**DIPOLOS Y POTENCIAL EN DESARROLLO MULTIPOLAR**

Es una manera de desarrollar el potencial electrostático que siente una carga que está 'muy lejos' de la distribución de cargas que hace de fuente de este potencial.

Si soy una carga y me alejo lo suficiente de una distribución, sea cual sea esta, la voy a ver como una carga puntual:


Entonces podría escribir el potencial como

$$V_{lejos} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{1}$$

donde r es la distancia a la que estoy de la distribución.

Pero...¿y si la carga total de la distribución es cero?

Lo que tengo que hacer para ser un poco más riguroso es tomar la expresión exacta del potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv' \tag{2}$$

Y luego desarrollar el factor $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ en suma de potencias de $\frac{1}{|\vec{r}|}$. Esto lo puedo hacer ya que $|\vec{r}| >> |\vec{r'}|$ para todo $r'$ de la distribución de cargas.

Haciendo la cuenta, el desarrollo queda

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{|\vec{r}^3|} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r'})^2 - |\vec{r'}|^2|\vec{r}|^2}{2|\vec{r}|^5} + O\left(\frac{1}{|\vec{r}|^4}\right) \tag{3}$$

Metiendo la expresión de arriba adentro de la del potencial, y haciendo más cuentas, queda entonces

$$V_{lejos}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \int_{v'} \rho(\vec{r'}) dv' + \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \int_{v'} \vec{r'} \rho(\vec{r'}) dv' + ... \right) \tag{4}$$

Mirando bien, la integral del primer término es la carga total Q. Entonces cuando asumí carga puntual desde muy lejos, lo que hice fue quedarme solo con el término de primer orden del desarrollo.

El primer término es el **monopolar**

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \tag{5}$$

El siguiente es el **dipolar**. Luego el **cuadrupolar**, el **octupolar**, y así sucesivamente.

Si a Q le doy el nombre de **momento monopolar** o **monopolo**, puedo definir el **momento dipolar** o **dipolo** como

$$\vec{p} = \int_{v'} \vec{r'} \rho(\vec{r'}) dv' \tag{6}$$

.

Y la contribución al potencial es

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \tag{7}$$

El monopolo Q es un escalar *(que es un tensor de orden 0)*. El dipolo $\vec{p}$ es un vector *(que es un tensor de orden 1)*. El cuadrupolo es un tensor de orden 2, y así sucesivamente.

El potencial queda entonces:

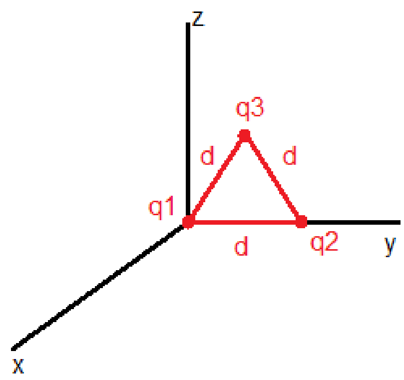
$$V_{lejos} = V_{mon} + V_{dip} + ... \tag{8}$$

**Es muy importante destacar que los momentos n-polares se calculan LOCALMENTE (NO DESDE LEJOS). Lo que se calcula desde lejos es la contribución de los momentos al potencial! ($V_{mono}$, $V_{dip}$, etc).**

**EJERCICIO 14**

14. • ¿Cómo se ven desde lejos los campos de las siguientes configuraciones?:
(a) En cada vértices de un triángulo equilátro, hay ubicadas cargas de valores q, q y −3q.
(b) Idem (a) reemplazando la carga −3q por −2q.

Tengo 3 cargas $q_1$, $q_2$ y $q_3$ en los vértices de un triángulo equilátero. Las coloco como muestra la figura, con el origen de coordenadas en $q_1$




Voy a calcular el potencial generado por esta distribución muy lejos de ella, quedándome hasta orden dipolar. Empiezo con el término monopolar,

$$V_{mon} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2+q_3}{r} \tag{9}$$

Para calcular el término dipolar, primero voy a calcular el momento dipolar $\vec{p}$. Como tenemos una distribución de cargas discreta, la integral de la expresión de $\vec{p}$ se convierte en una sumatoria,

$$\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i' q_i. \tag{10}$$

Entonces,

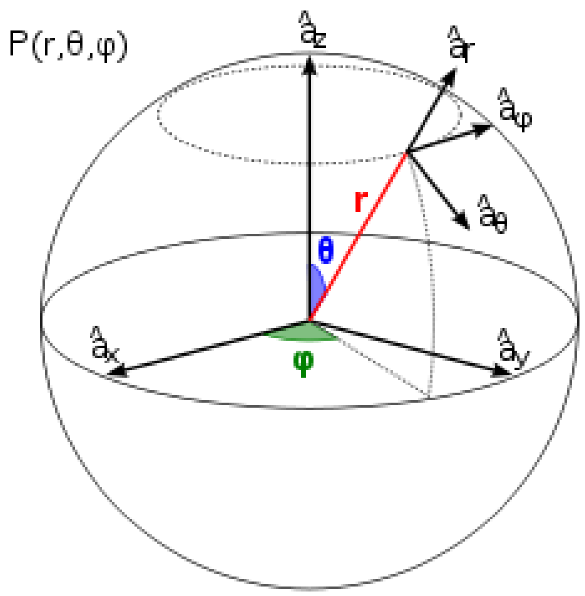
$$\vec{p} = \vec{r}_1 q_1 + \vec{r}_2 q_2 + \vec{r}_3 q_3 = 0.q_1 + d\hat{y}.q_2 + \left(\frac{d}{2}\hat{y} + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}\hat{z}\right).q_3 \tag{11}$$

$$\vec{p} = (d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)\hat{y} + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3\hat{z} \tag{12}$$

Ahora tengo que meter a $\vec{p}$ en la contribución dipolar del potencial.

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{13}$$

Cuando estoy muy lejos, me conviene usar coordenadas esféricas. **¿Por qué?**




Reescribo entonces a los versores $\hat{y}$, $\hat{z}$ en esféricas.

$\hat{y} = sin\theta sin\phi\hat{r} + cos\theta sin\phi\hat{\theta} + cos\phi\hat{\phi}$

$\hat{z} = cos\theta\hat{r} - sin\theta\hat{\phi}$

Cuando haga el producto escalar de la expresión (13), solo sobreviven las componentes $\hat{r}$. Queda entonces:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[(d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)sin\theta sin\phi + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3 cos\theta\right]\hat{r}\cdot\hat{r}\frac{1}{r^2} \tag{14}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[(d.q_2 + \frac{d}{2}.q_3)sin\theta sin\phi + \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}}.q_3 cos\theta\right]\frac{1}{r^2} \tag{15}$$

Tiene sentido que me haya quedado una dependencia en $\phi$, porque no es lo mismo mirar el triángulo de frente que de costado.

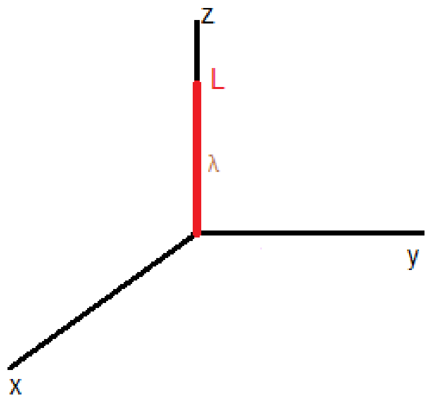
El ejercicio me pide que haga un cambio en los valores de las cargas. En el segundo caso, la carga total es cero, y solo sobrevive el término dipolar.

Algo interesante de ver es qué pasa si elijo otro origen de coordenadas. El momento dipolar cambia, solo si la carga total es distinta de cero. Queda para ustedes mostrarlo en este ejercicio.

**Segunda parte: distribuciones continuas.**

- En los casos considerados en los Problemas 5 y 6, estudie el comportamiento del campo eléctrico a distancias muy grandes de la configuración de cargas, tomando el límite que corresponda.

Lo voy a ubicar en el eje z como muestra la figura




Empiezo por el término monopolar:

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{r}. \tag{16}$$

Ahora calculo el momento dipolar $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \int_{v'} \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv' = \int_0^L z'\hat{z}\lambda dz' = \frac{\lambda L^2}{2}\hat{z} \tag{17}$$

.

Como hice en el caso anterior, antes de calcular la contribución dipolar al potencial, paso a coordenadas esféricas:

$\hat{z} = cos\theta\hat{r} - sin\theta\hat{\phi}$. Entonces,

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L^2}{2}cos\theta\hat{r}\cdot\hat{r}\frac{1}{r^2} \tag{18}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L^2}{2}cos\theta\frac{1}{r^2} \tag{19}$$

Esta vez, la dependencia en $\phi$ no aparece. El hilo se ve igual desde cualquier $\phi$. Esto se llama simetría de revolución.

Si ponía el hilo en el eje x o en el y, me iba a aparecer la dependencia en $\phi$. Recordemos que $\vec{p}$ cambia según como coloquemos la distribución respecto al origen si la carga total es distinta de cero, como en este caso.

¿Esto quiere decir que el eje z es una dirección privilegiada? La respuesta es sí, en coordenadas esféricas siguiendo la convención utilizada siempre, donde $\phi$ es coplanar a los planos $z = cte$.

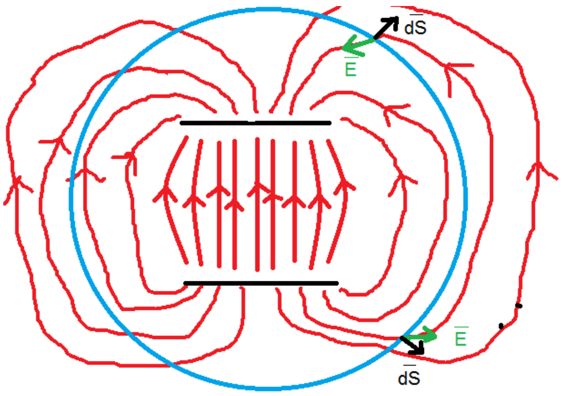
**EJERCICIO 15**

15. Dos discos paralelos y coaxiales, ambos de radio $R$, separados por una distancia $d$, están cargados uniformemente con densidades $\sigma$ y $-\sigma$.

- Dibuje cualitativamente las líneas de campo en todo el espacio.

Las líneas **deben ser cerradas**. **¿Por qué?**

**Toda línea que salga del disco positivo debe entrar al disco negativo.** Esto es porque la carga total de la configuración es **cero**. Si tomo cualquier superficie cerrada de Gauss alrededor de la configuración, al ser la carga encerrada cero, el flujo sobre la superficie debe ser cero. Para eso, toda línea saliente de la superficie debe volver a entrar, para compensar el flujo. La única manera de lograr esto es que todas las líneas sean cerradas.




**Cálculo del momento dipolar $\vec{p}$**

- Calcule y grafique el potencial electrostático y el campo eléctrico sobre el eje de los discos. Calcule el momento dipolar de la distribución.

Siempre lo primero que hay que hacer es definir el origen de coordenadas. En este caso, como la carga total es cero, $\vec{p}$ va a dar igual independientemente del origen elegido.

Voy a elegir un sistema donde el **disco inferior (cargado positivo)** está apoyado en el plano xy (a altura z=0), y el origen de coordenadas es el centro del disco. **El disco superior (cargado negativo)** está ubicado paralelo al inferior, a una altura z=d. Ambos discos tienen radio R.

La expresión para $\vec{p}$ es:

$$\vec{p} = \int_{v'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' \tag{20}$$

Para cualquier problema donde haya que calcular esta integral, es importante entender que la integral no siempre va a tener la misma dimensión que la carga, ya que no estamos sumando diferenciales de carga. Estamos sumando productos de esos diferenciales y el vector que los une con el origen ($\vec{r'}$).

Para este problema, con el origen elegido, separo la integral en dos: una para cada disco, tal que $\vec{p} = \vec{p}_{inferior} + \vec{p}_{superior}$.
Comienzo con la del inferior: voy a expresar a los vectores $\vec{r'}$ en coordenadas cilíndricas:

$\vec{r'} = r'\hat{r}' + z'\hat{z} = r'\hat{r}'$, ya que $z'$ es cero para este disco. Es importante remarcar que $r'$ y $\hat{r}'$ son la coordenada y el versor radial **cilíndricos**. No hay que confundirlos con sus compañeros esféricos.

$$\vec{p}_{inferior} = \int_{v'} \vec{r'}\rho(\vec{r'})dv' = \int_0^{2\pi}\int_0^R r'\hat{r}'\sigma r'dr'd\phi' \tag{21}$$

Reemplazo $\hat{r}' = cos\phi'\hat{x} + sin\phi'\hat{y}$, donde x e y si son versores fijos, como z.

$$\vec{p}_{inferior} = \frac{\sigma R^3}{3}\int_0^{2\pi}(cos\phi'\hat{x} + sin\phi'\hat{y})d\phi' = 0 \tag{22}$$

ya que integrar coseno o seno entre 0 y $2\pi$ da cero.

Ahora hago lo mismo para el disco superior, que se encuentra a una distancia d en la dirección $\hat{z}$ y tiene carga $-\sigma$. Expreso el vector $\vec{r'}$ en coordenadas cilíndricas:

$\vec{r'} = r'\hat{r} + z'\hat{z} = r'\hat{r} + d\hat{z}$, ya que la coordenada $z' = d$ para todos los puntos del disco.

$$\vec{p}_{superior} = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r'\hat{r} + d\hat{z})(-\sigma)r'dr'd\phi' = \int_0^{2\pi}\int_0^R r'\hat{r}(-\sigma)r'dr'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^R d\hat{z}(-\sigma)r'dr'd\phi' \tag{23}$$

Salvo por el signo de la carga, vemos que la parte radial es idéntica a la calculada arriba, y da cero. Entonces:

$$\vec{p}_{superior} = 0 - \frac{2\pi\sigma dR^2}{2}\hat{z} \tag{24}$$

Cuando sumamos $\vec{p}_{inferior} + \vec{p}_{superior}$ se cancela la parte que apunta en $\hat{r}$ y queda:

$$\boxed{\vec{p} = -\pi\sigma dR^2\hat{z}} \tag{25}$$

Analizando este resultado vemos que es consistente que la parte radial de los discos de cero respecto al eje z como eje central, ya que si dividimos un disco por la mitad, nos queda una distribución dipolar distinta de cero, que se cancela con la otra mitad, porque la distribución de carga es constante.

En cuanto a la parte en z, el resultado tiene todo el sentido del mundo. El momento dipolar apunta en $-\hat{z}$ al igual que todos los mini-$\vec{p}$ de las cargas negativas del disco superior apuntan hacia sus contrapartes: las cargas positivas del disco inferior.

La distribución vista desde lejos es un dipolo perfecto.

Si hubiese elegido otro sistema de coordenadas, debería haber llegado al mismo resultado, ya que la carga neta es cero, entonces el momento dipolar no depende del origen elegido.

El ejercicio no me lo pide, pero voy a calcular el potencial lejos usando solo la contribución dipolar (la monopolar es cero).

$$V_{lejos}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{26}$$

En este caso, $r$ y $\hat{r}$ son la coordenada y el versor **esféricos**. Recordemos que cuando estoy muy lejos, planteo todo en esféricas.

Entonces, $\hat{z} = cos\theta\hat{r} - sin\theta\hat{\phi}$. Como siempre, la parte que no sea $\hat{r}$ muere en el producto escalar de la integral.

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\pi\sigma dR^2\hat{z}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\pi\sigma dR^2 cos\theta\hat{r}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{27}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = -\frac{\sigma dR^2 cos\theta}{4\epsilon_0 r^2} \tag{28}$$

**Distribución de momento dipolar**

- Podemos construir una distribución superficial de momento dipolar, haciendo tender $d$ a cero y $\sigma$ a infinito, de tal forma que $\sigma d = P_s$. Repita el punto anterior para este caso límite.

Veamos qué pasa si calculamos el momento dipolar usando una 'distribución superficial de momento dipolar' $P_s = \sigma d$

Imaginemos un sandwich de pan circular donde los panes son los dos discos. Ahora bien, este sandwich no tiene espesor, y tiene carga total cero.

La frase 'distribución superficial de momento dipolar' me sugiere que la integre en superficie. **Así como cuando integro una distribución superficial de carga en una superficie obtengo una carga, si integro $P_s$ en una superficie, debería obtener un momento dipolar**, o su módulo en realidad, ya que el momento dipolar es un vector. Lo llamo $p$.

$$p = \int_{sandwich} P_s dS = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma d.r'dr'd\phi' = \pi\sigma dR^2 \tag{29}$$

que es el módulo del vector $\vec{p}$ que obtuve antes en (5). Si quiero meterlo en la expresión del potencial lejos, tengo que darle caracter vectorial y agregarle el $-\hat{z}$.