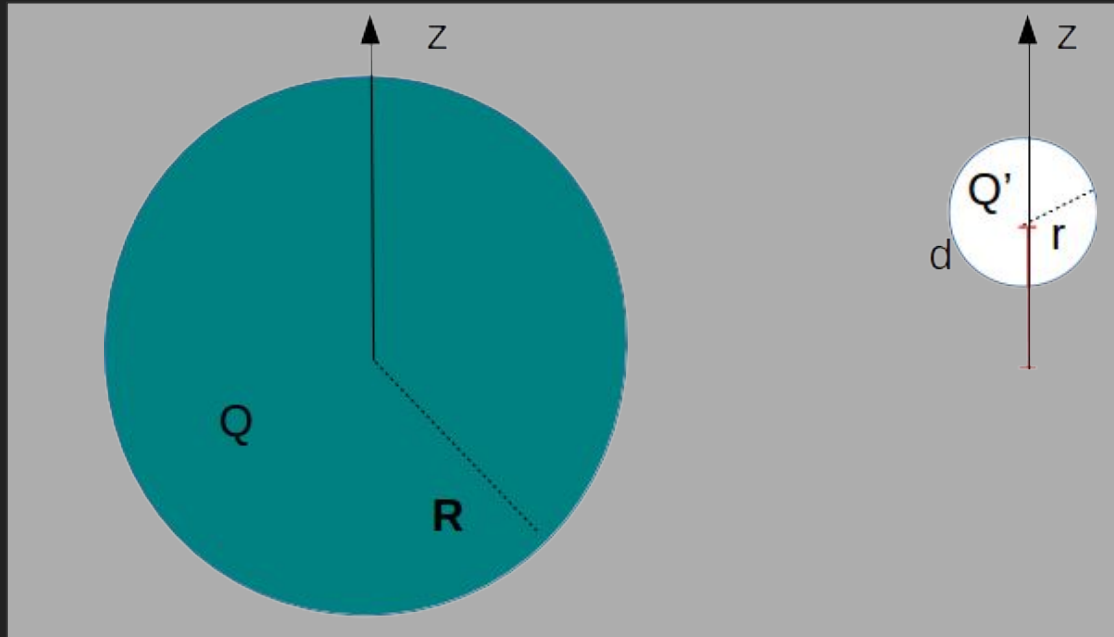
Podemos calcular el campo por definición pero sería un poco "cuentoso" o podemos utilizar resultados previos, ya que en realidad tenemos 2 esferas.

¿Cómo pensamos el agujero?



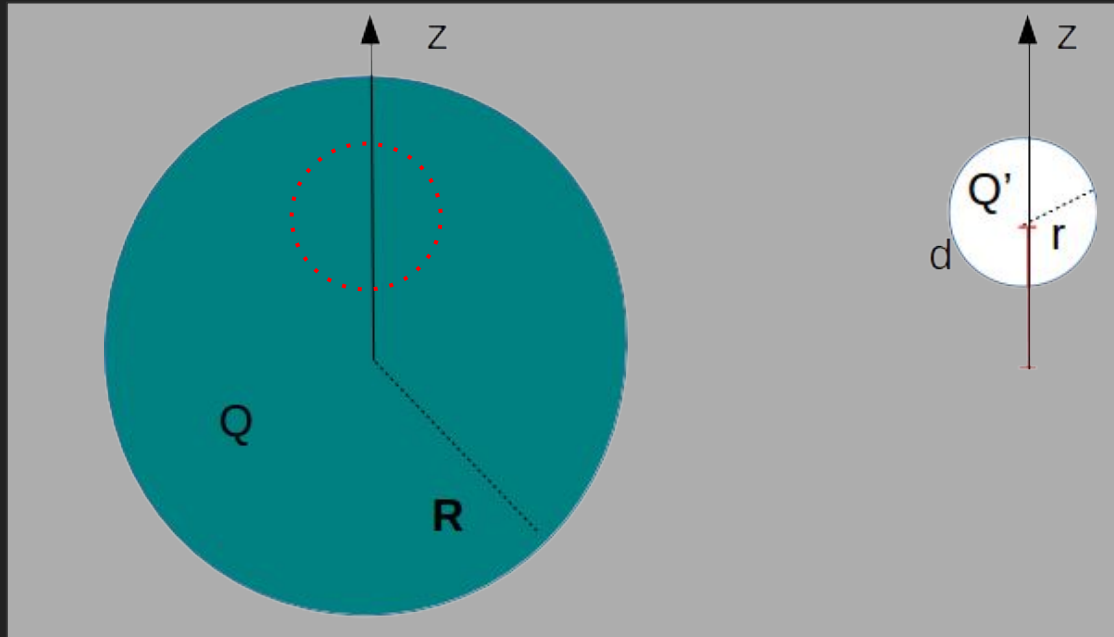
¿Cómo pensamos el agujero?

Podemos pensar como una superposición de 2 esferas de diferentes carga  $Q$  y  $Q'$ . De manera que al sumar  $Q$  y  $Q'$  en la esfera se debe cumplir que adentro de esfera chica la carga sea nula.



Es decir  $Q+Q'=0$  dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

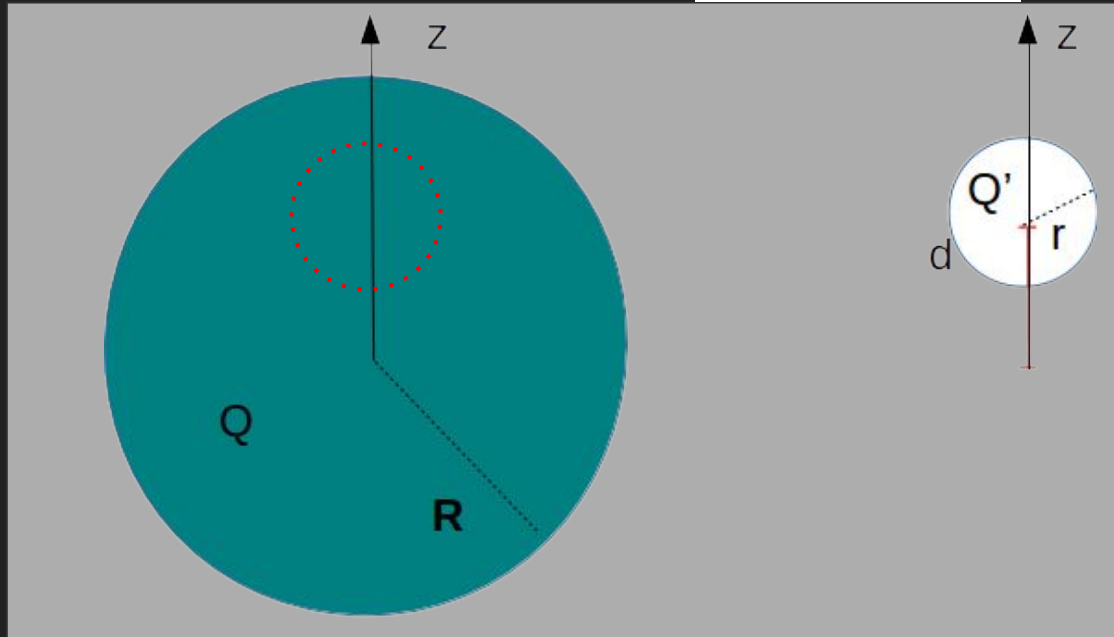


Es decir  $Q+Q'=0$  dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

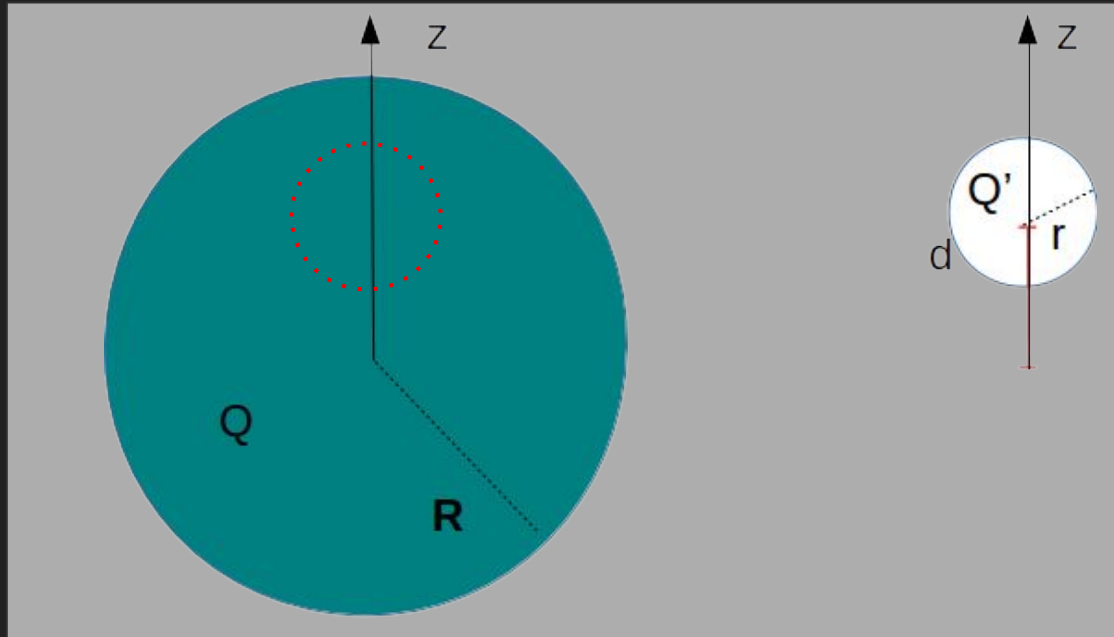
Como la distribución e de carga es uniforme...

$$Q_{rojo} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_0$$



Entonces  $Q_{\text{rojo}} + Q' = 0$ .

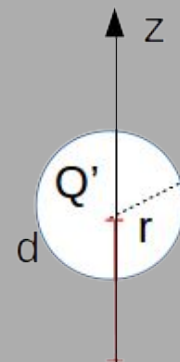
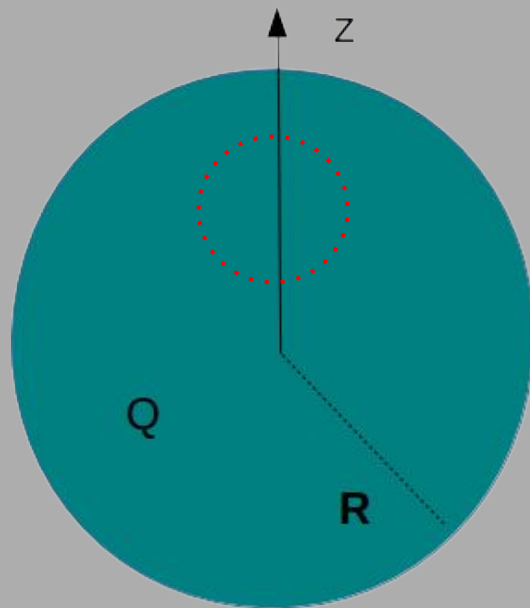
De acá sale que ...



Entonces  $Q_{\text{rojo}} + Q' = 0$ .

De acá sale que ...

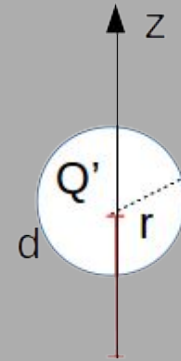
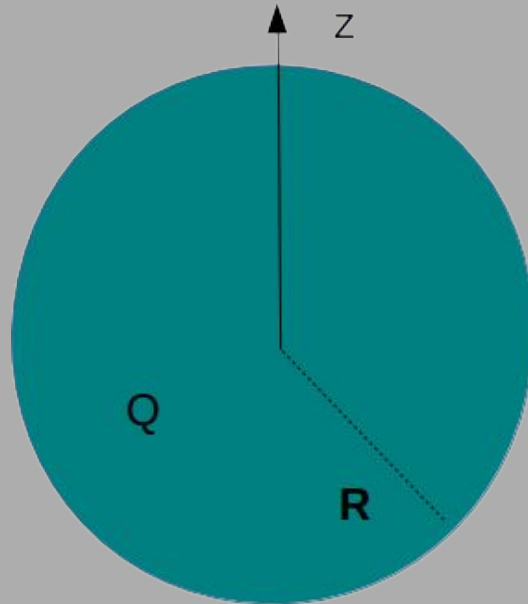
$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3} \rho_0$$



Entonces debo obtener el campo de 2 esferas, una en el centro (grande) y la otra descentrada con cargas  $Q$  y  $Q'$ -

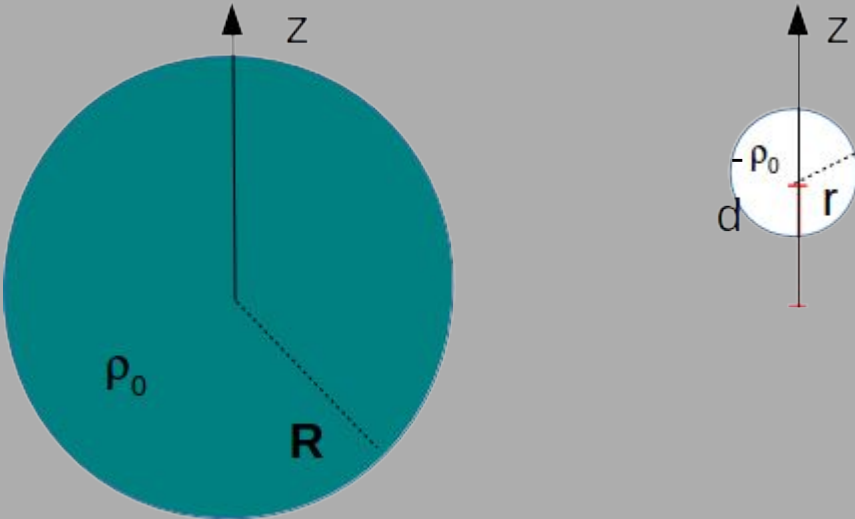
$$Q = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0$$

$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3} \rho_0$$



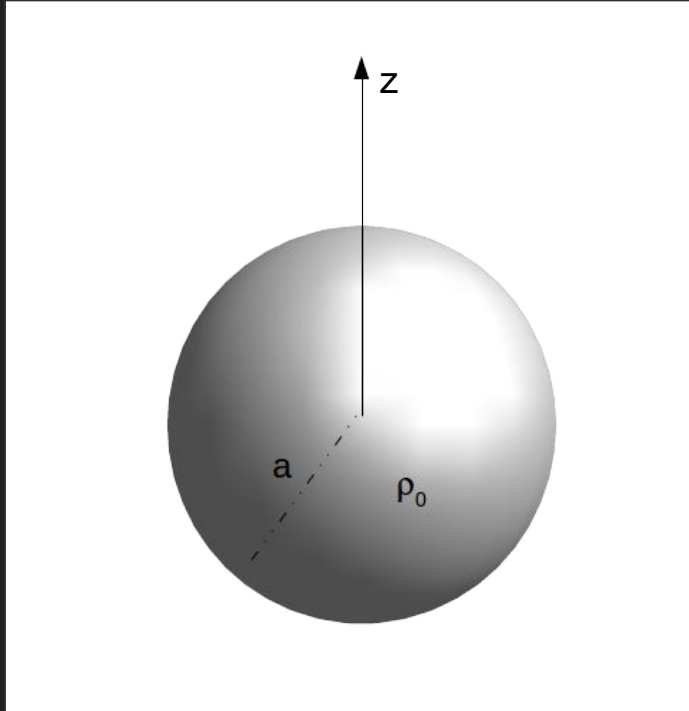


Como las distribuciones de carga son uniformes es equivalente a pensar en este problemas de dos esferas de densidad uniforme como indica la figura.



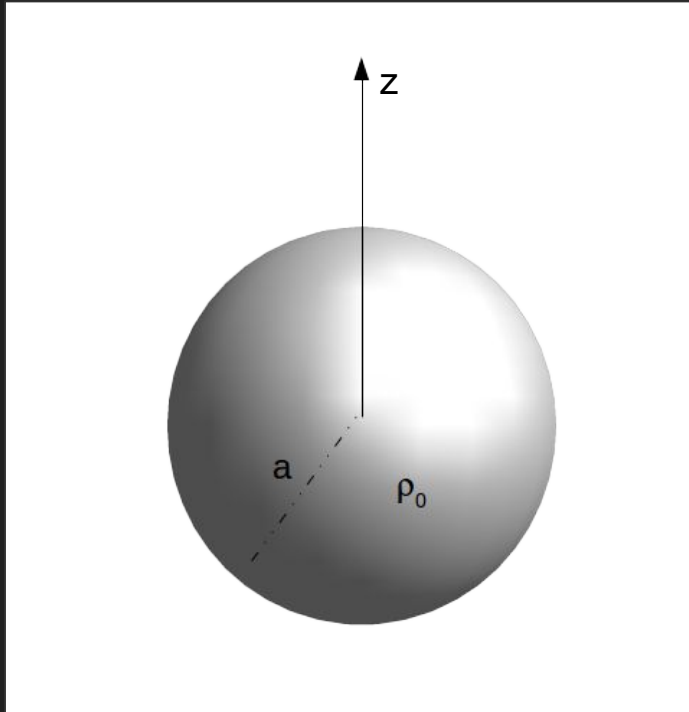
Ahora bien...

¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



Ahora bien...

¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?

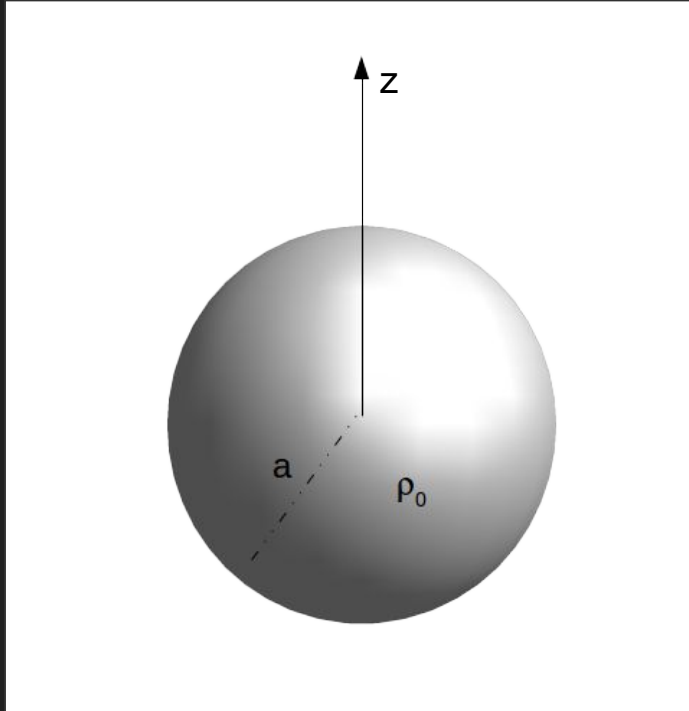


Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Ahora bien...

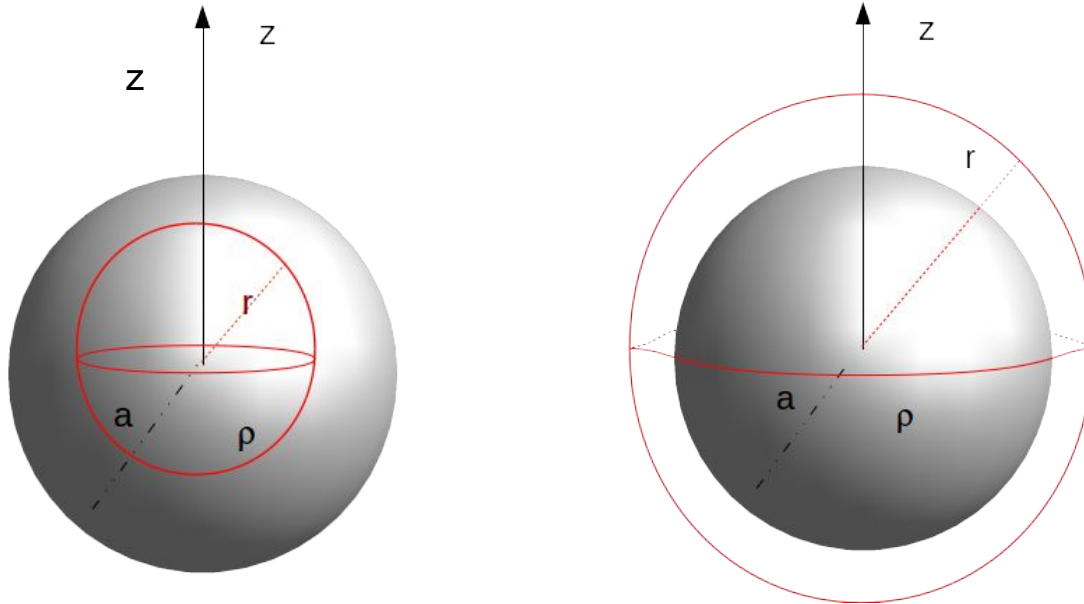
¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



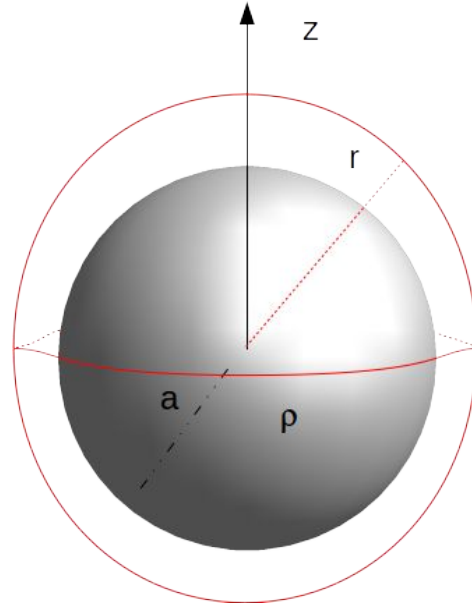
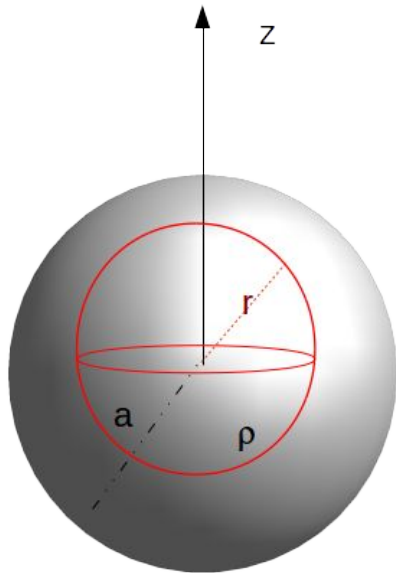
Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

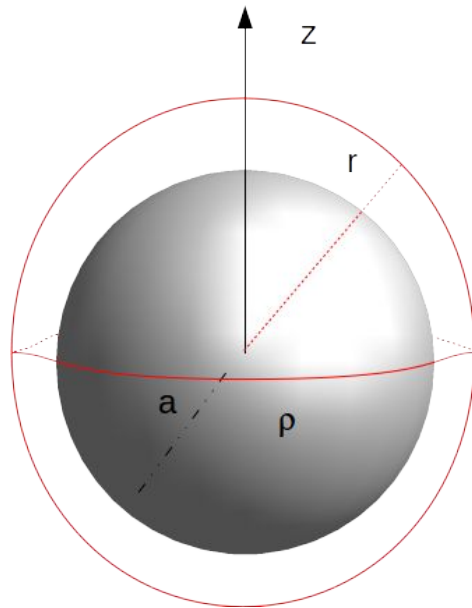
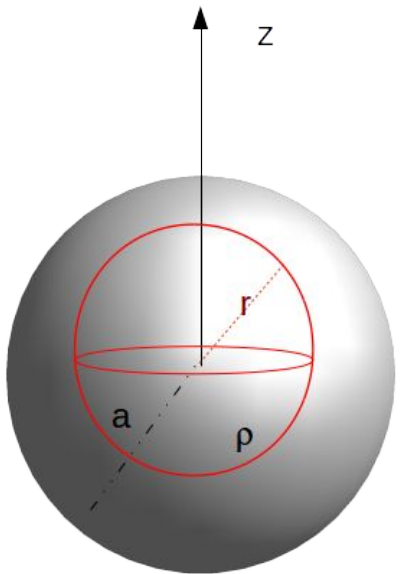
La mejor superficie será un casquete esférico pero debo tener en cuenta que hay carga en volumen y por lo tanto debo calcular el flujo tanto dentro como fuera de la distribución



$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{si } a < r \end{cases}$$

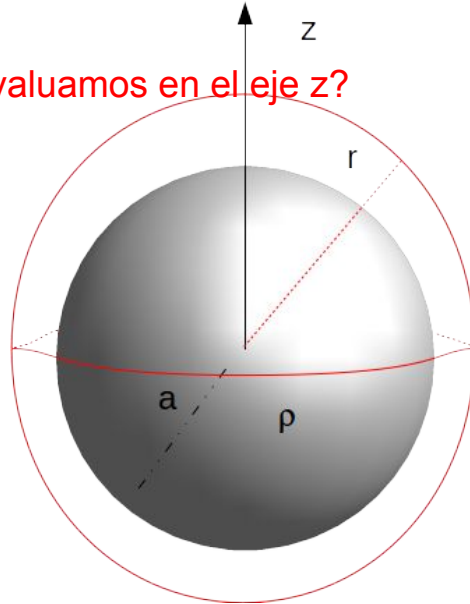
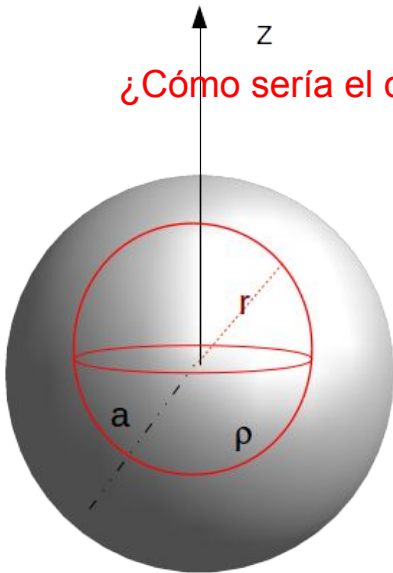


$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{a^3\rho}{3r^2\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$



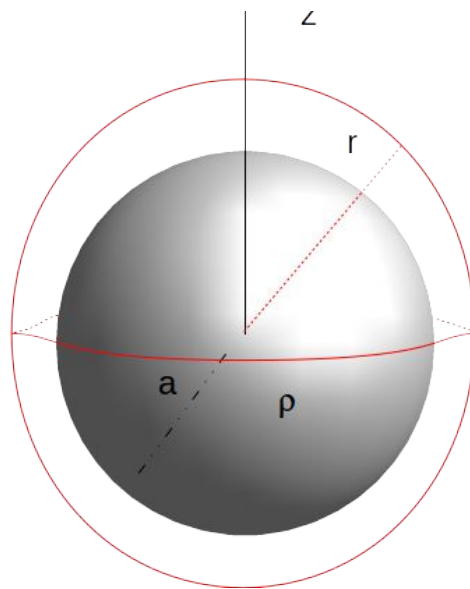
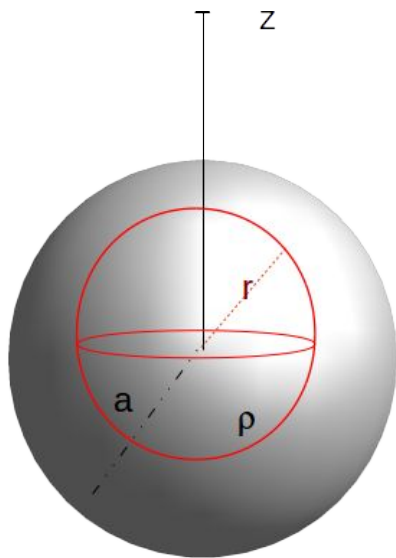
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{a^3\rho}{3r^2\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$

¿Cómo sería el campo si lo evaluamos en el eje z?

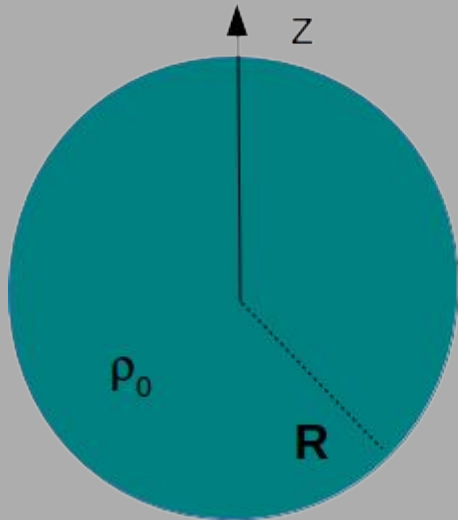




$$\vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{z\rho}{3\epsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < a \\ \frac{a^3 z\rho}{3|z|^3\epsilon_0}\hat{z} & \text{si } a < |z| \end{cases}$$



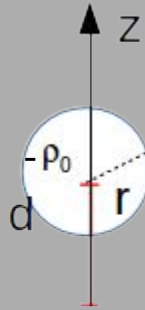
Entonces en este caso podemos decir que el campo sobre el eje z generado por la esfera grande es



$$\vec{E}_{Esf Grande}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{z\rho_0}{3\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } |z| < R \\ \frac{R^3 z\rho_0}{3|z|^3\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } R < |z| \end{cases}$$

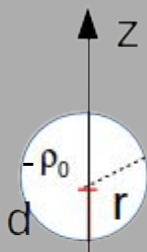
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \rightarrow z - d$$



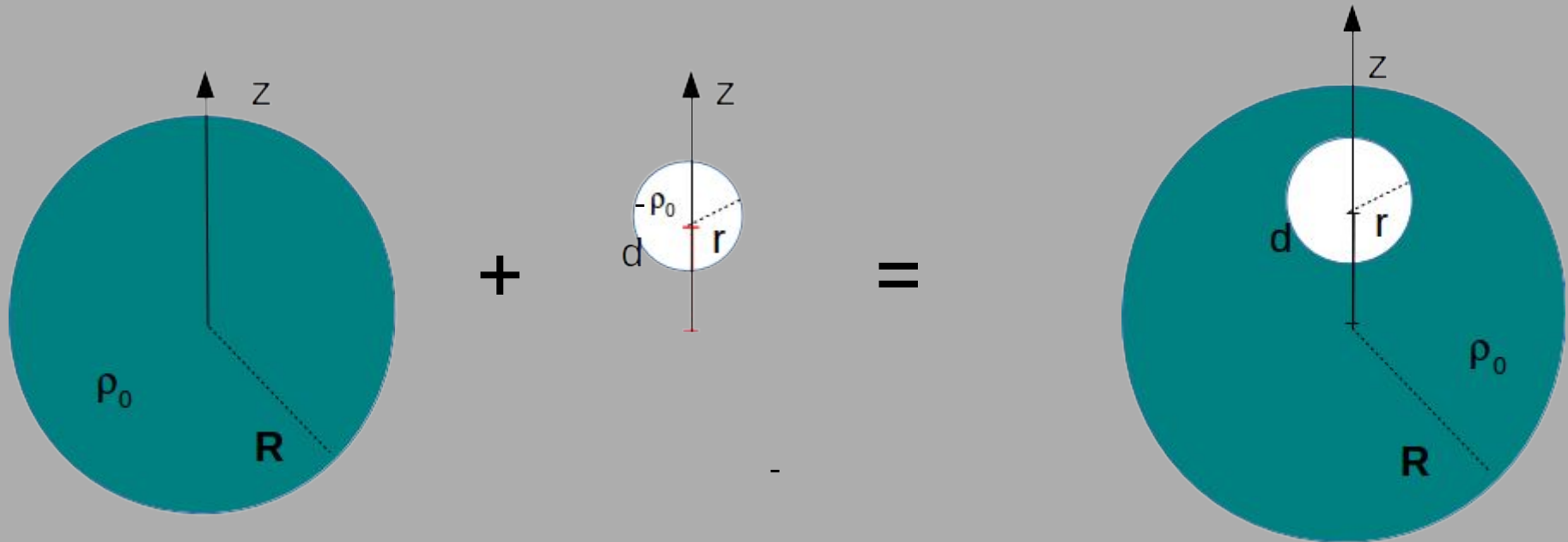
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \rightarrow z - d$$



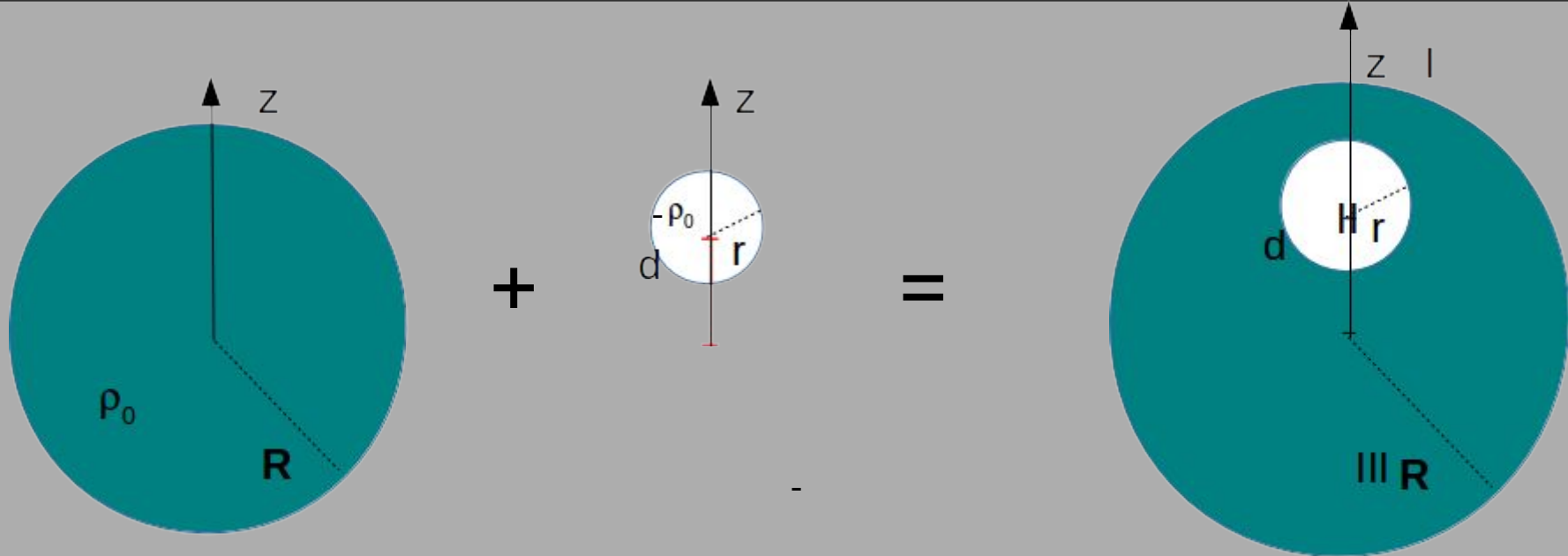
$$\vec{E}_{Esf\ chica}(z\hat{z}) = \begin{cases} -\frac{(z-d)\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < r \\ -\frac{r^3(z-d)\rho_0}{3|(z-d)|^3\epsilon_0}\hat{z} & \text{si } r < |z| \end{cases}$$

Volviendo al problema inicial y conociendo los campos de cada una de las esferas sobre el eje  $z$ . Debemos hacer superposición de los campos generados individualmente.



Como los campos de las esferas no son iguales afuera que adentro, hay que realizar una superposición por sectores. Es decir, para conocer el el campo en

Región I: campo exterior de ambas esferas, Región II: campo interior de ambas esferas y Región III: Campo interior esfera grande y exterior de esfera chica.



$$\vec{E}_{Tot}(z\hat{z}) = \begin{cases} \vec{E}_{Esf\ chica}^{af} + \vec{E}_{Esf\ Grande}^{af} & \text{si } -R > z \\ \vec{E}_{Esf\ chica}^{af} + \vec{E}_{Esf\ Grande}^{ad} & \text{si } -R < z < d - r \\ \vec{E}_{Esf\ chica}^{ad} + \vec{E}_{Esf\ Grande}^{ad} & \text{si } d - r < z < d + r \\ \vec{E}_{Esf\ chica}^{af} + \vec{E}_{Esf\ Grande}^{ad} & \text{si } d + r < z < R \\ \vec{E}_{Esf\ chica}^{af} + \vec{E}_{Esf\ Grande}^{af} & \text{si } R < z \end{cases}$$

