

# Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 5

Facundo Pugliese

# Repaso: Divergencias, rotores y dieléctricos

Para todo dieléctrico (LIH, electrete u otro) vale:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

Para poder definir unívocamente cada campo, **necesito conocer sus divergencias y rotores.**

Campo	$\nabla \cdot$	$\nabla \times$
<b>E</b>	$\rho/\epsilon_0$	0
<b>P</b>	$-\rho_P$	?
<b>D</b>	$\rho_L$	?

Pero dado que E es irrotacional, tengo que  $\nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P}$

En el fondo, las propiedades del dieléctrico nos dan la ecuación que nos falta

**Para un LIH:**

$$\nabla \times \bar{E} = \nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P} = 0$$

**Para un electrete:**

$\bar{P}$  es dato y puedo calcular  $\nabla \times \bar{P}$

# Electretes: Materiales con polarización fija

Como dijimos, un electrete es un material dieléctrico con **polarización  $\mathbf{P}$  dada, independiente del campo eléctrico externo.**

Esto nos permite calcular la densidad de polarización en volumen y en superficie:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

Si no hay otros medios, le sumamos las cargas libres (normalmente dato) y obtenemos las densidades de carga totales para calcular  $\mathbf{E}$  cómo en la Guía 1.

Si hay otros medios, resolvemos  $\mathbf{D}$  usando la carga libre y conociendo  $\mathbf{P}$  podemos obtener el campo eléctrico de

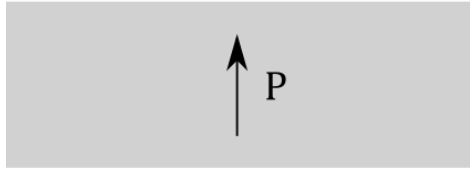
$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

Los dieléctricos los seguimos trabajando cómo antes.

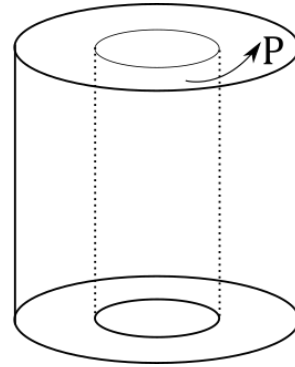
# Ejercicio 21: Dos electretes para entrar en calor

21. Para los electretes de las figuras, muestre que  $\vec{D}=0$  en el primer caso y  $\vec{E}=0$  en el segundo caso. Recuerde que un electrete es un material que presenta polarización en ausencia de fuentes externas, por lo tanto no es un material lineal.

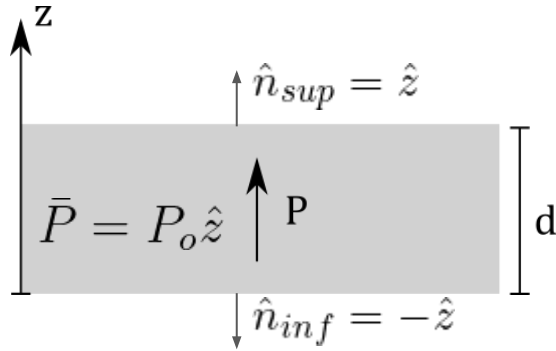
(a)



(b)



## Ejercicio 21(a)



Lo primero que notamos es que no hay carga libre en el sistema (solo tenemos un dieléctrico neutro), por lo que E será generado por cargas de polarización:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

Cómo P es constante, no tenemos carga en volumen

$$\rho = \rho_L + \rho_P = 0$$

Para la densidad en superficie, analizo las 2 interfaces  $z=0$  y  $z=d$

$$z = 0 : \quad \sigma_p^{(inf)} = -[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}] \cdot \hat{n}_{inf} = -[0 - P_o \hat{z}] \cdot (-\hat{z}) = -P_o$$

$$z = d : \quad \sigma_p^{(sup)} = -[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}] \cdot \hat{n}_{sup} = -[0 - P_o \hat{z}] \cdot \hat{z} = P_o$$

Por lo tanto, tenemos 2 planos paralelos con densidad superficial  $P_o$  y  $-P_o$

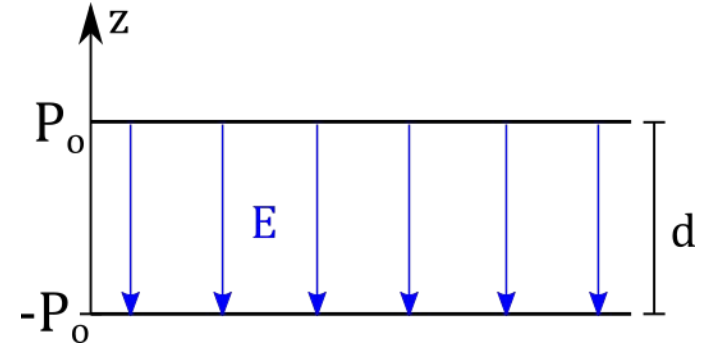
## Ejercicio 21(a)

Para el campo eléctrico, el problema se reduce a dos planos paralelos con densidad de carga superficial opuesta, cuyo resultado conocemos

$$\bar{E}(z) = \begin{cases} -\frac{P_o}{\epsilon_o} \hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Juntando esto con la polarización

$$\bar{P}(z) = \begin{cases} P_o \hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$



Con esto puedo obtener D usando:  $\bar{D}(z) = \epsilon_o \bar{E} + \bar{P}(z) = \begin{cases} \epsilon_o \left( -\frac{P_o}{\epsilon_o} \hat{z} \right) + P_o \hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Luego,  $D=0$  en todo el espacio

¡No tenemos carga libre en el sistema!

## Ejercicio 21(b)

Miremos el sistema desde arriba.

Igual que antes, no tenemos cargas libres, por lo que la carga será totalmente de polarización

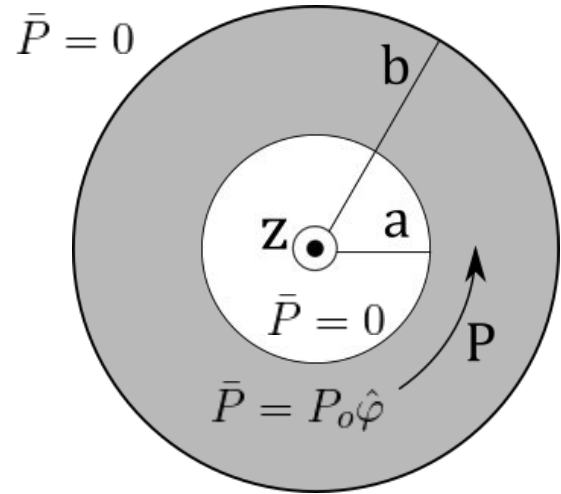
$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

En cilíndricas:  $\nabla \cdot \bar{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rP_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$

Por lo tanto, solo podemos tener carga superficial en las interfaces  $r=a$  y  $r=b$

$$r = a : \quad \sigma_P^{(a)} = - [\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}] \cdot \hat{n}_a = P_o \hat{\varphi} \cdot (-\hat{r}) = 0$$

$$r = b : \quad \sigma_P^{(b)} = - [\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}] \cdot \hat{n}_b = P_o \hat{\varphi} \cdot \hat{r} = 0$$



*Pero se ve que tampoco...*

## Ejercicio 21(b): Campo eléctrico del vacío

Por lo tanto, el sistema se reduce a... **nada**. No hay carga en ningún punto del espacio, por lo que el **campo eléctrico es nulo**.

Obtenemos entonces  $\bar{D}(\bar{r}) = \bar{P}(\bar{r}) = \begin{cases} P_o \hat{\varphi} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Es razonable pensar que E será nulo dado que no hay cargas (o fuentes).

Pero si tampoco hay carga libre, ¿cómo puede ser que tengamos D no nulo?

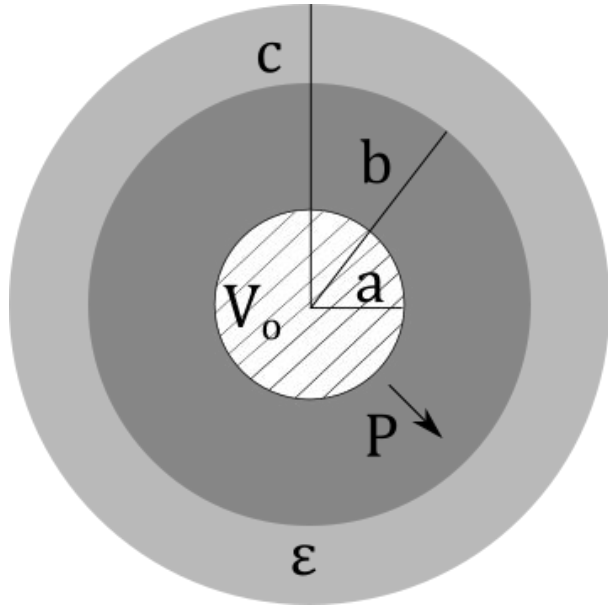
El problema es que **la carga libre no es la única fuente de D**, pues

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{D} &= \nabla \times \bar{P} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial P_r}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r P_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r P_o)}{\partial r} \hat{z} = \frac{P_o}{r} \hat{z} \quad \implies \quad \nabla \times \bar{D} = \frac{P_o}{r} \hat{z} \quad , \quad \nabla \cdot \bar{D} = 0 \end{aligned}$$

**¡Continuará  
dentro de  
un mes!**



# Mezcladito: Juntando medios



Tenemos una esfera conductora maciza de radio  $a$  conectada a una batería con potencial  $V_0$  rodeada por un electrete de polarización radial  $\vec{P} = P_0 \hat{r}$  de radio interno  $a$  y externo  $b$ .

Todo este sistema está envuelto en un dieléctrico LHM de permitividad  $\epsilon$ , radio interno  $b$  y externo  $c$ .

- Calcular  $E$ ,  $P$  y  $D$  en todo el espacio
- Obtener las densidades de carga libre y polarización
- ¿Cómo es el campo eléctrico en el exterior para  $V_0=0$ ? ¿Y para  $Q_{\text{conductor}}=0$ ?