Física 3-Guía 2

Cátedra Dmitruk

Clase 1

Andrea Buccino

Guía 2- Medios materiales

En esta clase comenzaremos con la Guía 2 donde estudiaremos algunos materiales en condiciones electrostática.

Las guías están disponibles en

http://materias.df.uba.ar/f3aa2020c2/guias/

En esta primera clase veremos las características generales de los conductores, el comportamiento de las cargas en condiciones electrostática.

Con el contenido de esta clase podrán resolver los ejercicios 2.1 a 2.5.

Medios materiales: conductores

Los conductores se caracterizan por poseer cargas libres y por lo tanto ser buenos conductores de carga.

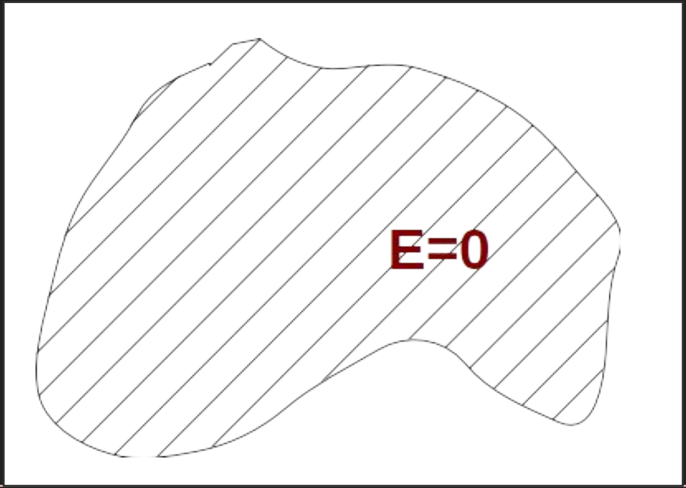
En general en la naturaleza los materiales que mejor conducen la electricidad son los metales. El ejercicio 2.1 nos permitirá ilustrar este punto.

Podemos pensar que los conductores en equilibrio cumplen una serie de características generales.

Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

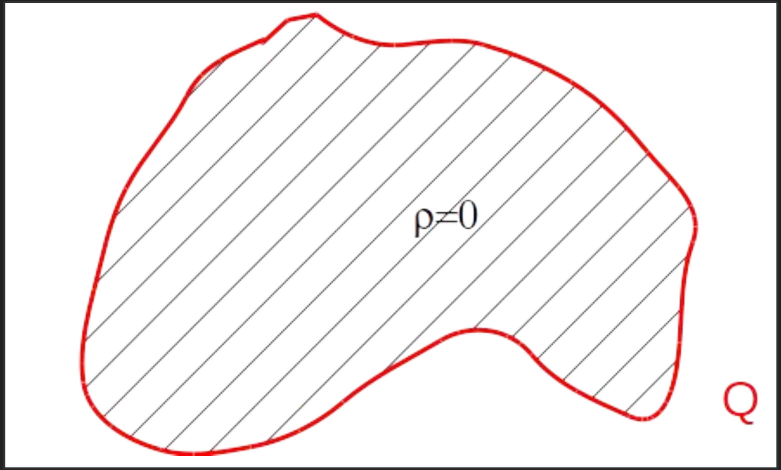
1. El campo E en el interior del conductor es nulo.



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

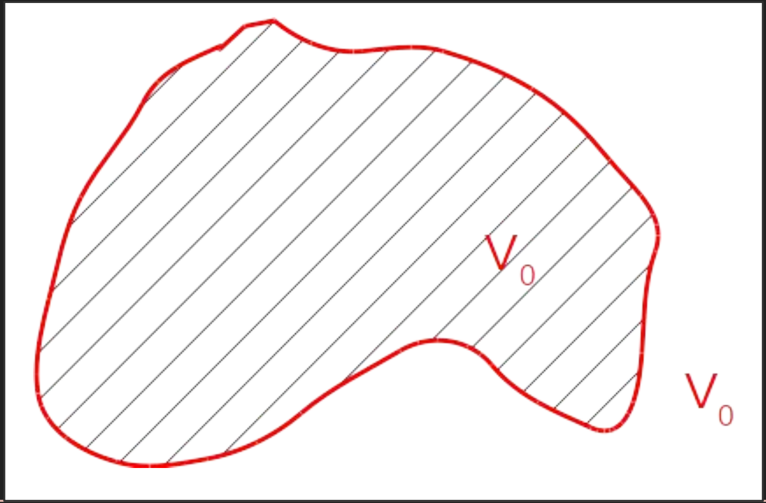
2. La carga se distribuirá en la superficie del conductor (No hay carga en volumen).



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

3. El potencial en todo el conductor es constante (volumen equipotencial).



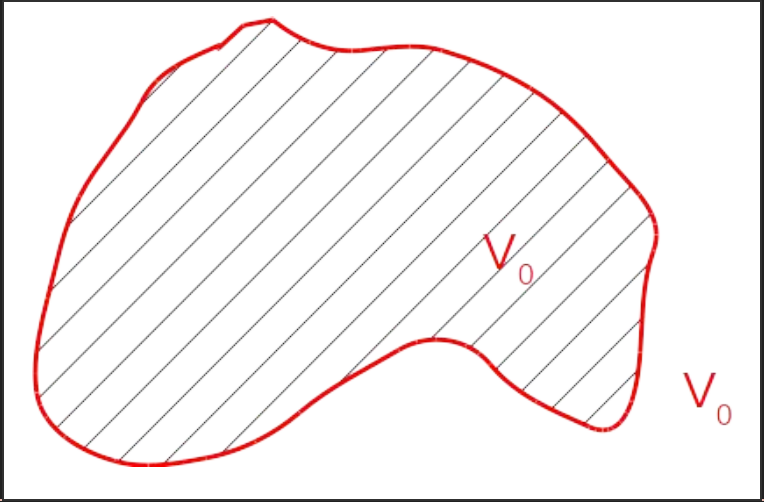
Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

3. El potencial en todo el conductor es constante (volumen equipotencial).

$$\nabla V = -\vec{E}$$

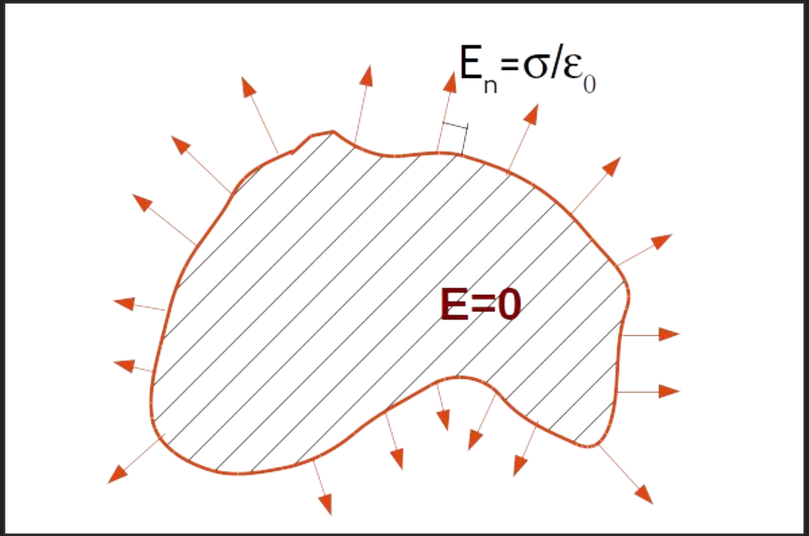
Este punto es equivalente a pedir que el campo es nulo en su interior, ya que la relación entre el campo eléctrico y el potencial está dado a través del gradiente.



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

4. El campo sobre la superficie exterior al conductor sólo tiene componente normal ($E_t|_{Sup}=0$) y su valor es σ/ε_0



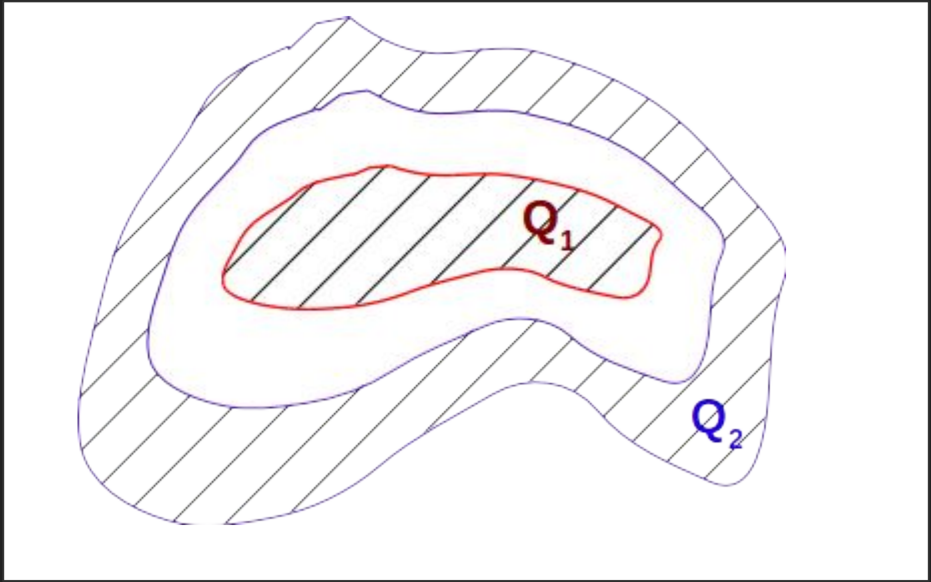
1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

   En los metales las cargas libres son los electrones (q=-1.6021×10^{-19} C), de modo que una carga positiva se logra por vaciamiento de los electrones de esa superficie. Calcule si en una capa atómica superficial hay suficientes electrones para obtener condiciones similares a las del primer inciso, en el caso de que el conductor hueco sea un casquete esférico de radio interior de 4cm y exterior de 6cm. Si (1) el metal es el cobre (Cu) que tiene 8.5×10^{22} át/cm^3 y cada átomo contribuye con un electrón libre. Si (2) es una cáscara esférica semiconductora de silicio (Si) que tiene 5×10^{22} át/cm^3 y el número de portadores libres puede variar segun la temperatura y grado de impurezas entre 10^{14} cm^{-3} y 10^{19} cm^{-3}.

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

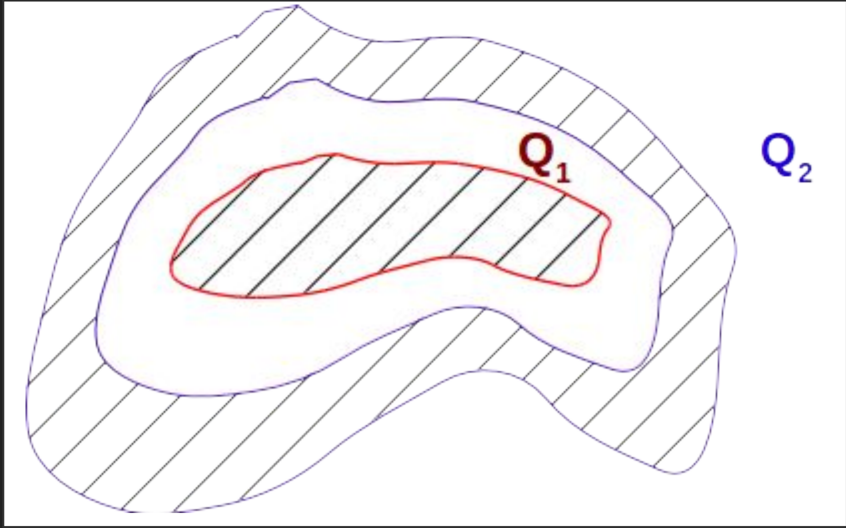
- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

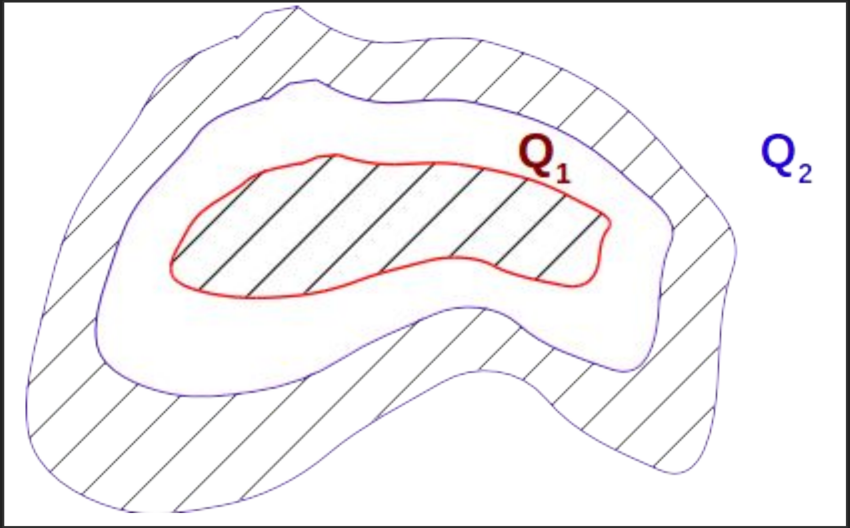
Sabemos que las cargas en los conductores se van a distribuir en las superficies.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

    - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
    - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
    - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

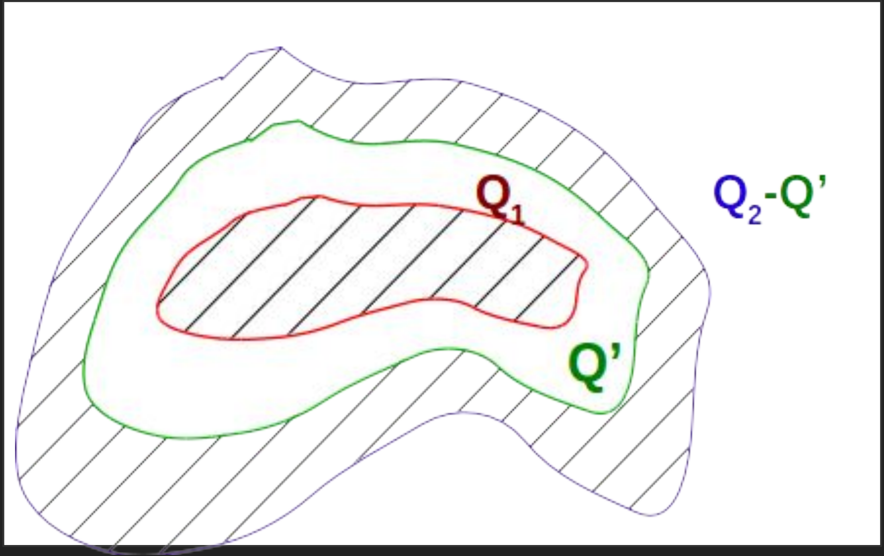
1. En el conductor interior se va a distribuir en la superficie indicada en rojo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

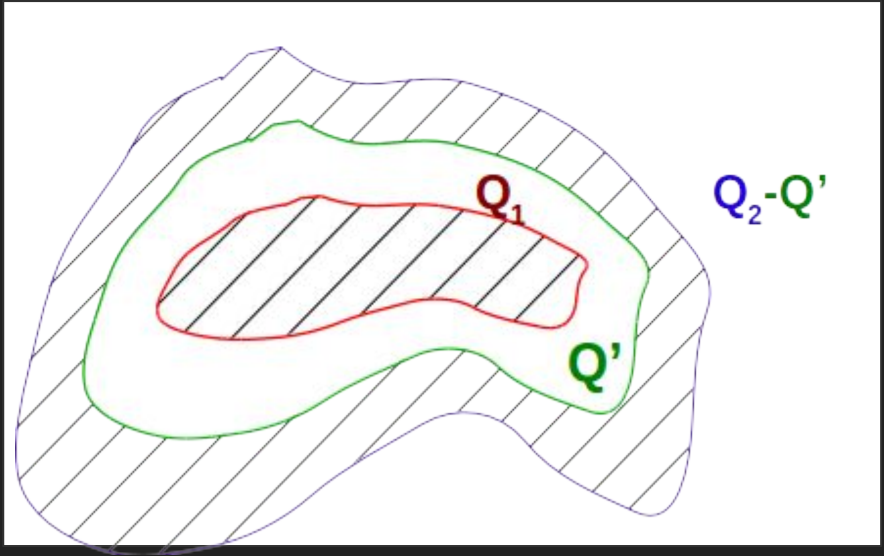
2.En el conductor exterior también se distribuirá en sus superficies interna y externa.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

2.En el conductor exterior también se distribuirá en sus superficies interna y externa.

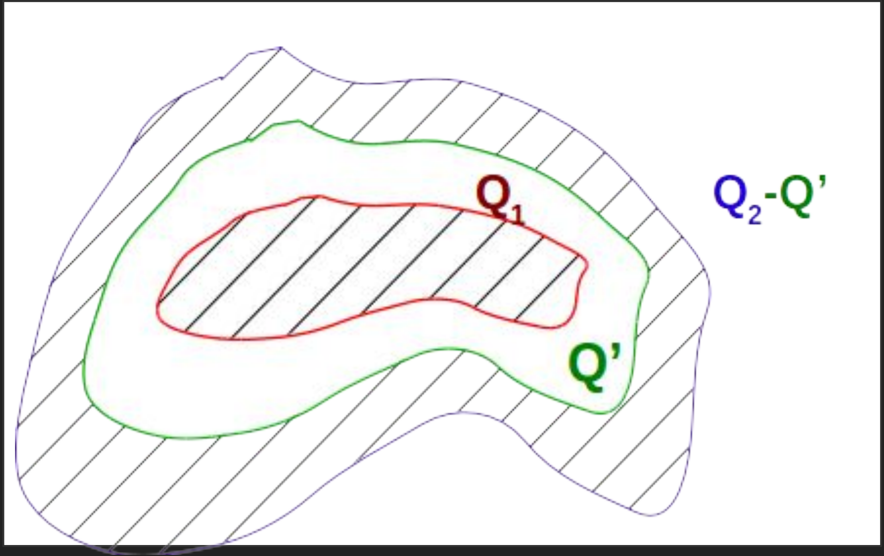


¡¡AL ESTAR AISLADOS SE CONSERVA LA CARGA!!

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

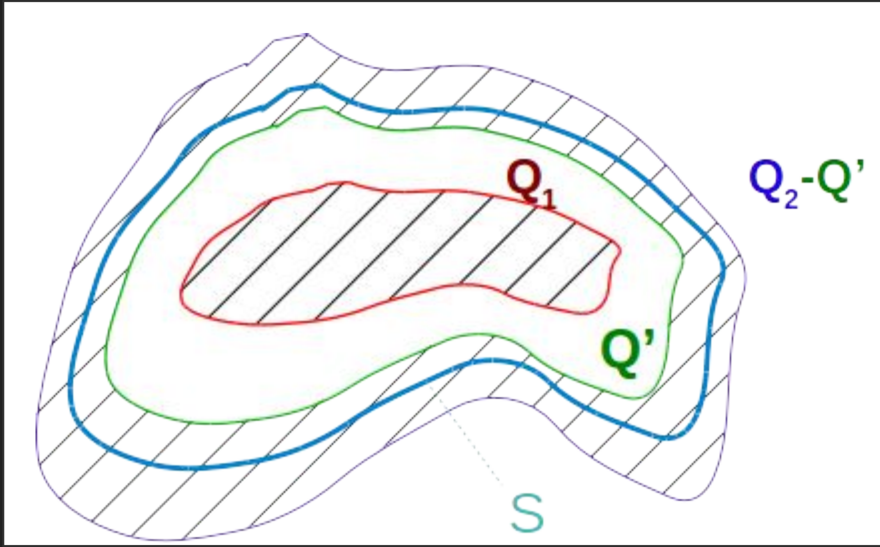
Pero…
¿Cómo se distribuirá?



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

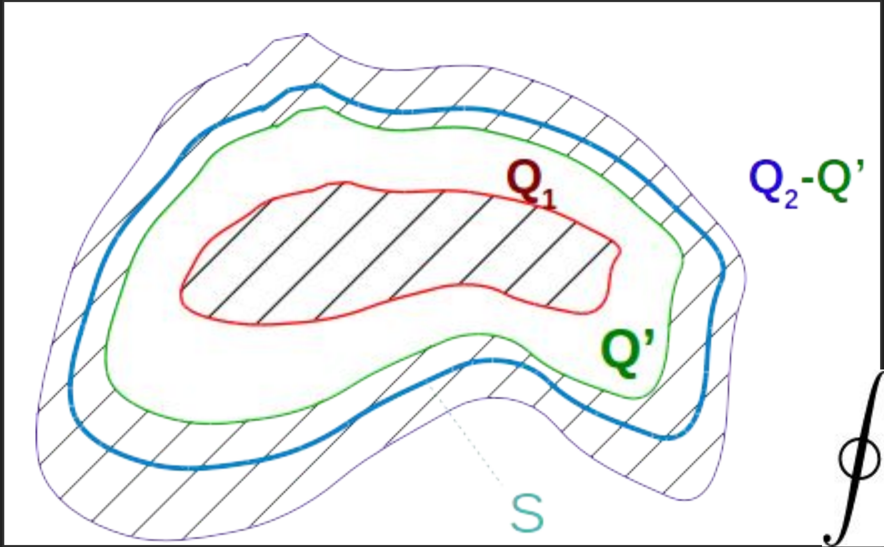
Si calculamos el campo dentro del segundo conductor con la Ley de Gauss con la superficie S.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

Si calculamos el campo dentro del segundo conductor con la Ley de Gauss con la superficie S.



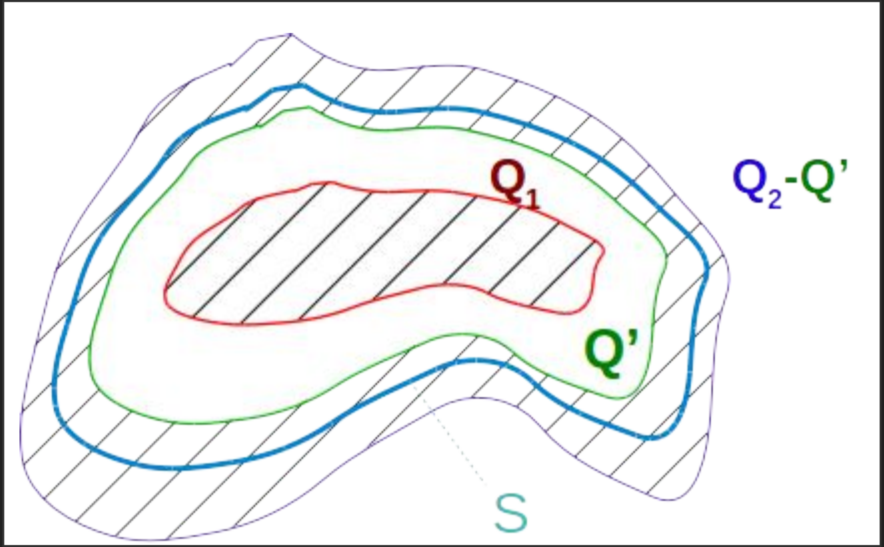
$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = Q_1 + Q'$$



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

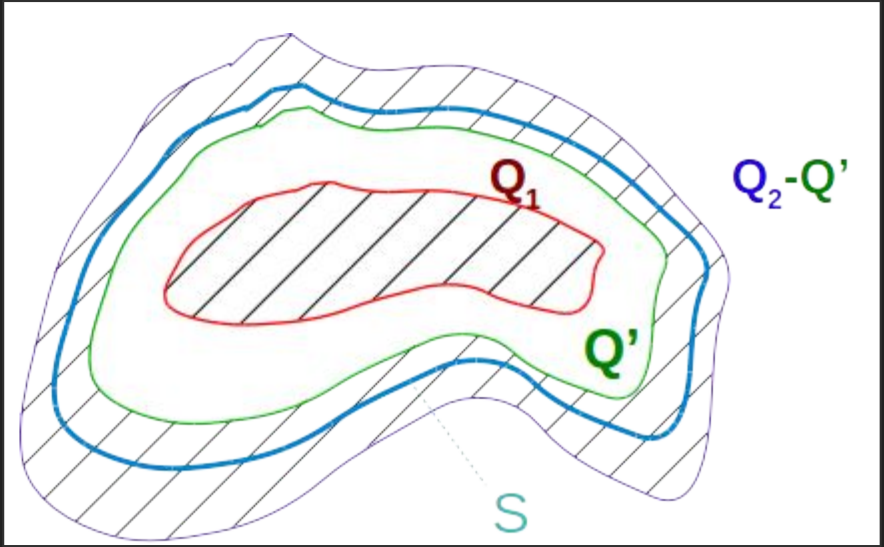
- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = Q_1 + Q'$$

$$E = 0$$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 0$$

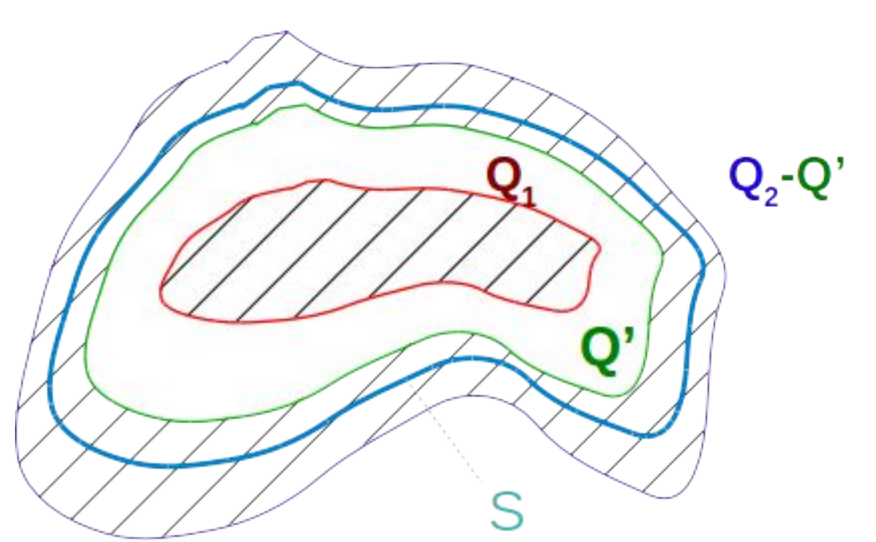


1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$Q_{enc} = Q_1 + Q' = 0$$

$$Q' = -Q_1$$

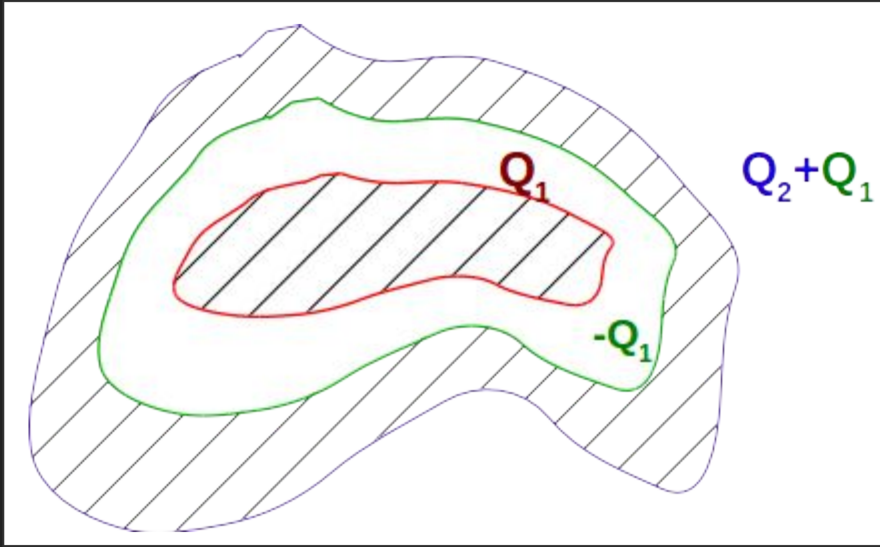


1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$Q_{enc} = Q_1 + Q' = 0$$

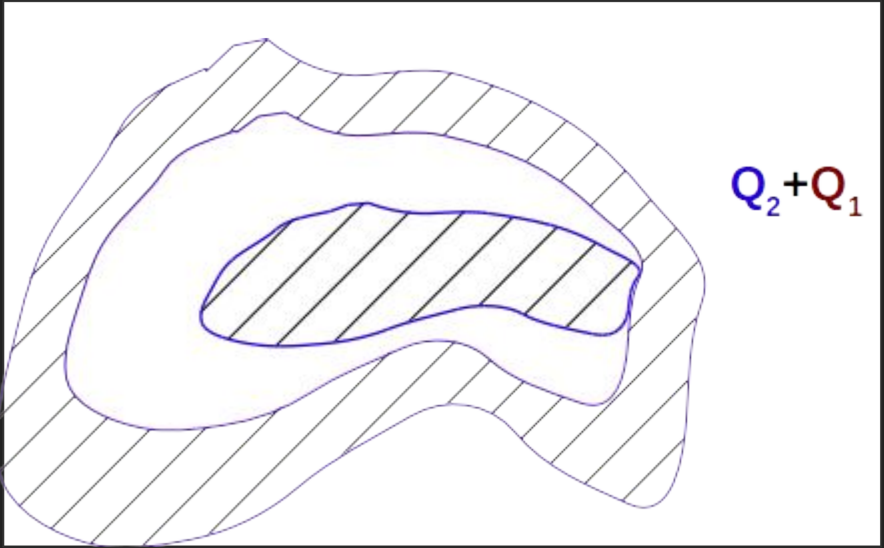
$$Q' = -Q_1$$



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

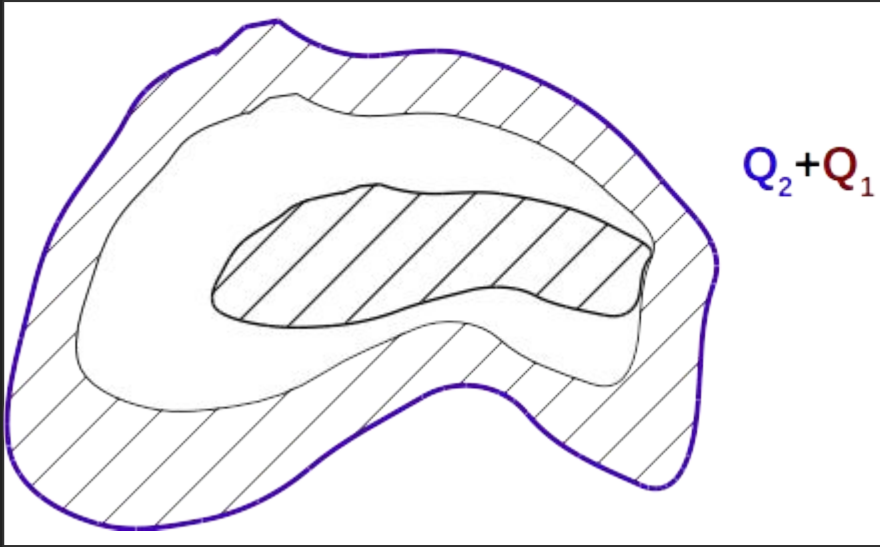
Al tocarse ambos conductores la carga se redistribuye y debemos pensar en un único conductor con carga total Q_2+Q_1. Como ambos conductores están aislados, la carga se conserva.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

La carga se distribuye en la superficie exterior del nuevo volumen conductor, de manera de garantizar que el campo en el interior del conductor es nulo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

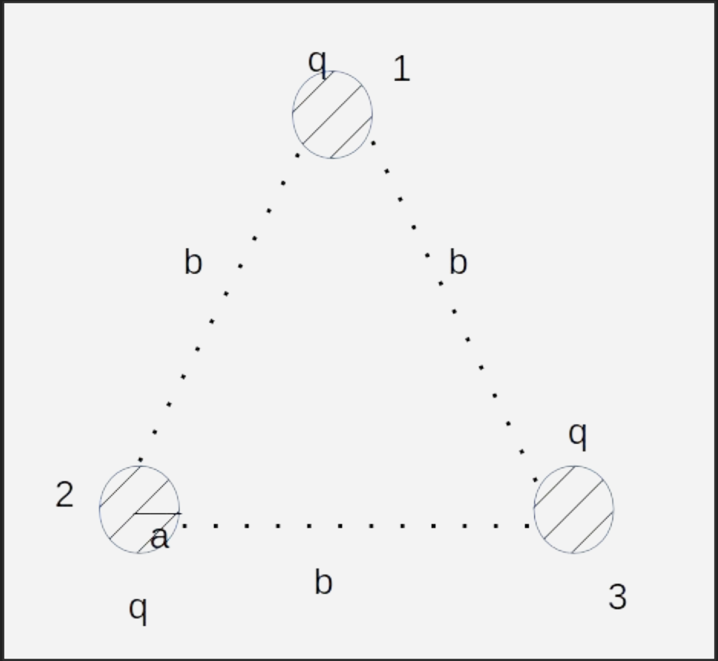
   En los metales las cargas libres son los electrones (q=-1.6021×10^{-19} C), de modo que una carga positiva se logra por vaciamiento de los electrones de esa superficie. Calcule si en una capa atómica superficial hay suficientes electrones para obtener condiciones similares a las del primer inciso, en el caso de que el conductor hueco sea un casquete esférico de radio interior de 4cm y exterior de 6cm. Si (1) el metal es el cobre (Cu) que tiene 8.5×10^{22} át/cm^3 y cada átomo contribuye con un electrón libre. Si (2) es una cáscara esférica semiconductora de silicio (Si) que tiene 5×10^{22} át/cm^3 y el número de portadores libres puede variar segun la temperatura y grado de impurezas entre 10^{14} cm^{-3} y 10^{19} cm^{-3}.

Vol. casquete esférico: $4/3\pi(R_{ext}^3-R_{int}^3)$

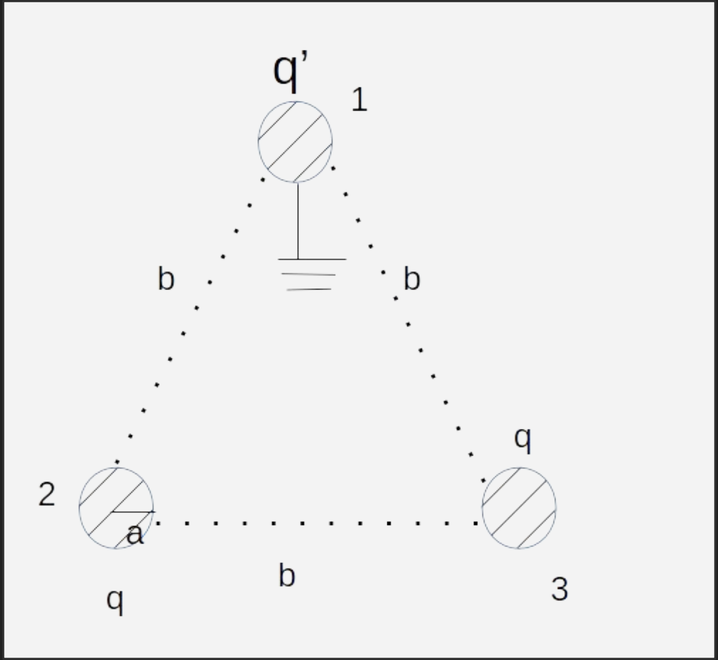
Q_{Cu}=número de atomos*q=Vol*$8.5\text{x}10^{22}$cm^{-3}*q

Q_{Si}=números de portadores*q=Vol*10^{14}cm^{-3}*q o Vol*10^{19}cm^{-3}*q

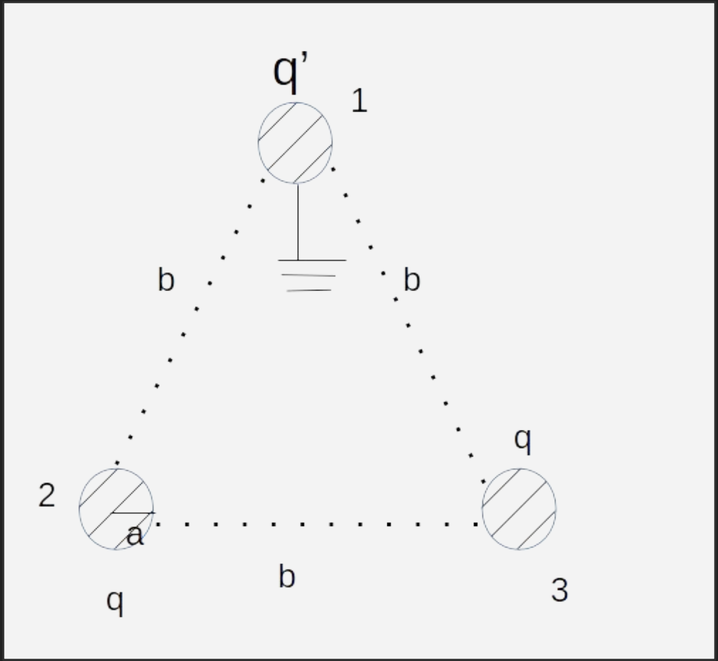
3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?

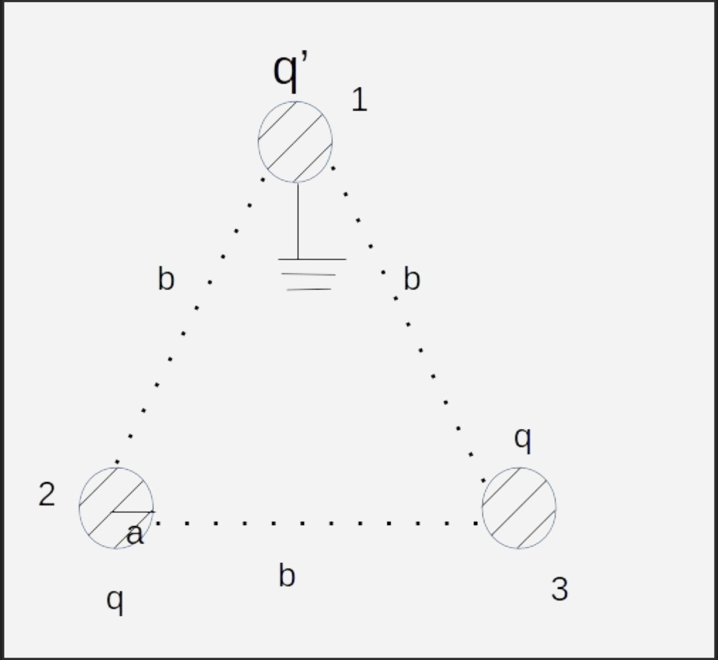


3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula….pero cómo se genera ese potencial?

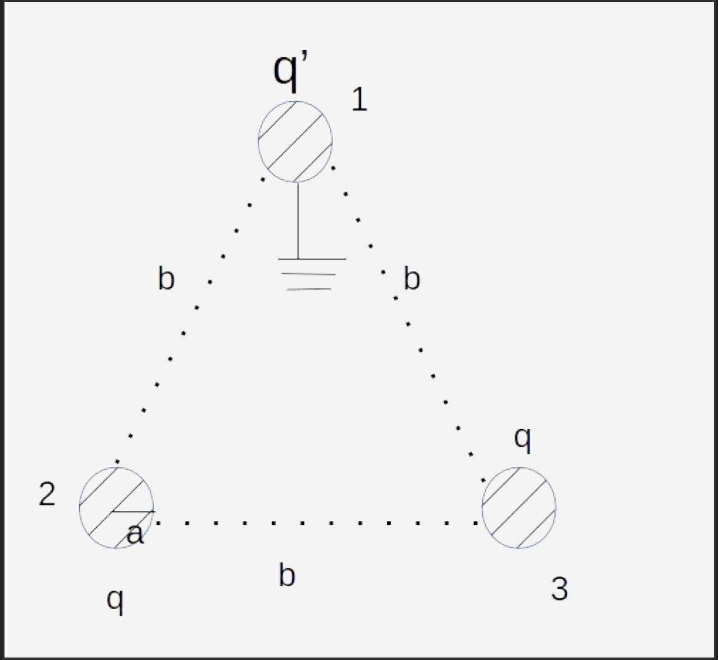
3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



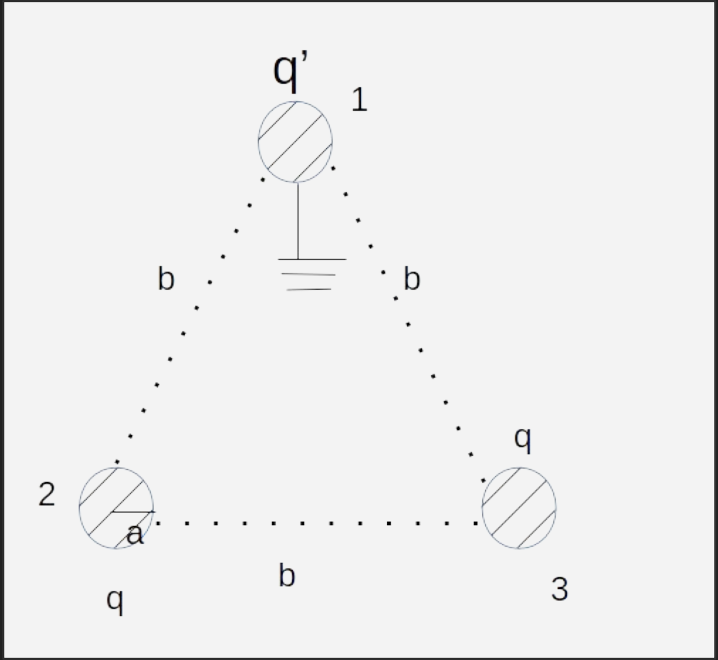
Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

Es decir,

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



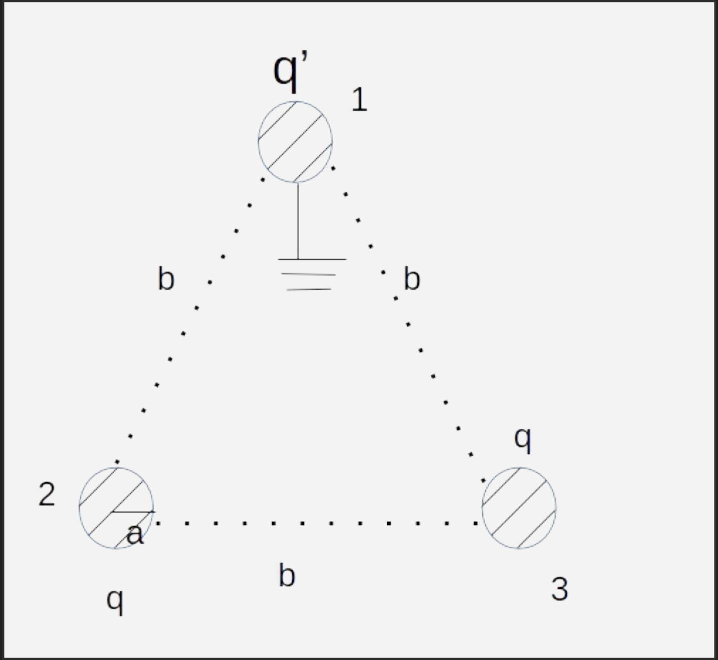
Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

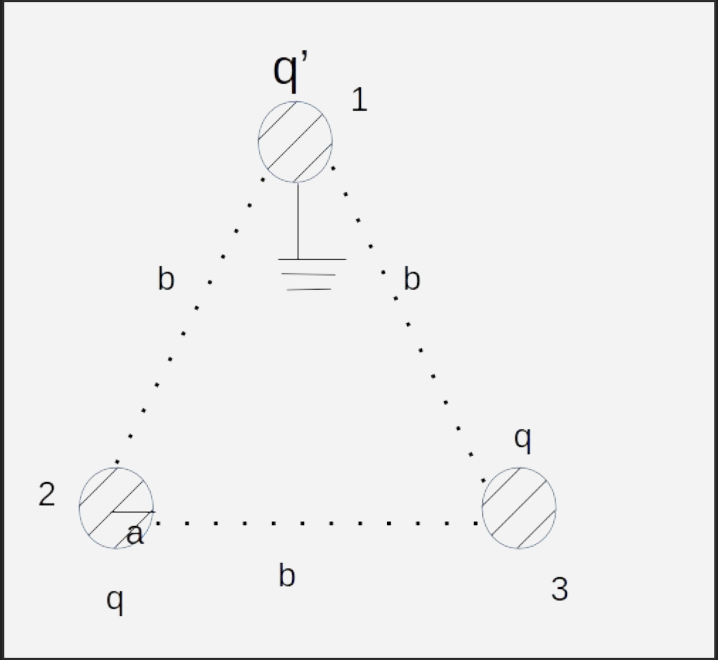
¿Pero por qué cambié q por q' en la esfera conectada a Tierra?

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Al cargarse la esfera a Tierra, esta no se encuentra más aislada. Por lo tanto puede cargarse con una carga q' cualquiera de manera de garantizar que el potencial en la superficie de la esfera es nula.

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?

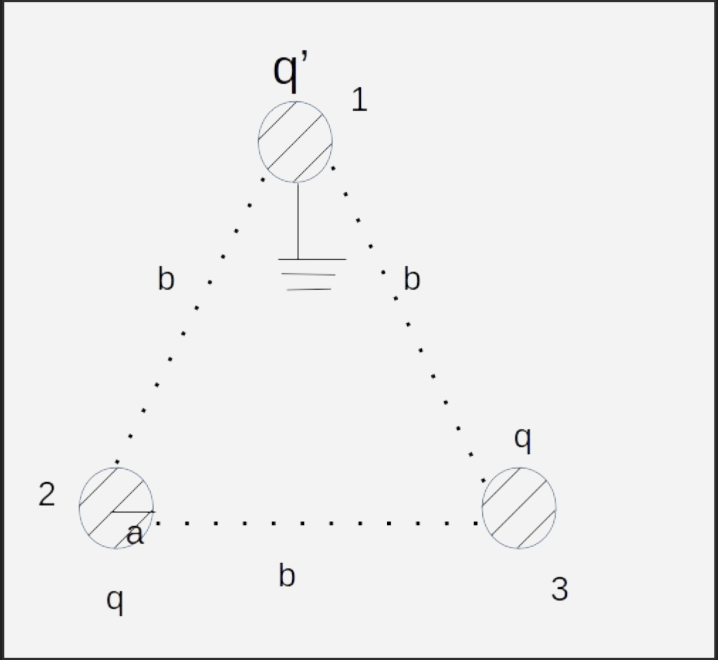


Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

¿Cómo son estas contribuciones?

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

¿Cómo son estas contribuciones?

Como b>>a podemos pensar en contribuciones puntuales de las cargas q. Entonces,

$$V_q(r = b) = \frac{kq}{b}$$

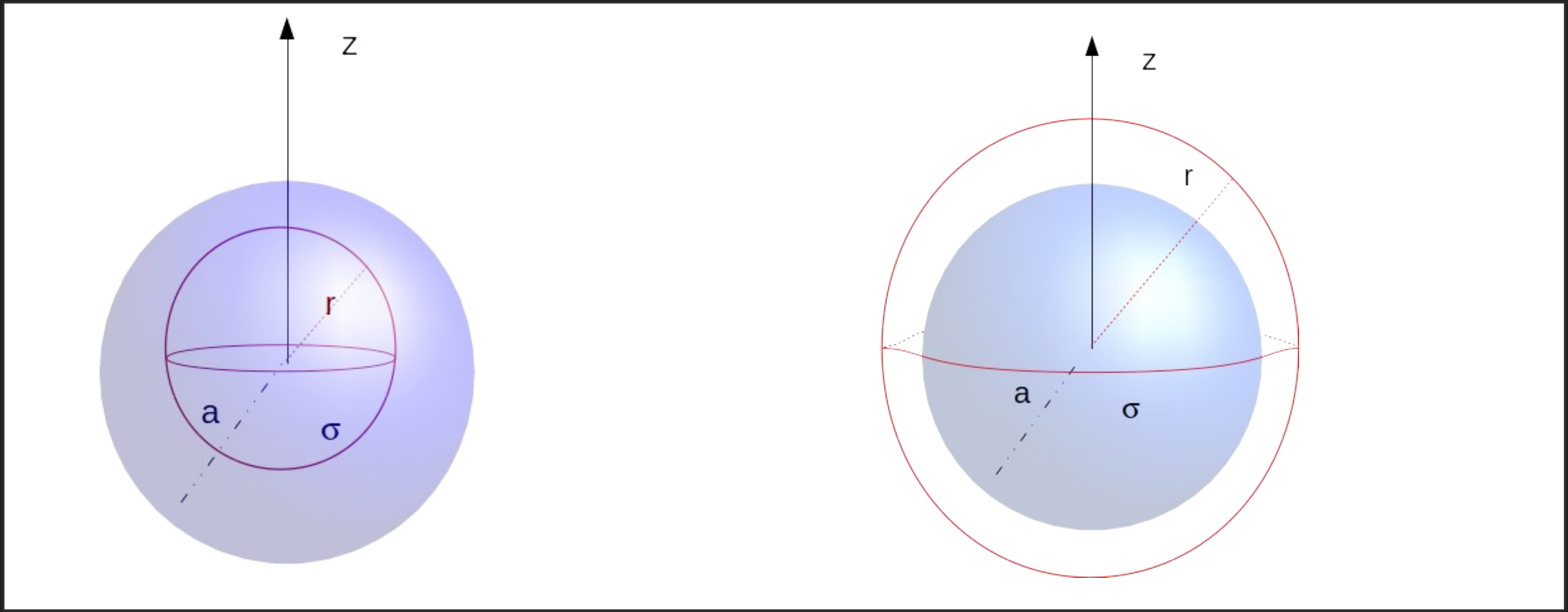
Pero cómo es el potencial de una esfera conductora...sería equivalente a una esfera cargada en superficie. Es decir, dada una esfera de radio a, tenemos:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } r = a \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases}$$

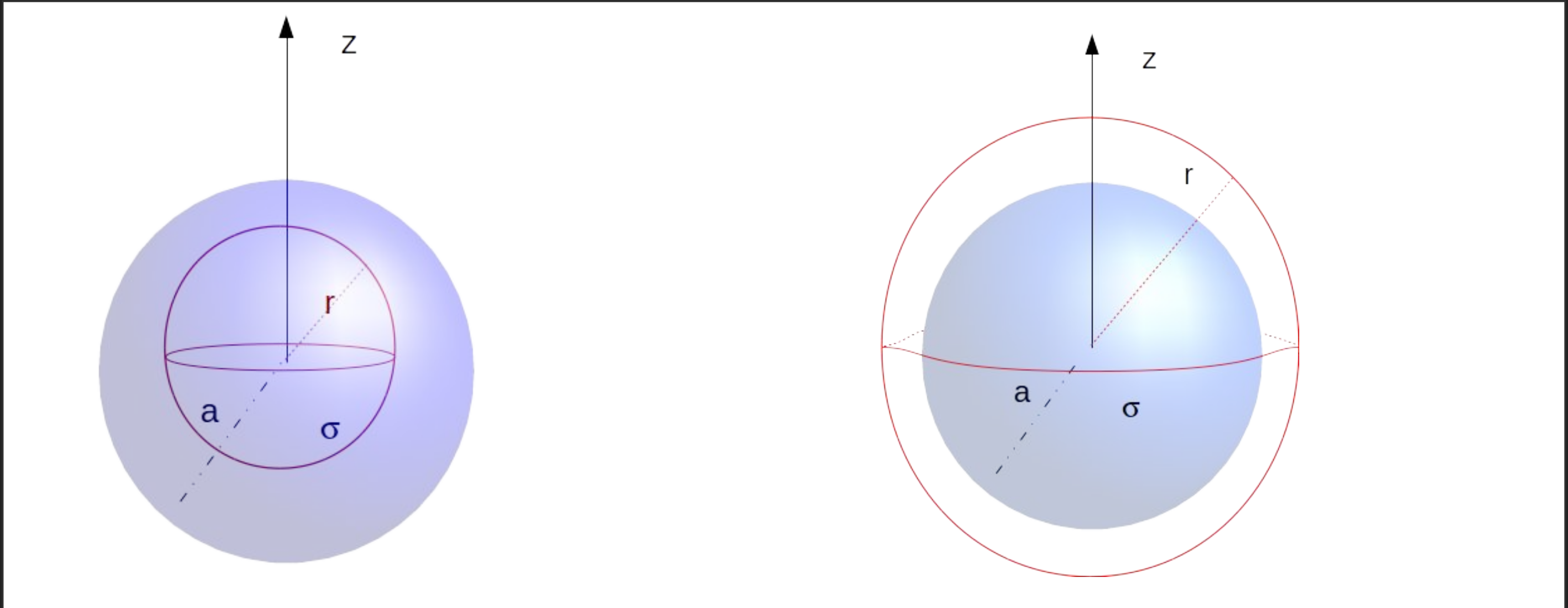
Entonces debemos calcular el potencial y para ello necesitamos el campo eléctrico que se puede calcular por la Ley de Gauss.

Cálculo de potencial de un casquete esférico con distribución de carga uniforme

Primero calculo el campo eléctrico a partir de Gauss, considerando dos superficies.



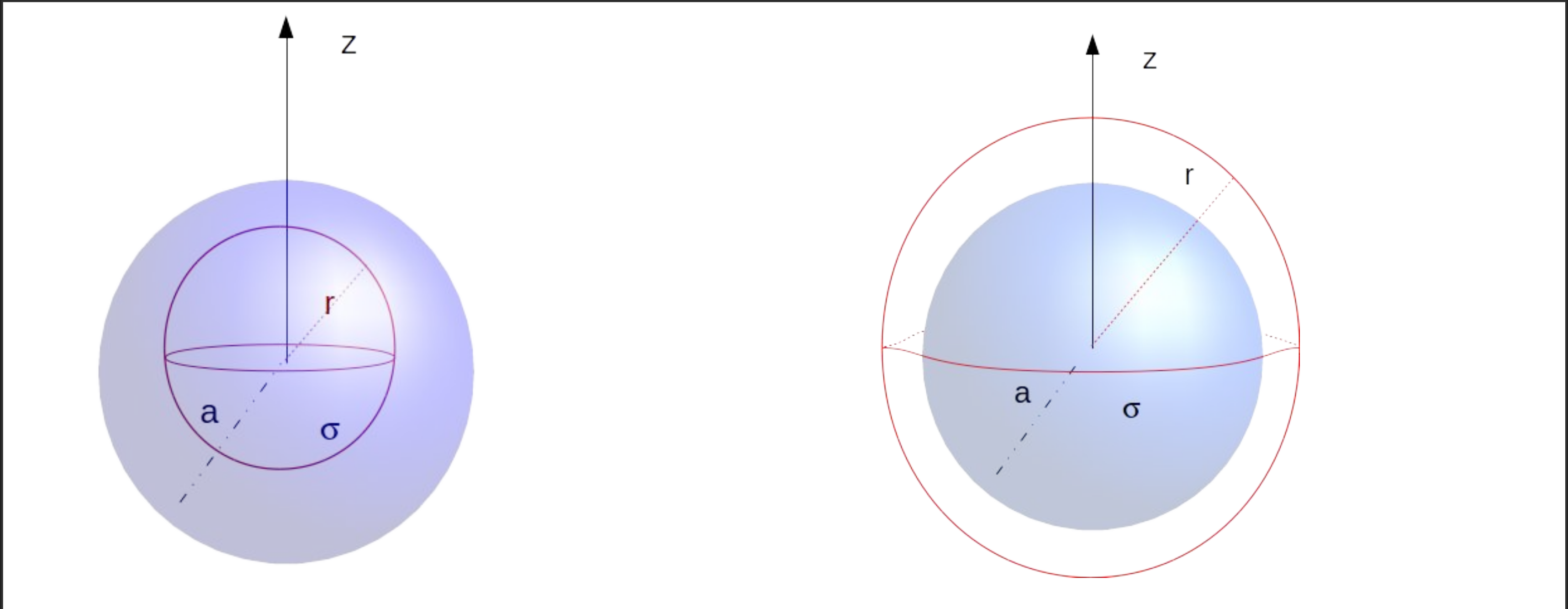
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



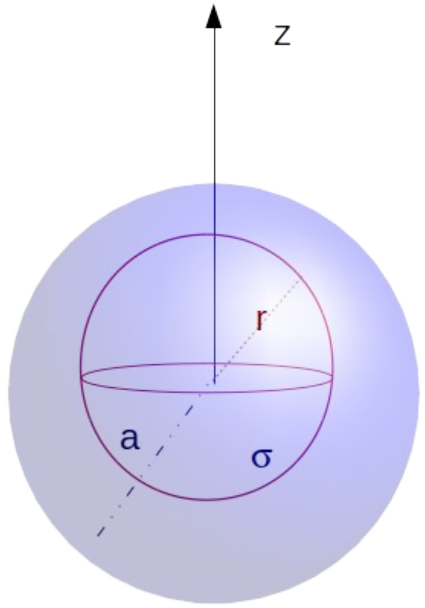
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

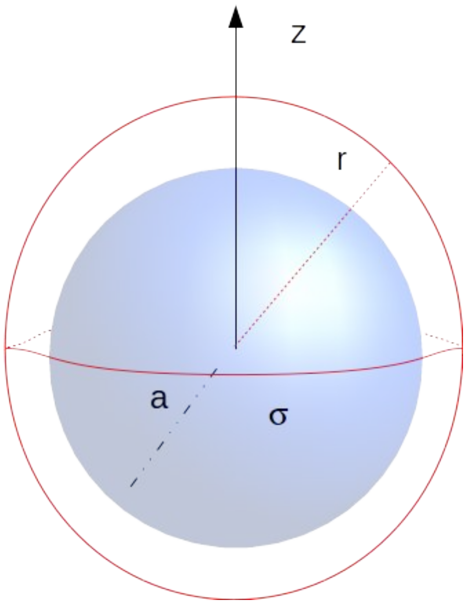
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$\vec{ds} = r^2 sin\theta d\phi d\theta\hat{r}$$

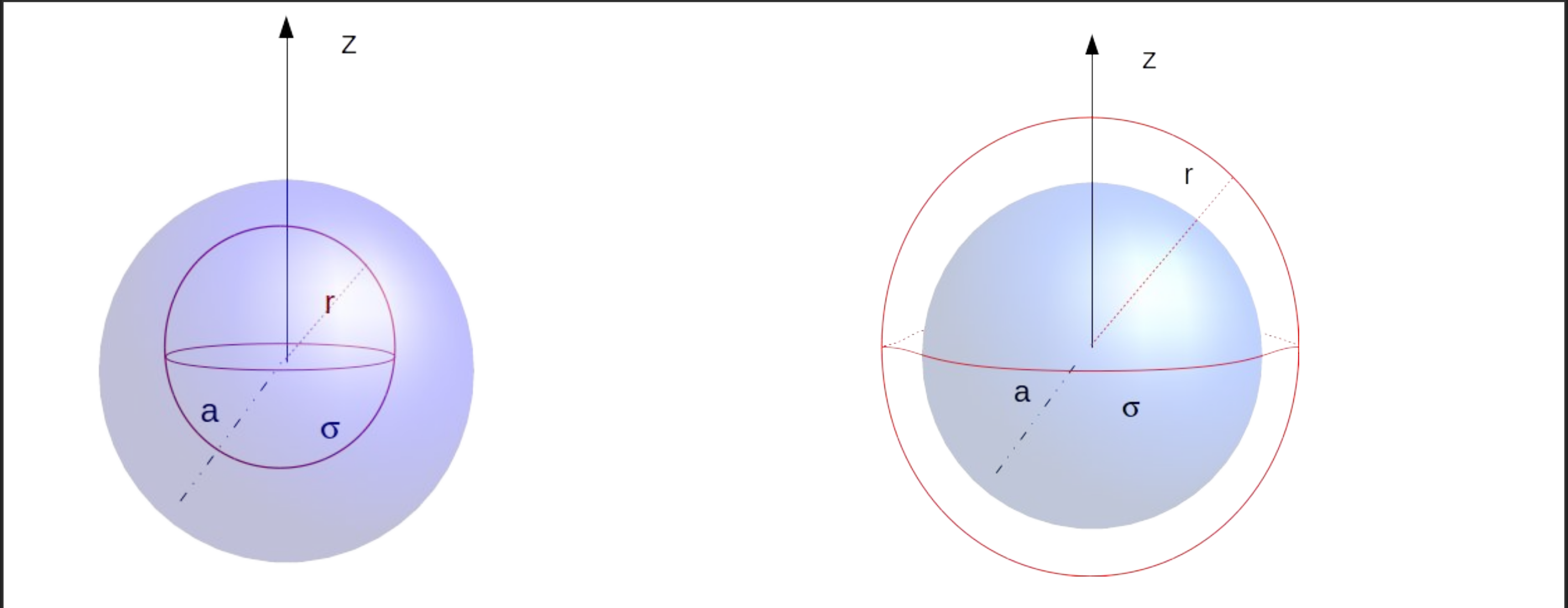


$$\oint \vec{E}(\vec{r}).\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}.r^2 sin\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

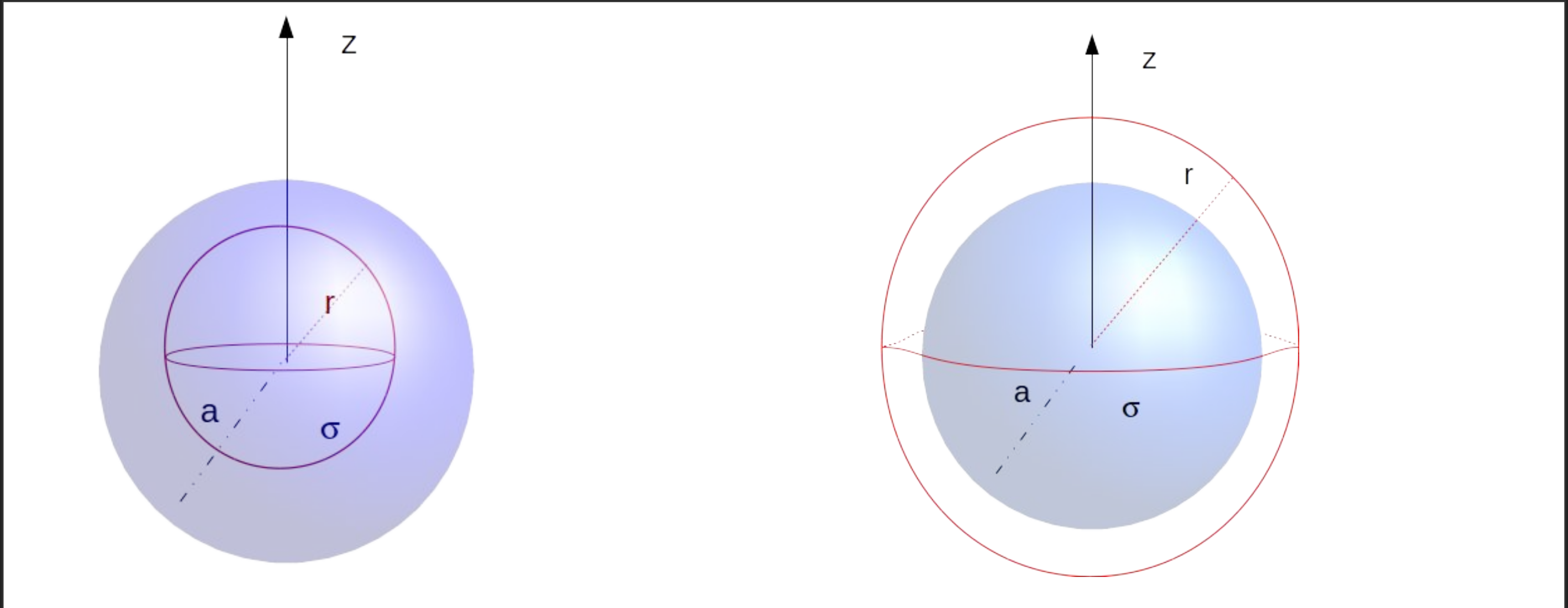




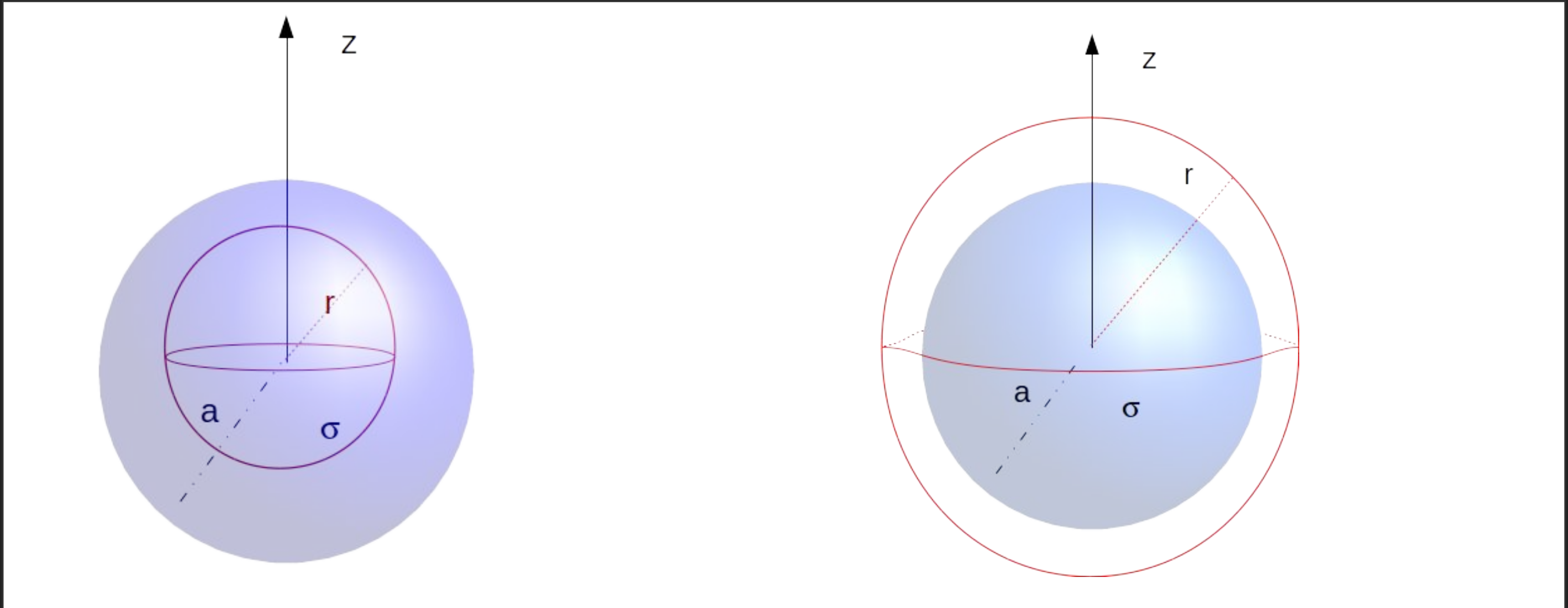
$$Q_{enc} = \begin{cases} \sigma_0 4\pi a^2 & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$



$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \sigma_0 4\pi a^2/\varepsilon_0 & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r^2\varepsilon_0)\hat{r} & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$



Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr\hat{r} = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) + A & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

Ajustamos las constantes con el cero de potencial y continuidad...

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr\hat{r} = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) + A & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

$r \to \infty \; V(r) \to 0$

entonces $A \to 0$

Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

Por continuidad, $B = \sigma_0 a/\varepsilon_0$

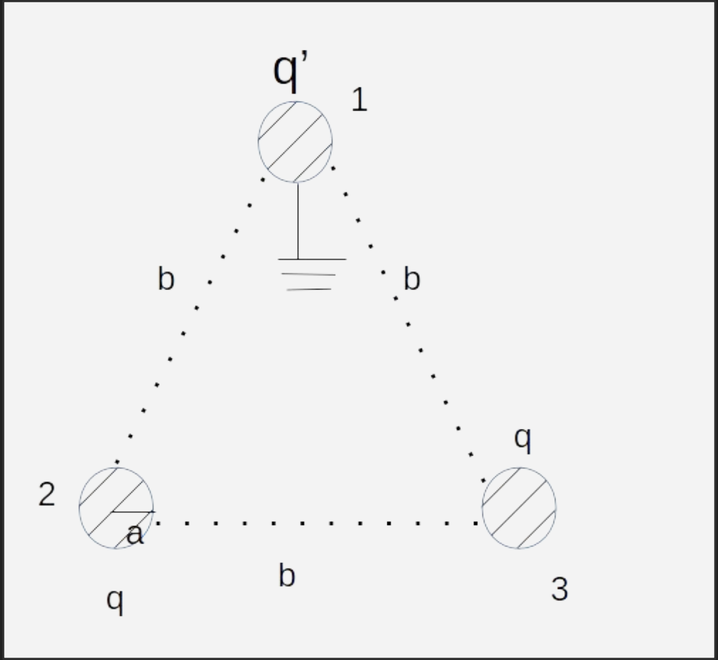
Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) & \text{si } r > a \\ \sigma_0 a/\varepsilon_0 & \text{si } r < a \end{cases}$$

O sea que dentro de un casquete esférico el potencial es constante, consistente con los conductores en equilibrio.

Volvemos al problema 2.3...

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

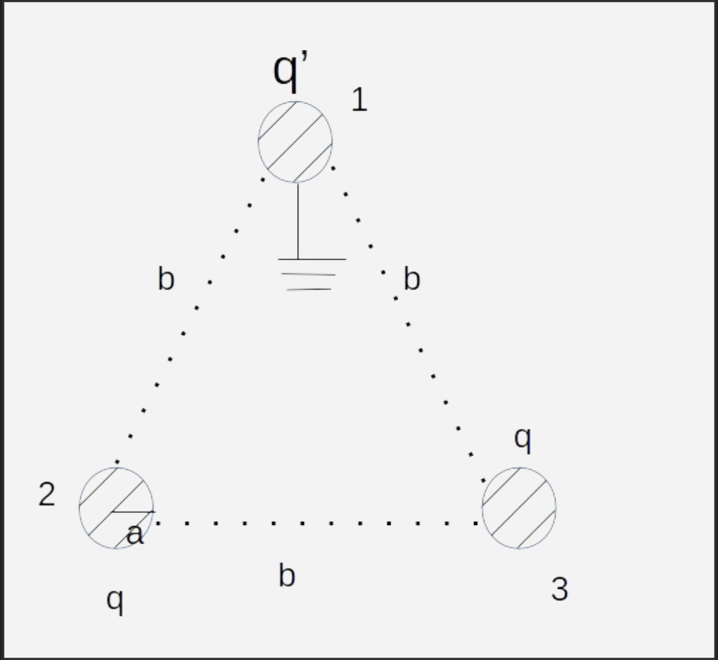
$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{4\pi a \varepsilon_0}$$

$$q' = 4\pi a^2 \sigma_0$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

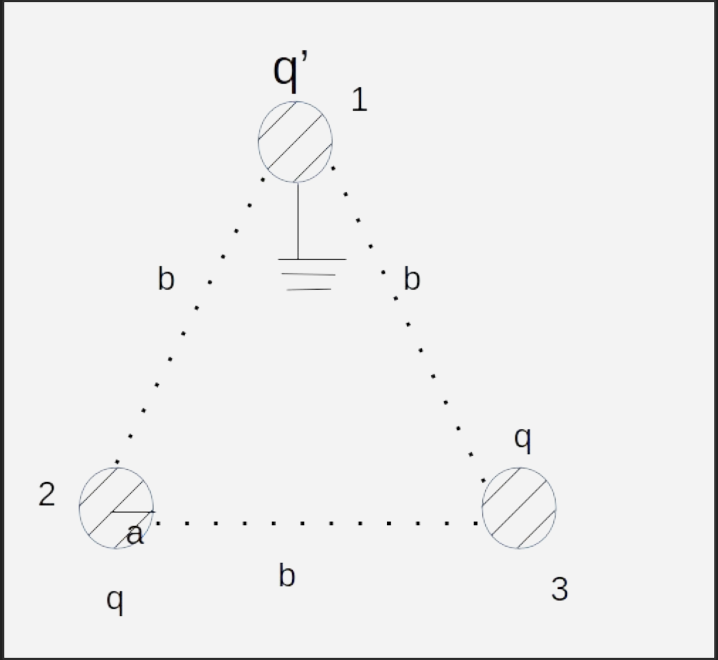
$$V_{q'}(r=a) = \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2\sigma_0}{4\pi a\varepsilon_0}$$

$$q' = 4\pi a^2\sigma_0$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{kq'}{a}$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



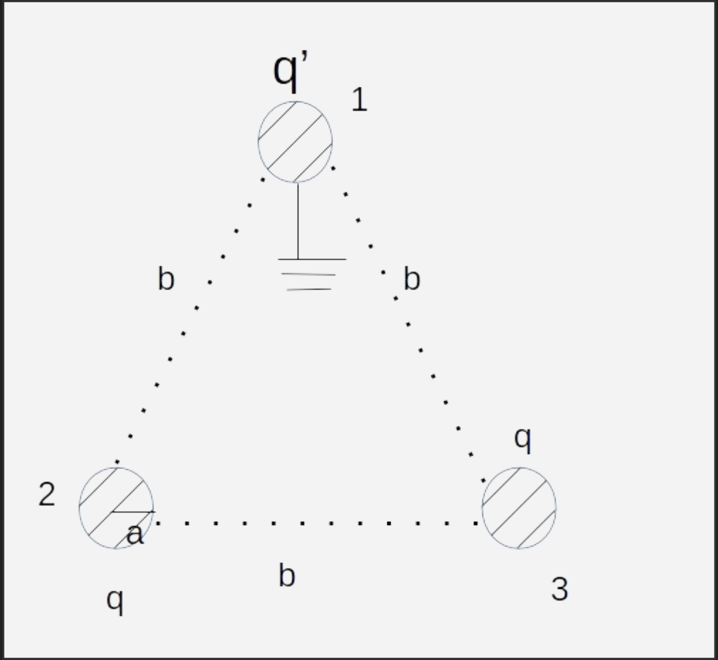
Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

$$V_q(r=b) = \frac{kq}{b}$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{kq'}{a}$$

$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

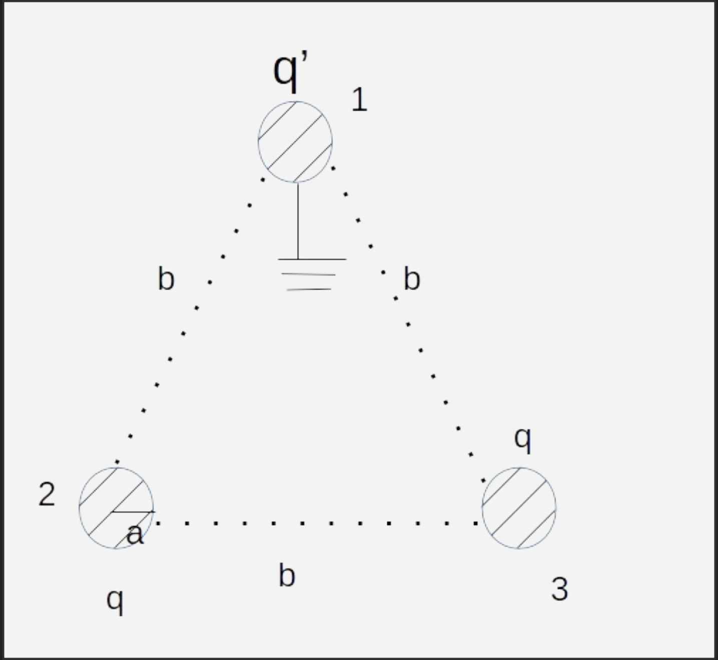


$$V_q(r=b) = \frac{kq}{b}$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{kq'}{a}$$

$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$

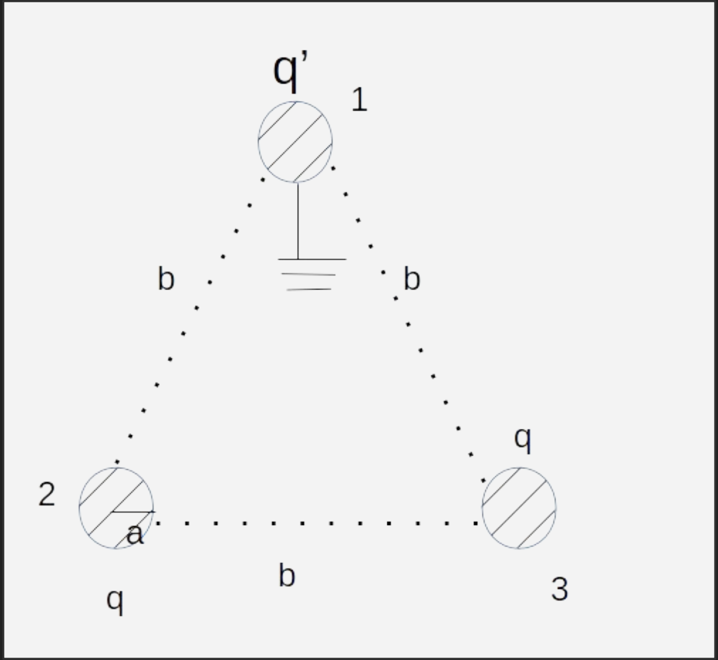
$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$



$$V_1 = 0$$

$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

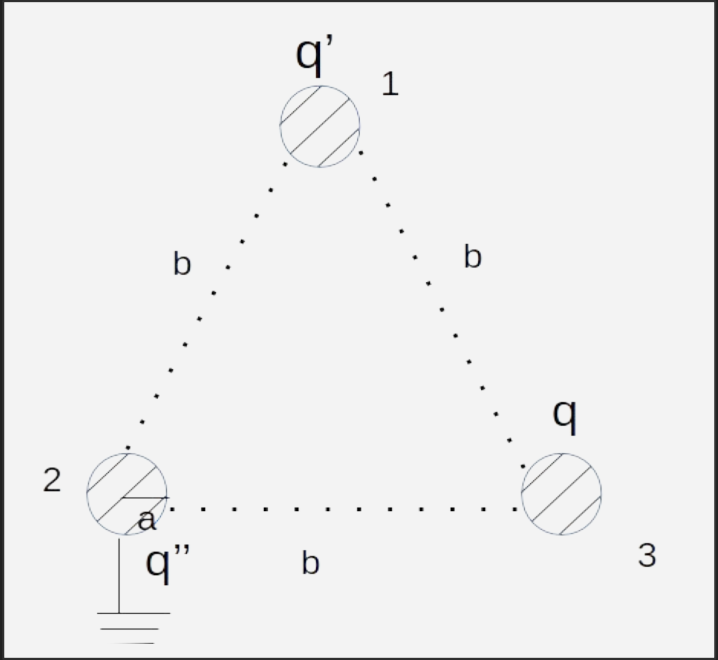
$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$



$$V_1 = 0$$

$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

Luego se desconecta la carga 1 que al quedar aislada con carga q’, y la carga 2 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q’’ para que $V_2=0$

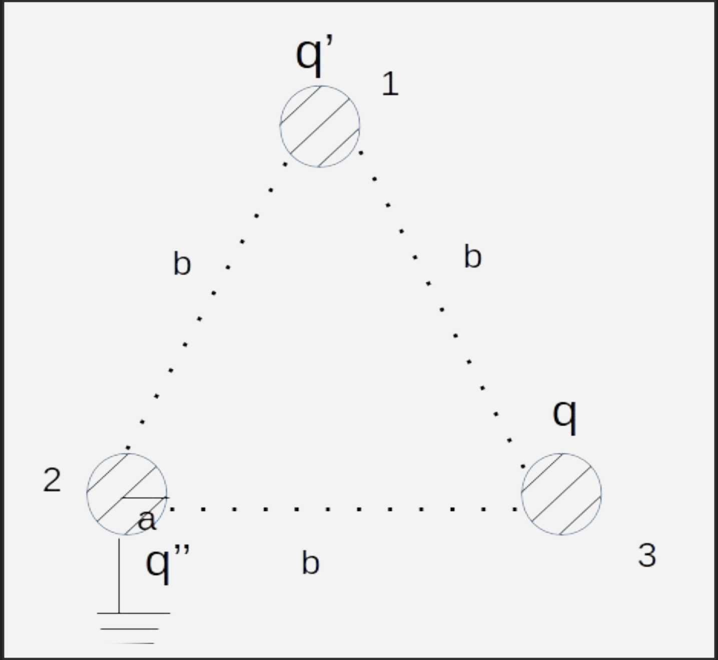


$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

$$V_2 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq}{b} + \frac{kq''}{a} = 0$$

Luego se desconecta la carga 1 que al quedar aislada con carga q', y la carga 2 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q'' para que $V_2=0$

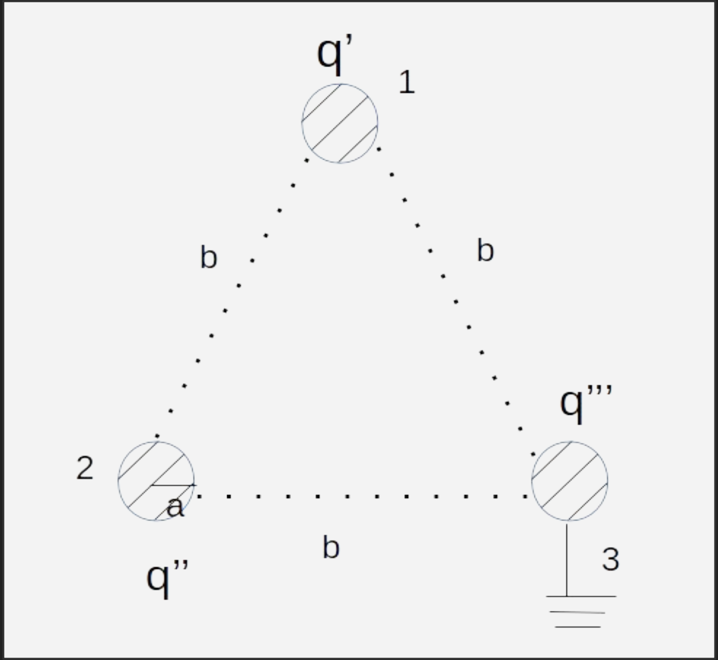
$$V_2 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq}{b} + \frac{kq''}{a} = 0$$



$$q'' = -\frac{q'a}{b} - \frac{qa}{b}$$

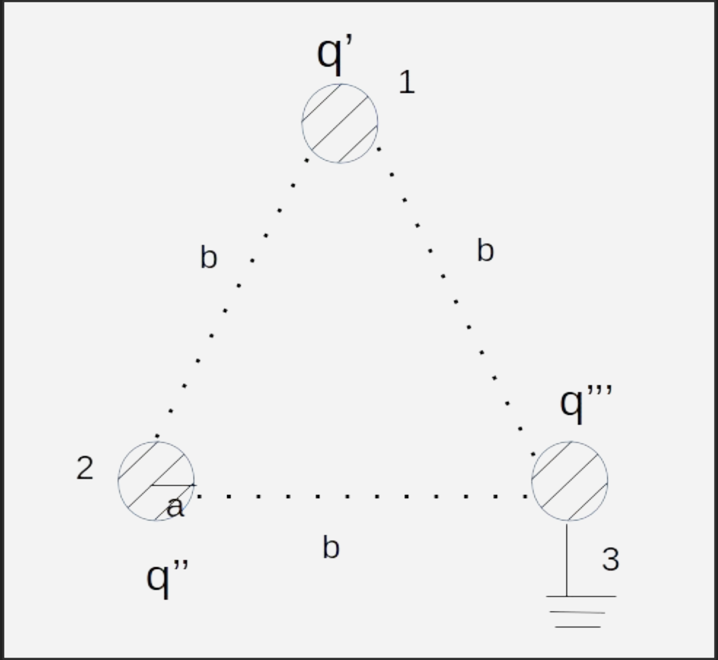
$$q'' = 2q\frac{a^2}{b^2} - \frac{qa}{b}$$

Luego se desconecta la carga 2 que al quedar aislada con carga q'', y la carga 3 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q''' para que $V_3=0$



$$V_3 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq''}{b} + \frac{kq'''}{a} = 0$$

Luego se desconecta la carga 2 que al quedar aislada con carga q'', y la carga 3 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q''' para que V_3=0



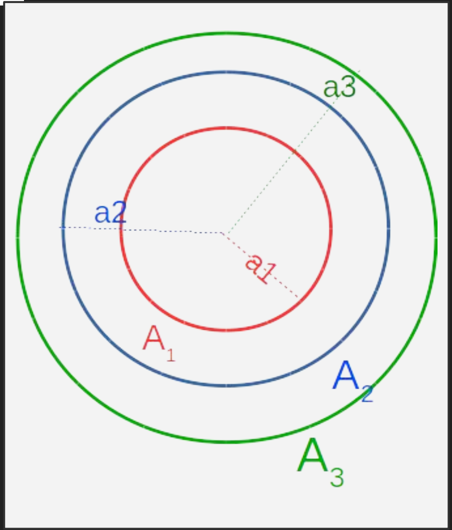
$$V_3 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq''}{b} + \frac{kq'''}{a} = 0$$

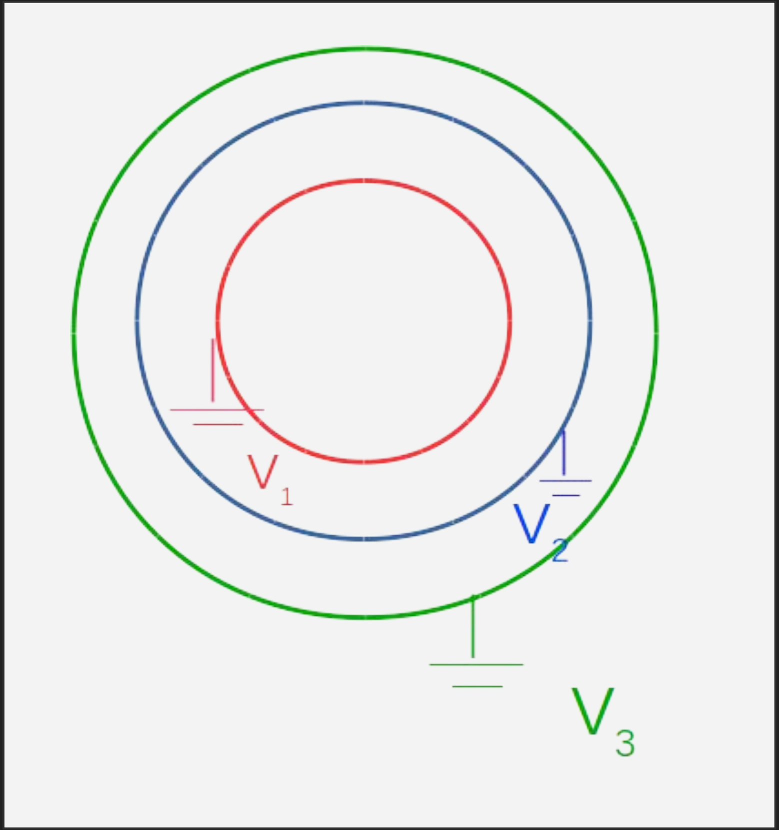
$$q''' = -\frac{q'a}{b} - \frac{q''a}{b}$$

$$q''' = \frac{3qa^2}{b^2} - \frac{2qa^3}{b^3}$$

4. Tres esferas conductoras A_1, A_2 y A_3, concéntricas de radios a_1, a_2 y a_3 ($a_1 < a_2 < a_3$) estan conectadas,respectivamente, a tres baterias V_1, V_2 y V_3. A_1 es maciza y A_2 y A_3 son huecas de espesor despreciable (respecto de su radio) pero no nulo. **Datos**: $a_1 = a$, $a_2 = 2a$ y $a_3 = 3a$; $V_1 = V_0$, $V_2 = V_3 = 2V_0$, con $V_\infty = 0$.

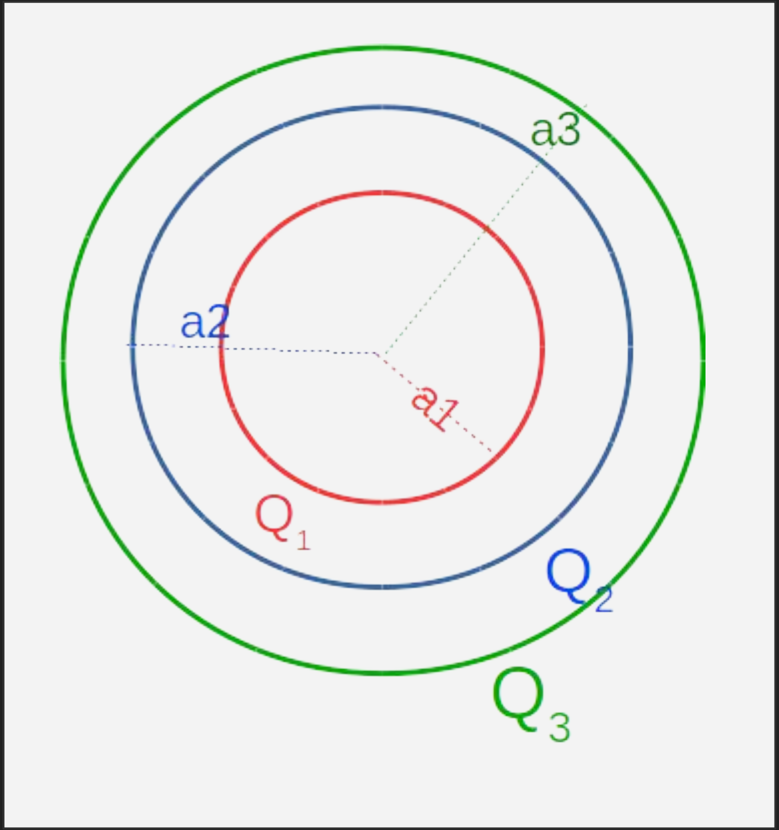
   - ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas? Detallar su distribución.
   - Si se desconectan las esferas de las baterias y a continuación la esfera A_2 se une a tierra, calcular en esta situación, las cargas (detallar su distribución) y los potenciales de cada esfera.





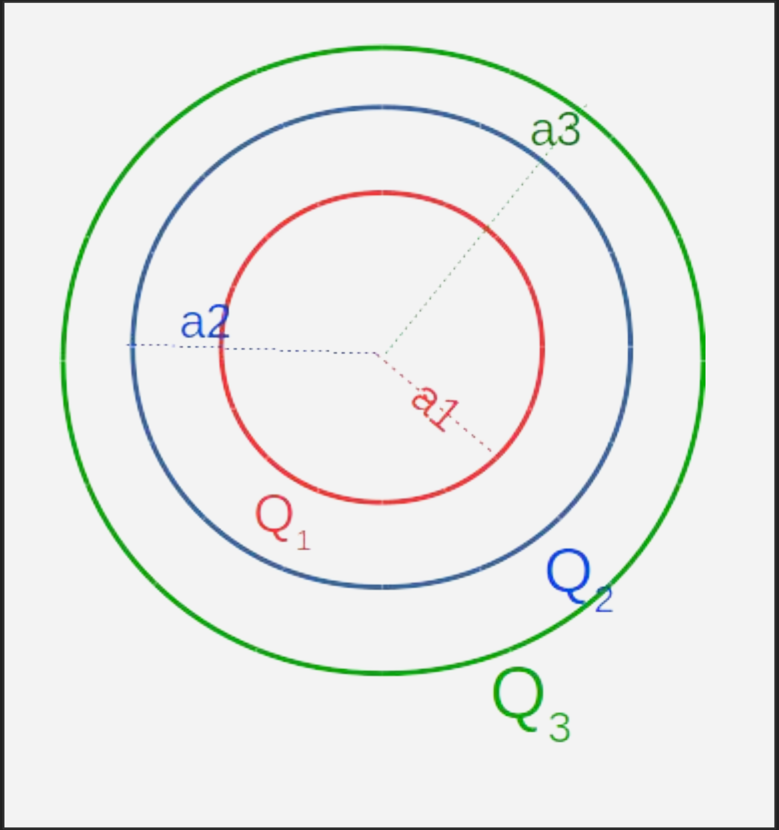
¿Cómo calculamos las cargas de cada casquete si el único dato que tenemos son los potenciales?

Para ello pensamos que cada casquete tiene una carga desconocida pero cada una de estas cargas debe ser tal que se cumpla que el potencial en cada superficie esférica sea igual al de la batería.



¿Cómo calculamos las cargas de cada casquete si el único dato que tenemos son los potenciales?

Para ello pensamos que cada casquete tiene una carga desconocida pero cada una de estas cargas debe ser tal que se cumpla que el potencial en cada superficie esférica sea igual al de la batería.

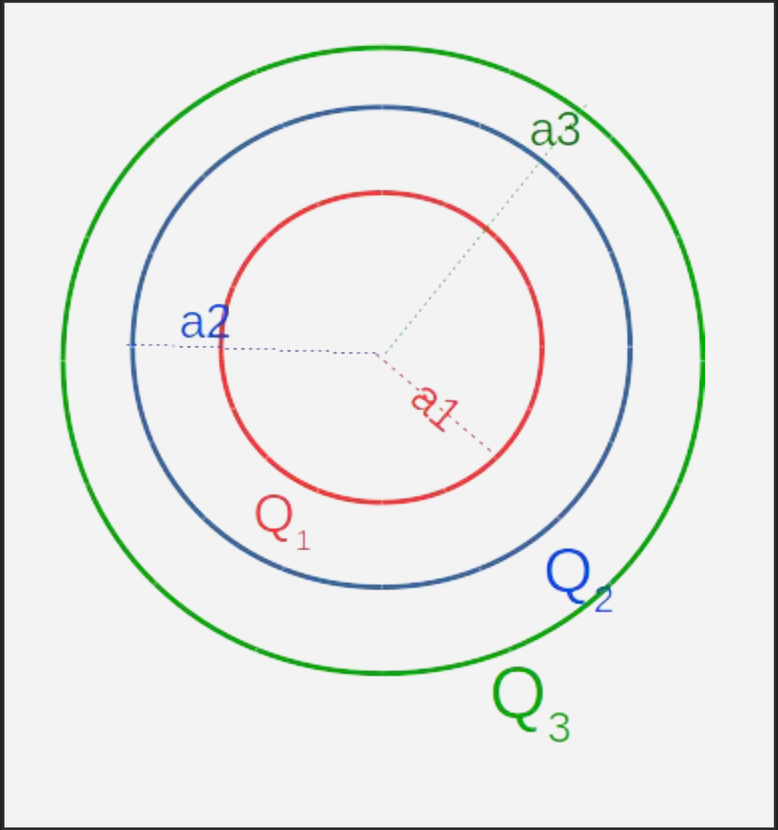


Conociendo el campo del casquete esférico, los campos individuales son...

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} kQ_1\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_1 \\ 0 & \text{si } r < a_1 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} kQ_2\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_2 \\ 0 & \text{si } r < a_2 \end{cases}$$

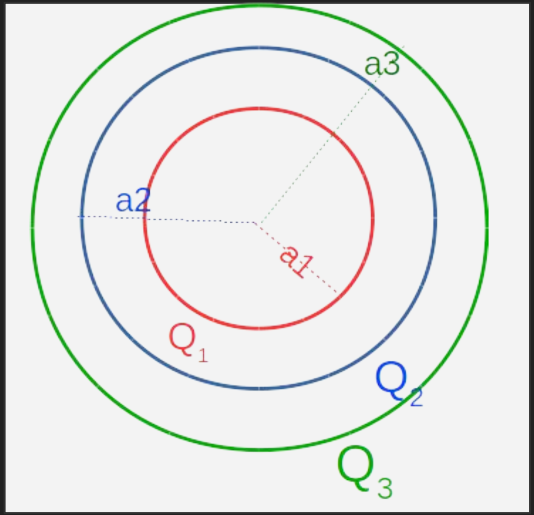
$$\vec{E}_3 = \begin{cases} kQ_3\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_3 \\ 0 & \text{si } r < a_3 \end{cases}$$



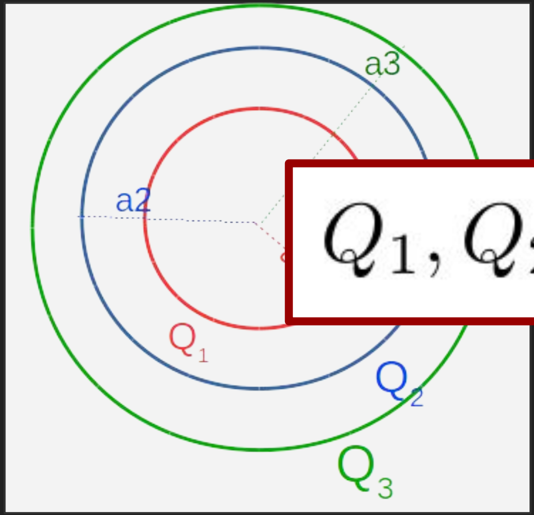
Haciendo una correcta superposición:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r^2}\hat{r} & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r} & \text{si } a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r^2}\hat{r} & \text{si } r > a_3 \end{cases}$$

De acá puedo calcular el potencial.



$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr \hat{r} = \begin{cases} A & \text{si } r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + B & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r} + C & \text{si } a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D & \text{si } r > a_3 \end{cases}$$



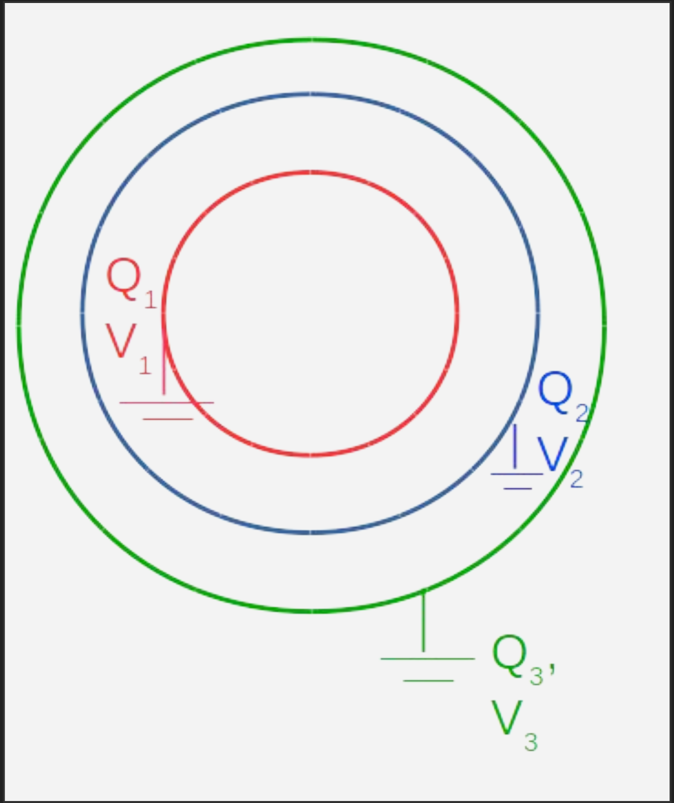
7 incógnitas

$$Q_1, Q_2, Q_3 y A, B, C y D$$

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr\hat{r} = \begin{cases} A & \text{si } r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + B & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r} + C & \text{si } a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D & \text{si } r > a_3 \end{cases}$$

Para obtener estas incógintas, aplicamos las condiciones de contorno sobre el potencial V(r).

$$A = V_1$$
$$\frac{kQ_1}{a_1} + B = V_1$$
$$\frac{kQ_1}{a_2} + B = V_2$$
$$\frac{k(Q_1+Q_2)}{a_2} + C = V_2$$
$$\frac{k(Q_1+Q_2)}{a_3} + C = V_3$$
$$\frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{a_3} + D = V_3$$
$$r \to \infty \quad \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D \to 0$$

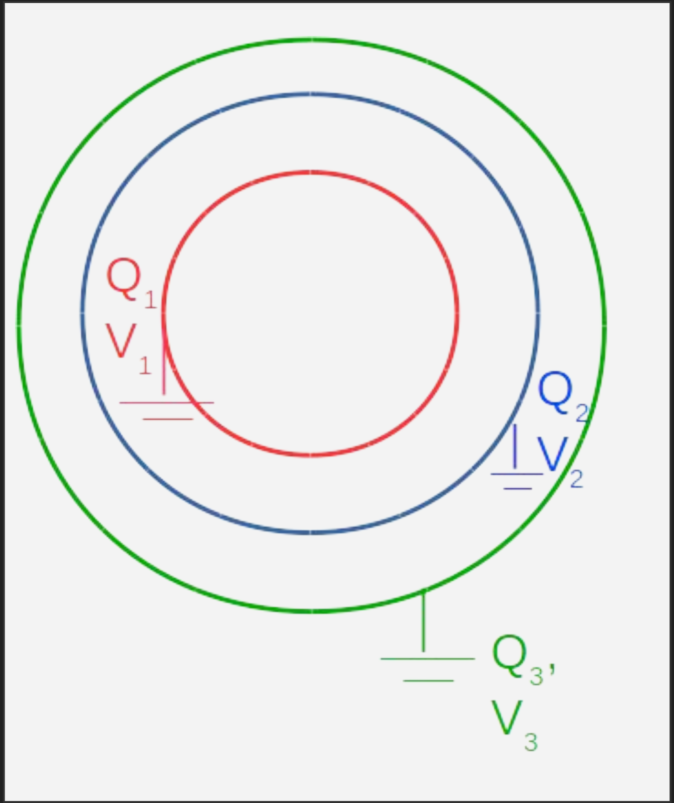


Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$
$$\nabla^2 V = 0$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$V(r = a_1) = V_1$$
$$V(r = a_2) = V_2$$
$$V(r = a_3) = V_3$$
$$V(r \to \infty) = 0$$

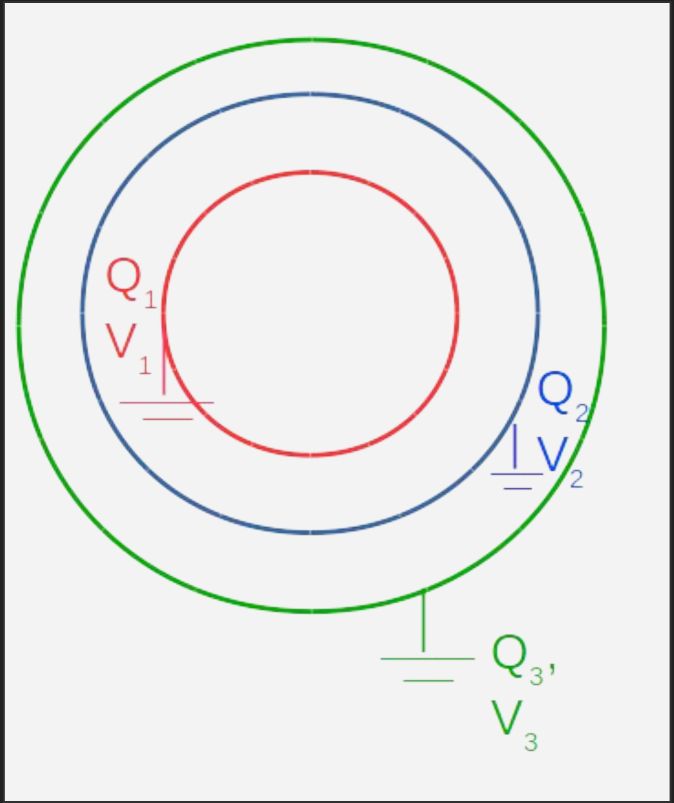
Condiciones de contorno



Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$
$$\nabla^2 V = 0$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$

$$r^2 V'(r) = K$$
$$V'(r) = \frac{K}{r^2}$$
$$\int V'(r)dr = \int \frac{K}{r^2}drV(r) = -\frac{K}{r} + A$$

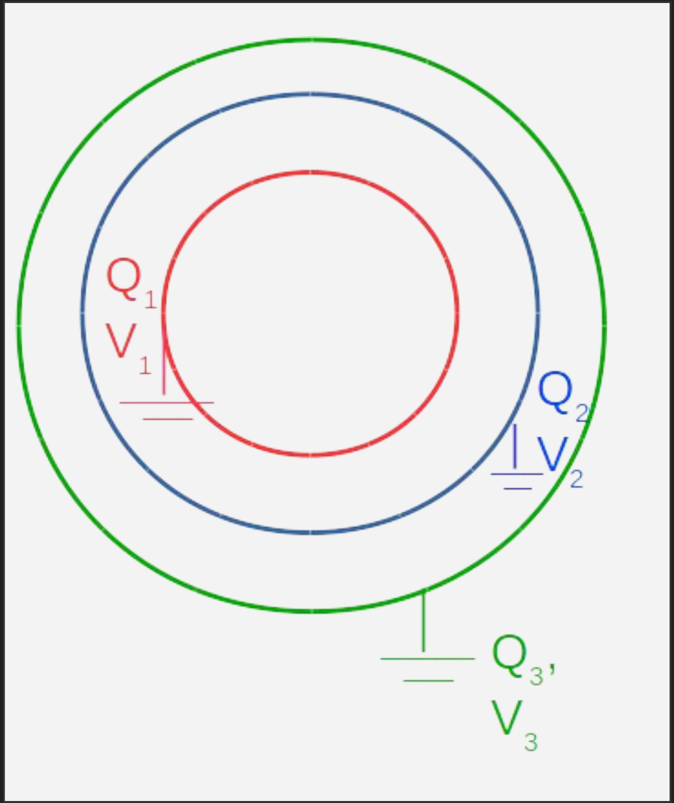


Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$
$$\nabla^2 V = 0$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$r^2 V'(r) = K$$
$$V'(r) = \frac{K}{r^2}$$
$$\int V'(r)dr = \int \frac{K}{r^2}dr$$

→ Por región



Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$

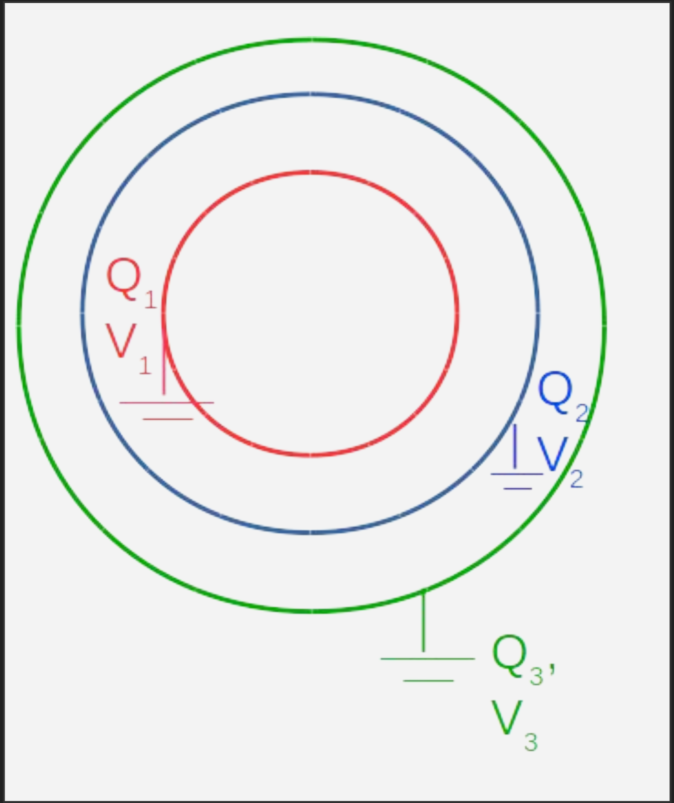
$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$V(r) = -\frac{K}{r} + A$$

Por región

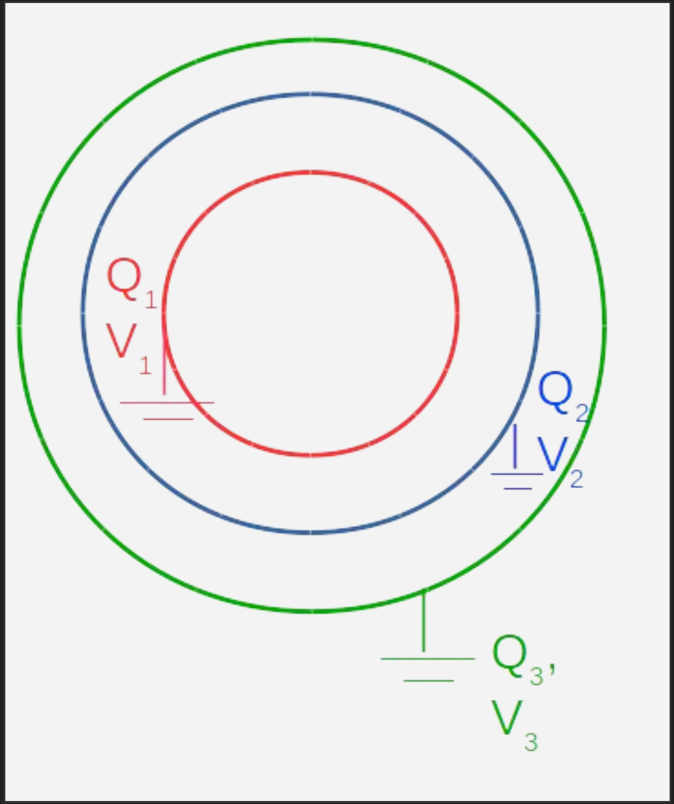


Aplicamos CC a la solución

$$V(r) = -\frac{K_i}{r} + A_i$$

$$V(r = a_1) = V_1$$
$$V(r = a_2) = V_2$$
$$V(r = a_3) = V_3$$
$$V(r \to \infty) = 0$$

Condiciones de contorno



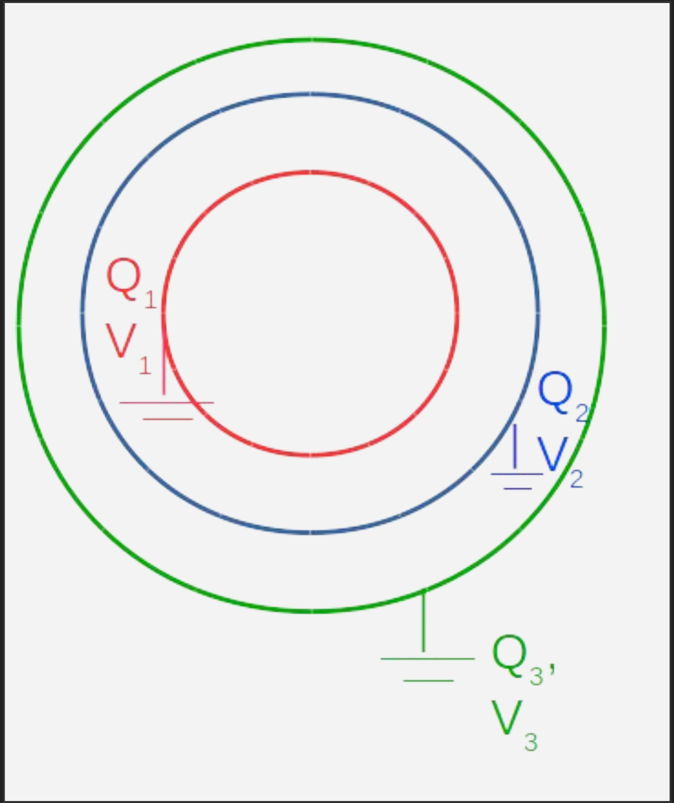
Aplicamos CC a la solución

$$V(r) = -\frac{K_i}{r} + A_i$$

Teniendo en cuenta que el potencial no debe diverger. Hay una singularidad en r=0. En realidad la condición

$$V(r = a_1) = V_1$$

Condiciones de contorno



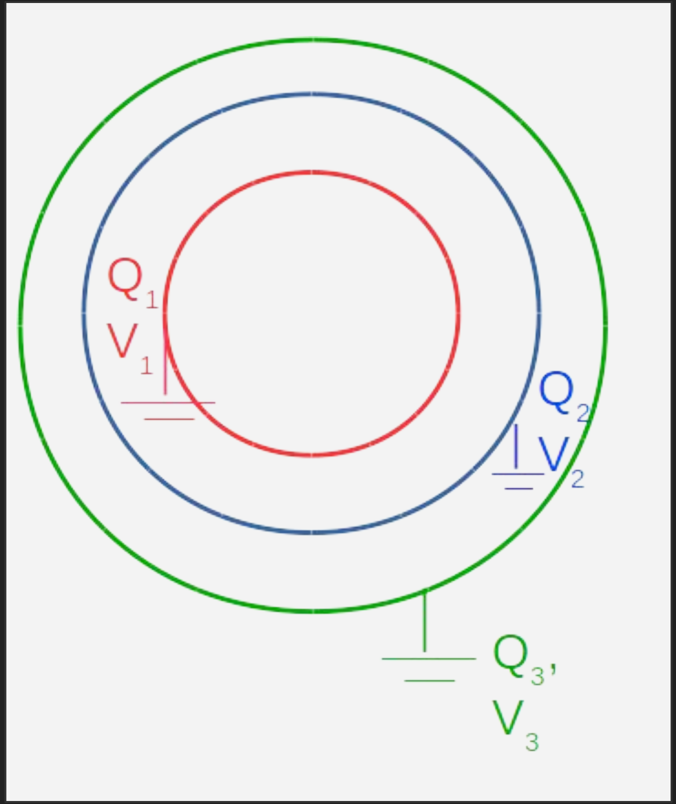
Es válida para $r<a_1$

Entonces en

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + A_1 \text{ para } r \leq a_1$$
$$K_1 = 0 \;\; A_1 = V_1$$

Ahora

$$V(r) = -\frac{K_2}{r} + A_2 \text{ para } a_1 \leq r \leq a_2$$
$$V(r = a_1) = V_1 \;\; V(r = a_2) = V_2$$
$$K_2 = \frac{V_2 - V_1}{1/a_1 - 1/a_2}$$
$$A_2 = V_1 + \frac{K_2}{a_1}$$



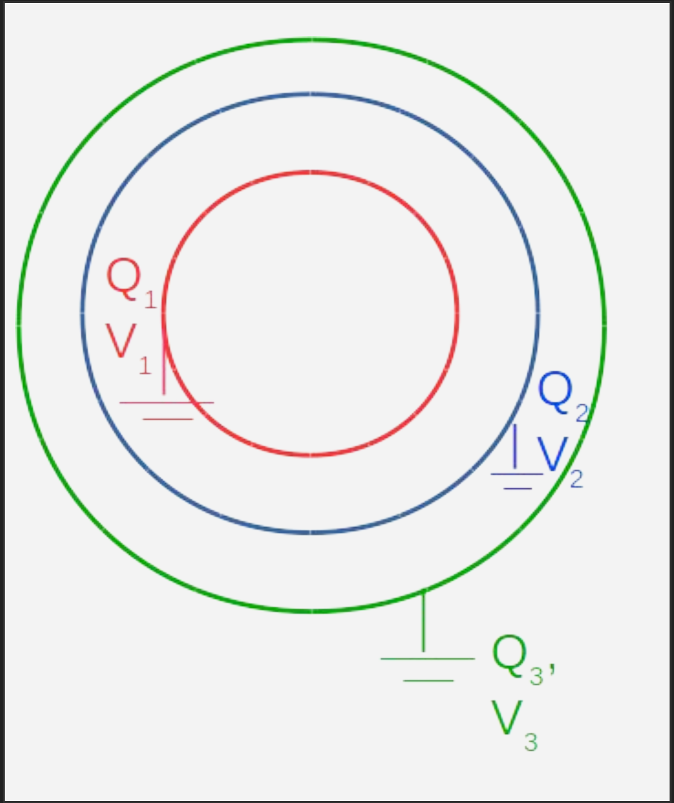
De la misma manera

$$V(r) = -\frac{K_3}{r} + A_3 \text{ para } a_2 \leq r \leq a_3$$

$$V(r = a_2) = V_2 \quad V(r = a_3) = V_3$$

$$K_3 = \frac{V_3 - V_2}{1/a_2 - 1/a_3}$$

$$A_3 = V_2 + \frac{K_3}{a_2}$$



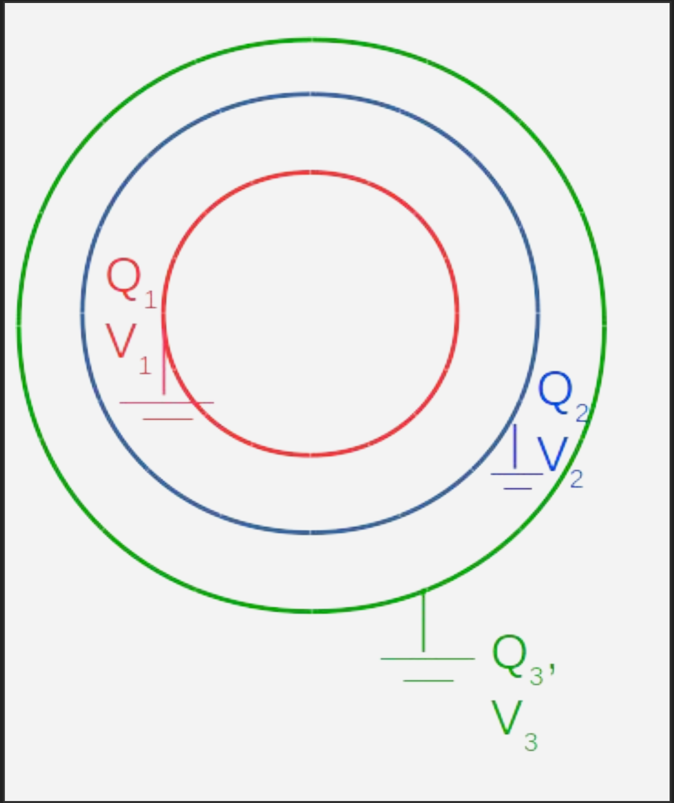
Y así….

$$V(r) = -\frac{K_4}{r} + A_4 \text{ para } a_3 \leq r$$

$V(r = a_3) = V_3 \;\; V(r \to \infty) = 0$

$K_3 = -V_3 a_3$

$A_4 = 0$



Ticket de salida