

# Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 2

Facundo Pugliese

# Campos que no son lo que parecen

Tenemos ya un par de ejemplos de campos eléctricos “repetidos”, sistemas que a pesar de tener distintas densidades de carga, generan en determinadas regiones el mismo campo. Por ejemplo, para una esfera con densidad de carga

$$\bar{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3} \hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

*Esfera maciza*

$$\bar{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

*Esfera cargada en superficie*

$$\bar{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

*Carga puntual*

De hecho, cualquier distribución de carga con simetría esférica de radio  $R$  cumple que para  $r > R$  genera un campo idéntico al de una carga puntual.

En general, dado un campo eléctrico  $E$  en una región  $V$ , existen múltiples densidades  $\rho$  en la región  $V'$  complementaria capaces de generarlo.

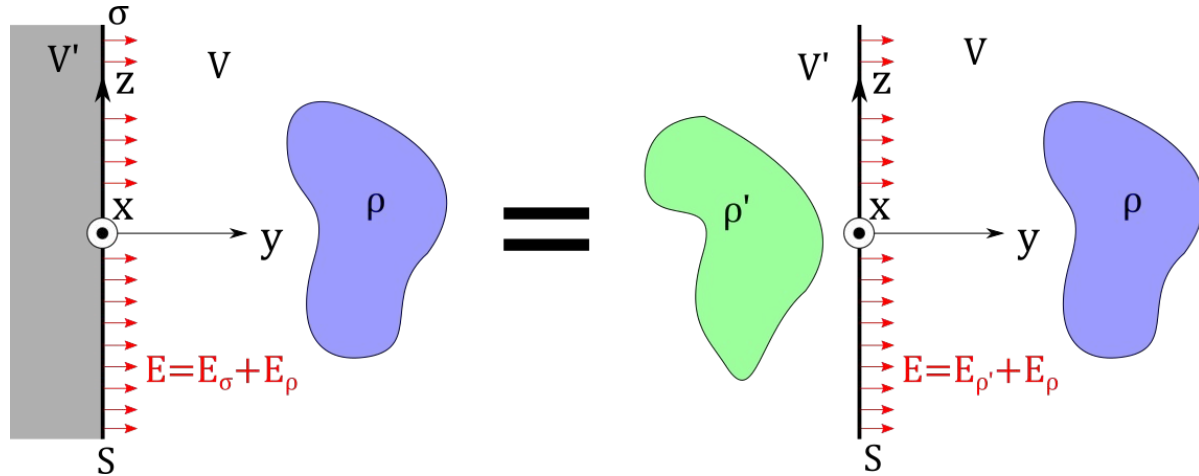
# Método de imágenes: Idea general

Si tenemos una densidad  $\rho$  en una región  $V$  con una superficie conductora  $S$ , sabemos que se inducirá un  $\sigma$  sobre ella y la volverá un equipotencial: el campo sobre  $S$  será ortogonal a la superficie.

Aprovechando la idea anterior, puedo “inventarme” una densidad  $\rho'$  en  $V'$  cuyo campo me permita cumplir que un  $S$  sea equipotencial para reemplazar  $\sigma$ .

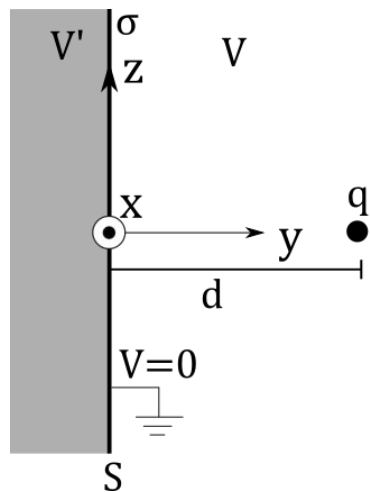
Por ejemplo, para un plano conductor infinito frente a una distribución  $\rho$ , mi región  $V$  sería  $y > 0$  y  $V'$  sería  $y < 0$ .

Busco una  $\rho'$  que me asegure que  $E_x|_S = E_z|_S = 0$ .

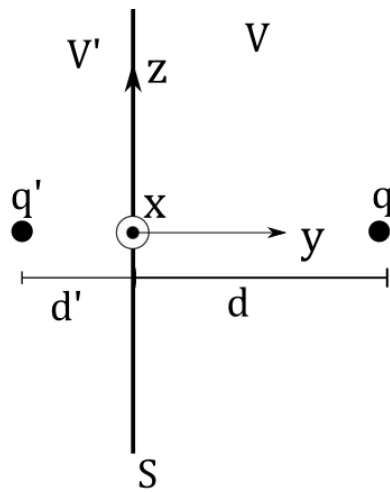


# Empecemos despacio: Ejercicio 6

Comencemos con una carga puntual  $q$  a distancia  $d$  del plano conductor **a tierra**, pruebo con una carga  $q'$  a distancia  $d'$  sobre la misma línea para *no romper la simetría* (rotación sobre  $y$ ).  
 Quiero ver si existen  $q'$  y  $d'$  tal que



?



$$\phi(\vec{r}) = \frac{kq'}{|\vec{r} - (-d')\hat{y}|} + \frac{kq}{|\vec{r} - d\hat{y}|} \quad , \quad \phi(x, 0, z) = 0$$

$$\frac{kq'}{|x\hat{x} + z\hat{z} + d'\hat{y}|} = -\frac{kq}{|x\hat{x} + z\hat{z} - d\hat{y}|} \implies \text{sg}(q') = -\text{sg}(q)$$

# Ejercicio 6

Con esto podemos escribir la igualdad cómo

$$\frac{|q'|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d'^2}} = \frac{|q|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d^2}}$$

Que tiene una solución trivial  $q' = -q$  y  $d' = d$ .

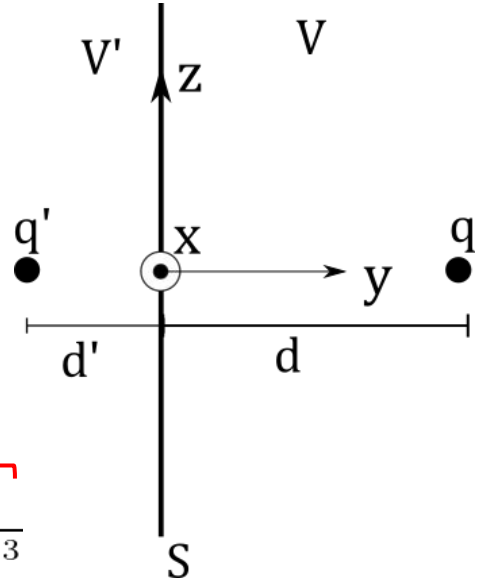
¿Existen otras? Seguramente, **pero con una me basta.**

La (única) solución resulta entonces

$$\phi(\vec{r}) = \frac{kq}{|\vec{r} - d\hat{y}|} - \frac{kq}{|\vec{r} + d\hat{y}|} \quad \bar{E}(\vec{r}) = kq \overbrace{\frac{\vec{r} - d\hat{y}}{|\vec{r} - d\hat{y}|^3}}^{E_q} - kq \overbrace{\frac{\vec{r} + d\hat{y}}{|\vec{r} + d\hat{y}|^3}}^{E_\sigma}$$

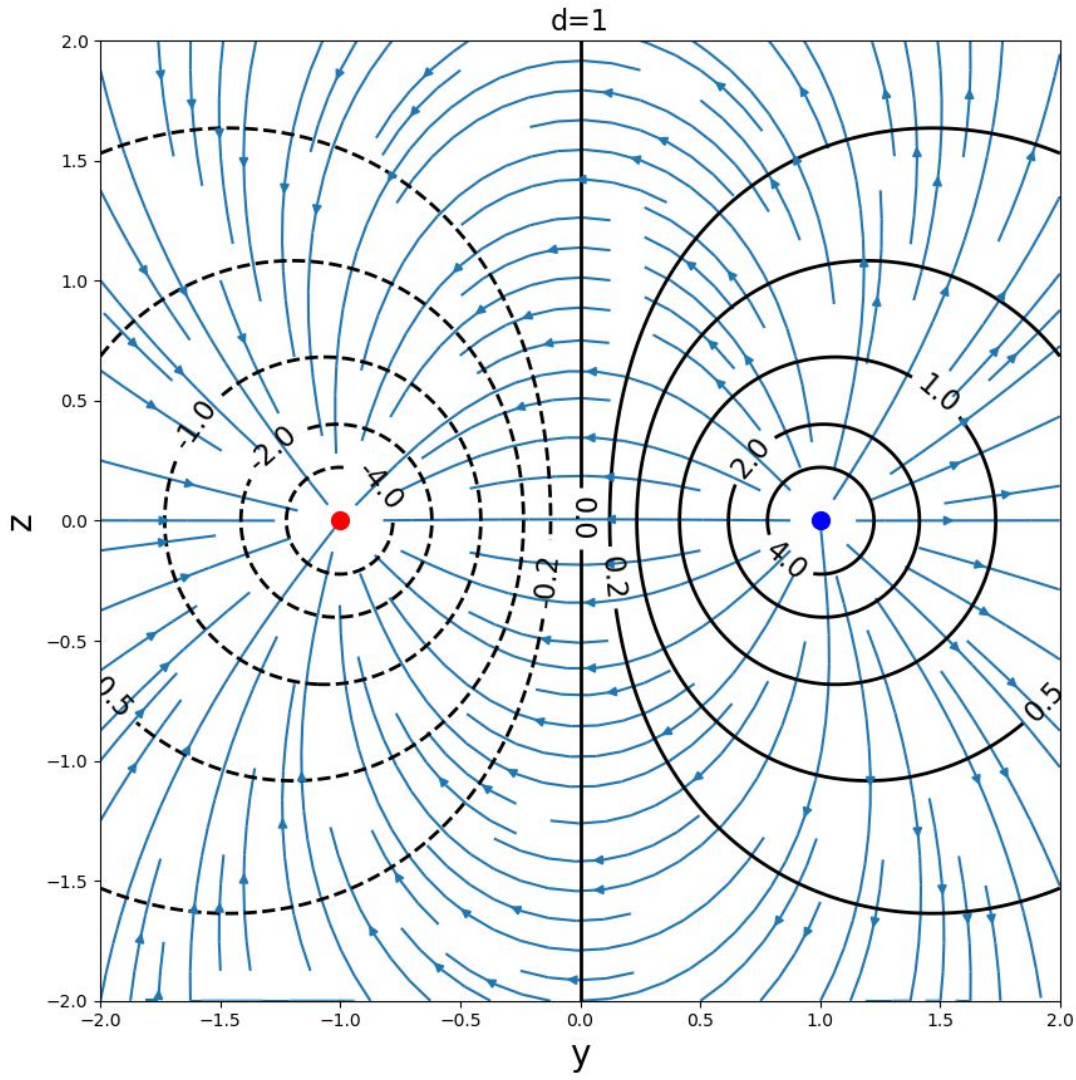
Sobre la superficie  $y=0$ , el campo efectivamente es ortogonal al plano

$$\bar{E}(x, 0, z) = kq \left[ \frac{x\hat{x} + z\hat{x} - d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{x} + z\hat{z} + d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} \right] = -\frac{2kqd\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$



Equipotenciales  
en negro

Líneas de  
campo en azul



## Ejercicio 6: Distribución de carga

El campo sobre la superficie  $S$  ( $y=0$ ) es proporcional a la densidad superficial inducida sobre el conductor. Usando  $E|_S = \sigma/\epsilon_0$

$$\sigma(x, z) = \epsilon_0 E_y(x, 0, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

Reconocemos el radio en polares  $r^2 = x^2 + z^2$  sobre el plano  $x$ - $z$ , por lo que  $\sigma$  tiene simetría de rotación alrededor de  $y$ :  $\sigma(x, z) = \sigma(r)$

Podemos calcular la carga total inducida sobre el plano integrando  $\sigma$  en  $S$ :

$$\begin{aligned} Q_S &= \int_S \sigma(r) dS = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} d\theta dr = -qd \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} dr \\ &= -qd \frac{(-1)}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Bigg|_0^\infty = -q \end{aligned}$$

# Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

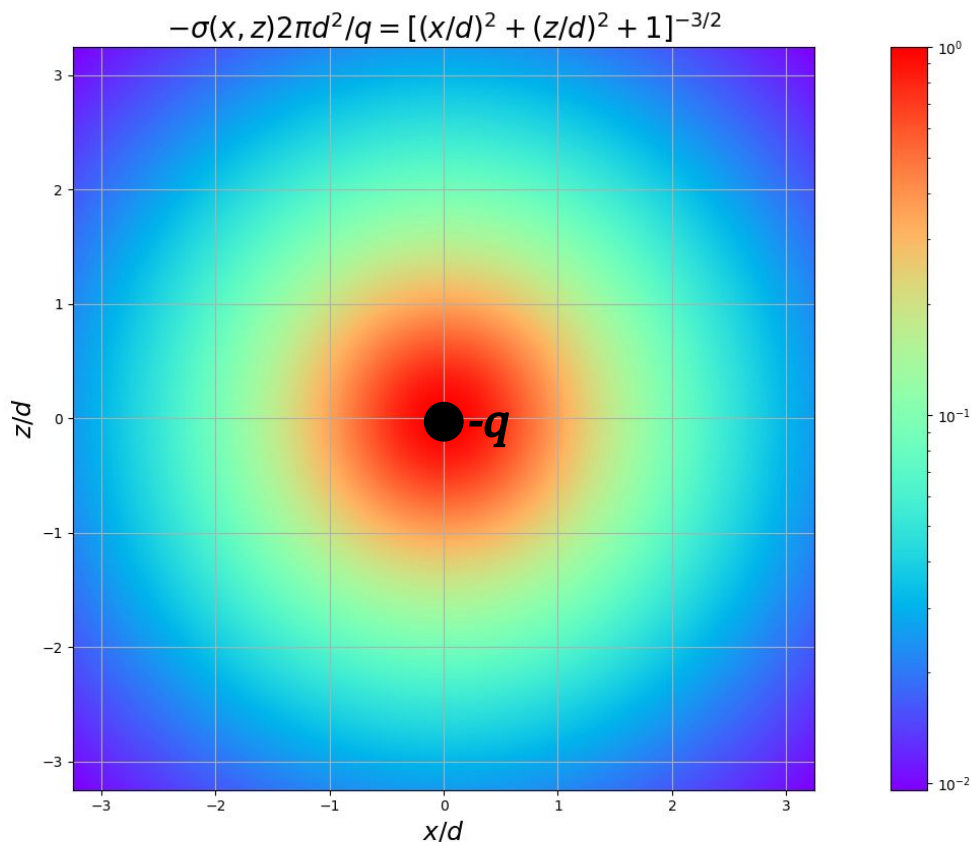
Si me paro frente al plano (en  $y > 0$ ),  
veo un campo idéntico al de una  
carga  $-q$  en  $(0, -d, 0)$ .

**¿Que veo si me paro en un  $y < 0$ ?**

¡Un campo idéntico al generado por  
una carga  $-q$  en  $(0, +d, 0)$ !

**¿Cómo será entonces el campo  
eléctrico en  $y < 0$ ?**

Nulo, pues veo una carga  $q$  y otra  $-q$   
en  $(0, +d, 0)$ ; una carga total **nula**.





## Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

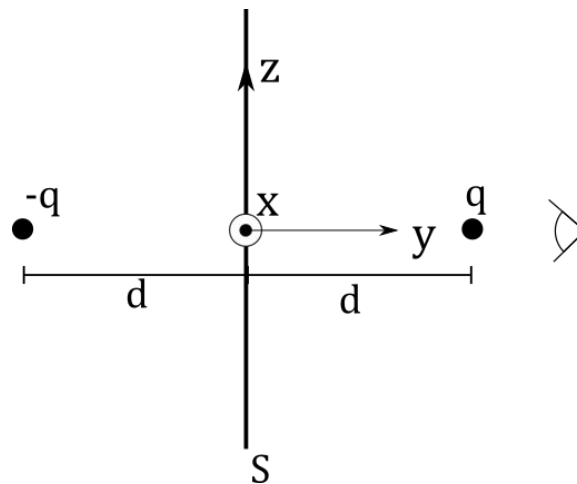
Si me paro frente al plano (en  $y > 0$ ),  
veo un campo idéntico al de una  
carga  $-q$  en  $(0, -d, 0)$ .

**¿Que veo si me paro en un  $y < 0$ ?**

¡Un campo idéntico al generado por  
una carga  $-q$  en  $(0, +d, 0)$ !

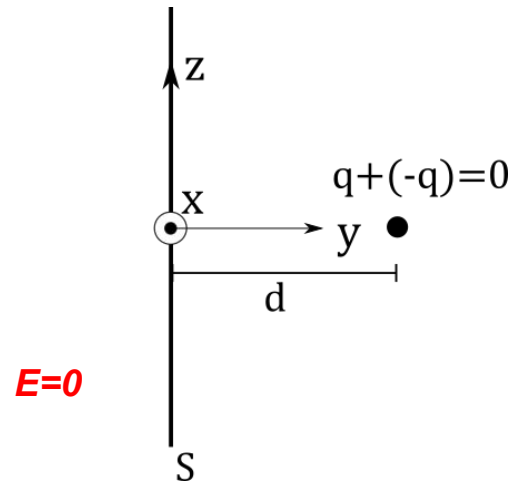
**¿Cómo será entonces el campo  
eléctrico en  $y < 0$ ?**

Nulo, pues veo una carga  $q$  y otra  $-q$   
en  $(0, +d, 0)$ ; una carga total **nula**.



**Si miro desde la  
derecha ( $y > 0$ )**

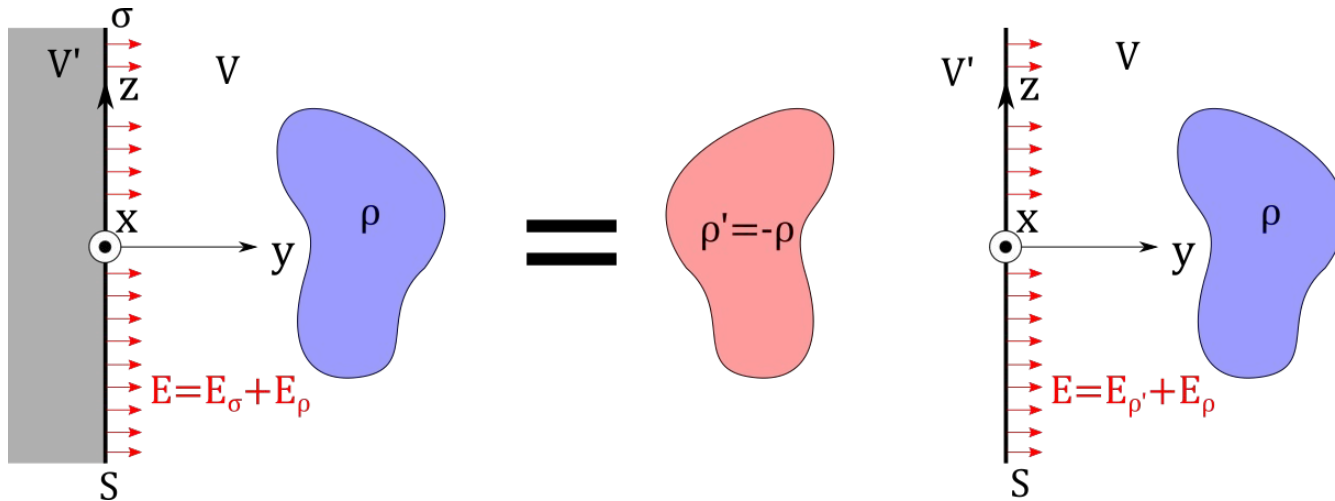
**Si miro desde la  
izquierda ( $y < 0$ )**



**$E=0$**

# Ejercicio 6: Generalicemos un poco

Generalizando, vemos que para una  $q$  en  $(x', y', z')$ , el método de imágenes nos arroja una segunda carga  $-q$  en  $(x', -y', z')$ . Por lo tanto, para una  $\rho(x', y', z')$  su imagen será una  $\rho'(x', y', z') = -\rho(x', -y', z')$ . Luego, si conozco el campo  $E$  para una distribución  $\rho(x', y', z')$ , me basta calcular el campo  $E'$  de  $\rho'(x', y', z') = -\rho(x', -y', z')$ .



¿Qué tan distinto puede ser  $E'$  de  $E$ ?

## SPOILER ALERT

$$E'_x(x, y, z) = E_x(x, -y, z)$$

$$E'_y(x, y, z) = -E_y(x, -y, z)$$

$$E'_z(x, y, z) = E_z(x, -y, z)$$

## Ejercicio 6: Energía de la configuración

Calculemos el trabajo necesario para traer la carga desde  $y'=\infty$  hasta  $y'=d$ . Este será el trabajo que el campo  $E_\sigma$  genera sobre la carga  $q$ .

$$\bar{E}_\sigma(\bar{r}) = -kq \frac{\bar{r} + y'\hat{y}}{|\bar{r} + y'\hat{y}|^3} \quad \text{Pero } E_\sigma \text{ depende de } y', \text{ así que hay que tener } \mathbf{cuidado}$$

Para  $q$  en  $(0, y', 0)$ , siente una fuerza  $\bar{F} = q\bar{E}_\sigma(0, y', 0) = -kq^2 \frac{y'\hat{y} + y'\hat{y}}{|y'\hat{y} + y'\hat{y}|^3} = -kq^2 \frac{\text{sg}(y')}{|2y'|^2} \hat{y}$

y dado que traigo la carga  $q$  a lo largo del eje  $y$  (es más fácil):  $d\bar{l} = dy'\hat{y}$

$$W = - \int_{\infty}^d \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_{\infty}^d \frac{kq^2}{4} \frac{1}{y'^2} \hat{y} \cdot dy'\hat{y} = \frac{kq^2}{4} \frac{(-1)}{y'} \Big|_{\infty}^d = -\frac{kq^2}{4d} = \frac{1}{2}q \frac{k(-q)}{2d}$$

**Es la mitad de la energía de interacción entre 2 cargas  $q$  y  $-q$  a distancia  $2d$   $\Phi_{-q}(r=2d)$**