

Física 3: Electricidad y Magnetismo

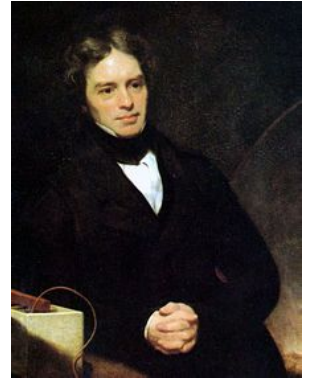
Pablo Dmitruk

Clase 19

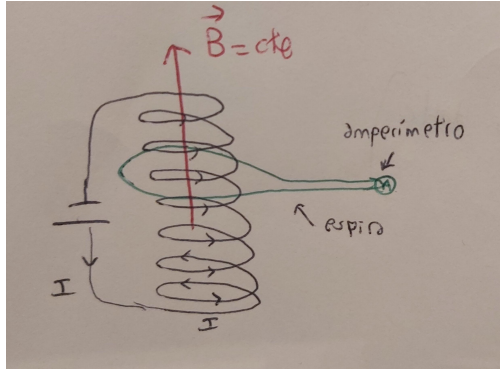
Inducción electromagnética : Ley de Faraday

Oersted (1821) descubrió que una corriente eléctrica produce un campo magnético

→ Faraday se preguntó será cierto lo inverso ? → Experimentos (1831):

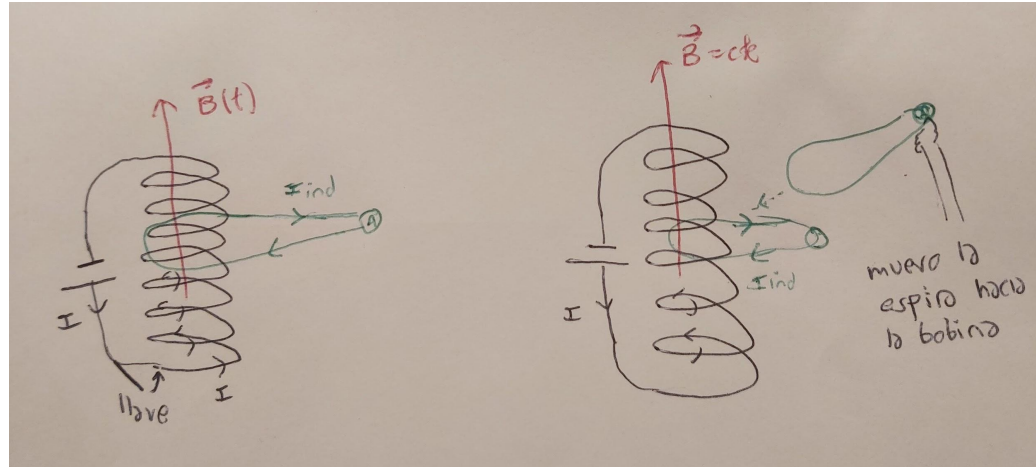


Michael Faraday



→ Espira (fija) en campo B uniforme: no veo nada

Campo B variable en el tiempo
→ aparece corriente en la
espira !

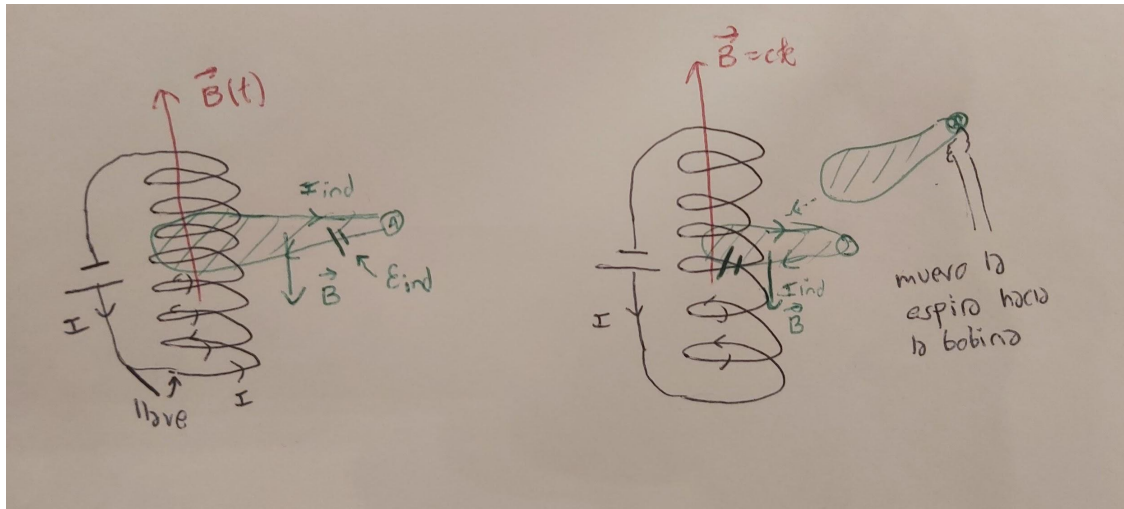


Muevo la
espira hacia
el campo B
(uniforme)
→ aparece
corriente en
la espira !

Al **variar el flujo** de campo magnético a través de la espira se **induce** una corriente en la espira
 → aparece una **f.e.m. inducida**

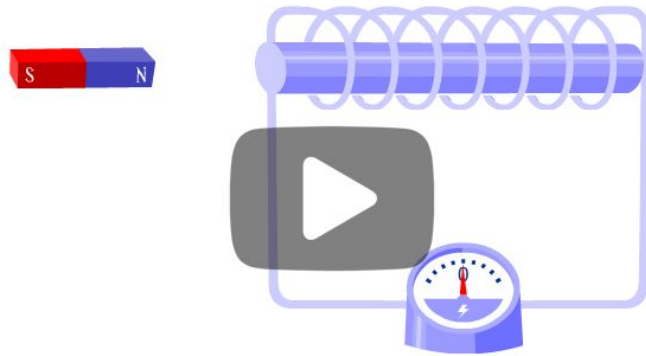
$$\varepsilon_{ind} \propto \frac{d\phi_B}{dt}$$

Ley de Lenz: el signo de la f.e.m. inducida es tal que genere una corriente cuyo campo magnético produce un flujo que se opone al cambio de flujo que indujo la f.e.m.

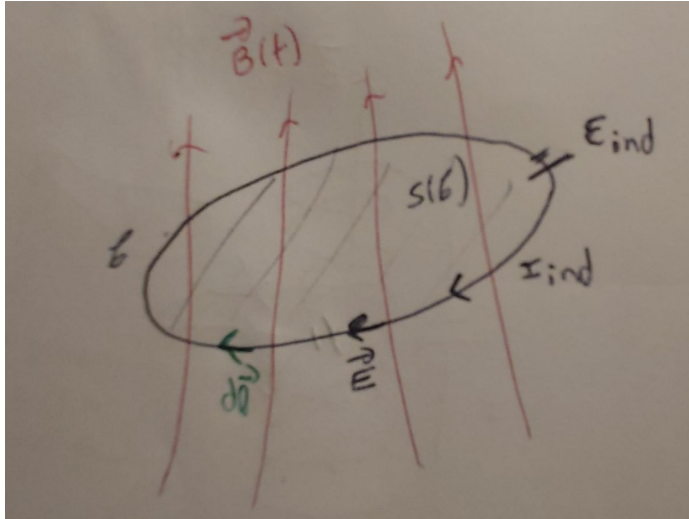


De no ser así, el flujo se incrementaría indefinidamente, con ello la corriente también y se violaría la conservación de la energía

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$$



Al generarse una corriente eléctrica en la espira hay un **campo eléctrico** tal que



$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

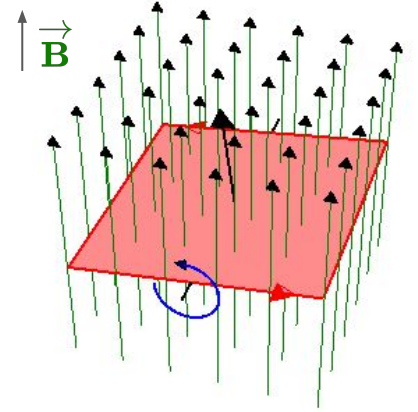
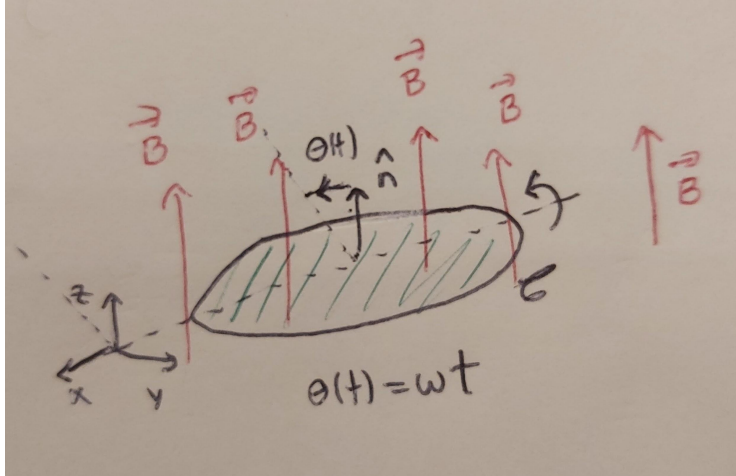
Por Stokes,
$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$\int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\int_{S(C)} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad \forall S(C)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

el campo eléctrico deja de ser conservativo como lo era en electrostática (aunque podemos siempre separarlo en una parte conservativa y otra no)

Supongamos una espira que rota sobre un eje, con velocidad angular de rotación constante, en presencia de un campo magnético uniforme y constante.



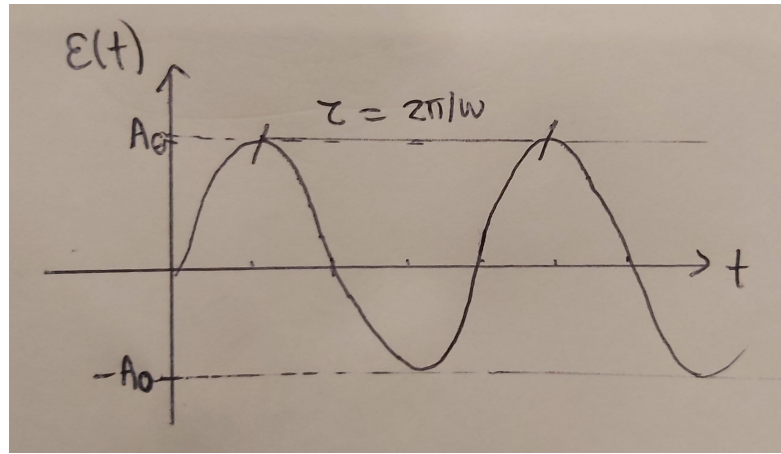
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} B \cos(\omega t) dS = -\frac{d}{dt} B \cos(\omega t) S = \omega B S \sin(\omega t)$$

Si hay N espiras arrolladas (bobinado) el flujo magnético se multiplica por N y entonces

$$\varepsilon_{ind}(t) = \omega B N S \sin(\omega t) = A_0 \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad A_0 = \omega B N S$$

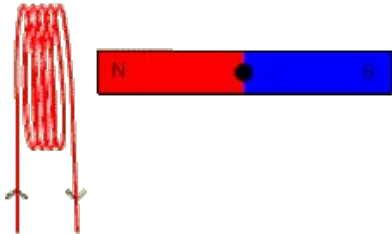
Obtuvimos una f.e.m. (inducida) sinusoidal,

$$\varepsilon(t) = A_0 \sin(\omega t)$$



Esto sirve como *generador de voltaje (y corriente) alterna*.

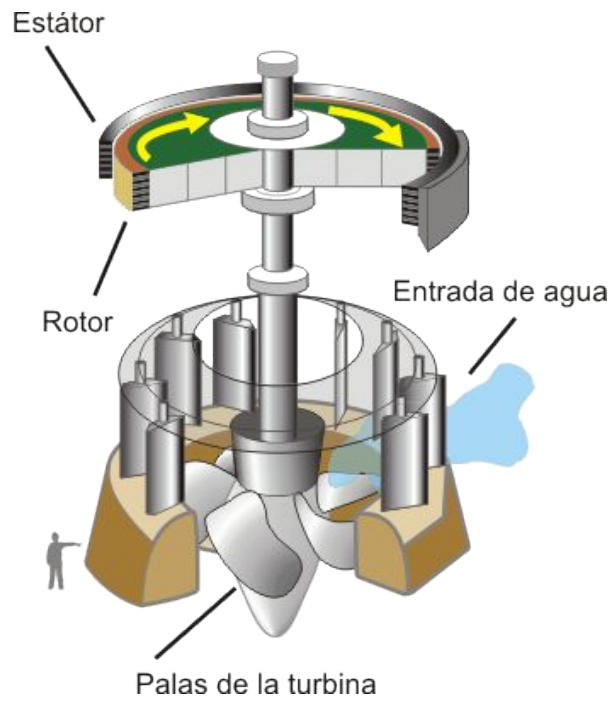
Si la espira tiene una resistencia R, disipará la corriente generada. Podemos pensar esto como un sistema que convierte energía mecánica (al girar la espira) en energía eléctrica y finalmente en disipación, lo que podría servir para encender una lamparita o hacer funcionar algún artefacto eléctrico → generador eléctrico



aquí la espira está fija y el campo B es variable

dinamo de botella (bicicletas)

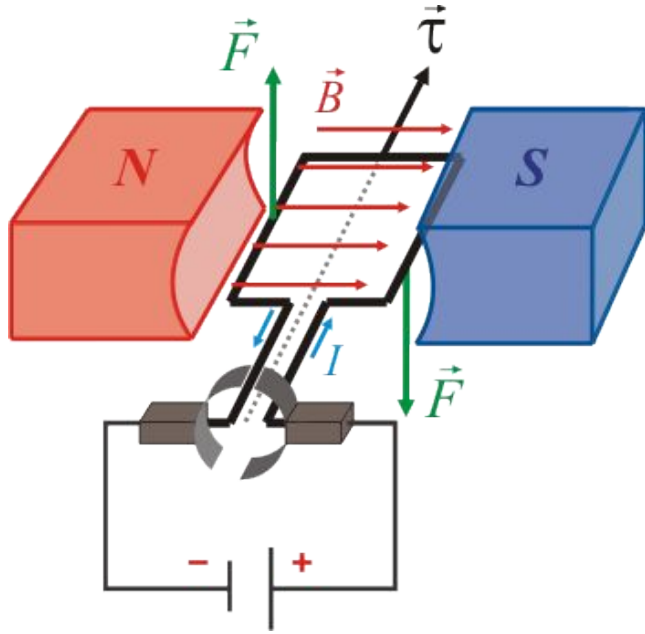




→ [central hidroeléctrica](#):
estator = espira, rotor = imán (conectado al eje turbina)



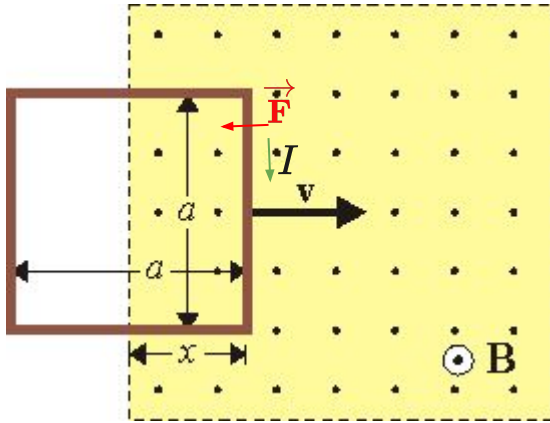
El proceso inverso por el cual *con una corriente eléctrica generamos movimiento* (energía mecánica) constituye un motor eléctrico → Tesla !



haciendo pasar corriente por una espira en presencia de un campo magnético consigo un torque

Frenado magnético de una espira

Supongamos una espira rectangular que entra con una dada velocidad a una región de campo magnético uniforme y perpendicular al plano de la espira



En la espira, al variar el flujo magnético a través de ella aparece una f.e.m. inducida,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (B_0 a x) = -B_0 a \frac{dx}{dt} = -B_0 a v$$

Si la espira tiene resistencia R , la corriente será:

$$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = -\frac{B_0 a v}{R}$$

(esta corriente genera un campo magnético en sentido opuesto al original, de acuerdo a la ley de Lenz)

Con esta corriente la espira siente una **fuerza de frenado**

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{B_0 a v}{R} a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0^2 a^2 v}{R} \hat{x} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} \vec{v}$$

que actúa como una fuerza viscosa (proporcional a la velocidad)

Inductancia, auto-inductancia

Supongamos un grupo de N espiras C_k con I_k la corriente en la espira k y $\vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}})$ el campo generado por la espira k, con $k=1, \dots, N$

Consideremos una espira j de ese grupo de espiras. El flujo del campo magnético de la espira k a través de la superficie en la espira j es:

$$\phi_{jk} = \int_{S(C_j)} \vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_k(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}_k = \kappa I_k \vec{\nabla} \times \oint_{C_k} \frac{d\vec{\mathbf{l}}_k}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_k|}$$

$$\Rightarrow \phi_{jk} = \kappa I_k \int_{S(C_j)} d\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla} \times \oint_{C_k} \frac{d\vec{\mathbf{l}}_k}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_k|} = \kappa I_k \oint_{C_j} d\vec{\mathbf{l}}_j \cdot \oint_{C_k} \frac{d\vec{\mathbf{l}}_k}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_k|}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_{jk}}{I_k} = \kappa \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{d\vec{\mathbf{l}}_j \cdot d\vec{\mathbf{l}}_k}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_k|} = M_{jk} \quad \text{coeficiente geométrico que se llama } \textit{inductancia mutua}$$

$$M_{jk} = M_{kj}$$

La corriente en la espira j también genera un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_j(\vec{\mathbf{r}})$ que produce un flujo sobre la superficie de la propia espira j .

$$\phi_{jj} = \int_{S(C_j)} \vec{\mathbf{B}}_j(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \kappa I_j \int_{S(C_j)} d\vec{\mathbf{S}} \cdot \oint_{C_j} \frac{d\vec{\mathbf{l}}_j \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_j)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_j|^3} = M_{jj} I_j$$

$$M_{jj} = \frac{\phi_{jj}}{I_j} = L_j \quad \text{se llama la } \textit{autoinductancia} \text{ y es también un coeficiente geométrico}$$

$$\text{Unidades: } [L] = \frac{[\phi]}{[I]} = \frac{T \, m^2}{A} = H \text{ (Henry)}$$

El flujo total en la espira j , debido a los campos de todas las espiras es:

$$\phi_j = \sum_{k=1}^N \phi_{jk} = \sum_{k=1}^N M_{jk} I_k$$

que nos da una relación lineal entre los flujos de cada espira y las corrientes de todas las espiras (similar a lo que ocurría con un grupo de conductores entre los voltajes y las cargas totales en c/u)

Supongamos ahora variamos el flujo por efecto de variar las corrientes en las espiras, pero sin que las espiras se deformen o se muevan (es decir, dejamos la geometría fija).

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt} = -\sum_{k=1}^N M_{jk} \frac{dI_k}{dt}$$

En particular, para una sola espira,

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

expresión que vamos a aplicar en circuitos cuando haya alguna *inductancia*

Inductancia de un solenoide

Supongamos un solenoide de N vueltas, altura h y superficie $S \rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{h}$

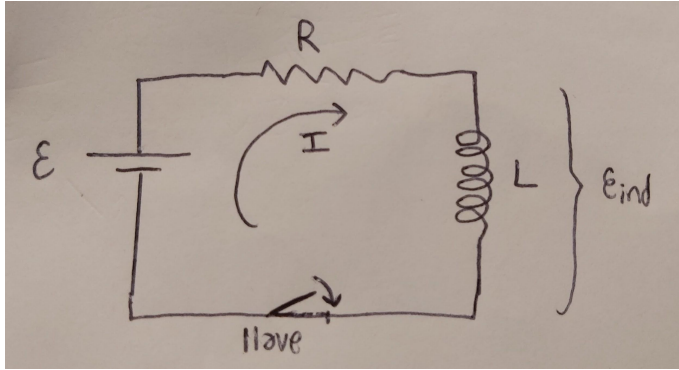
El flujo por cada espira del solenoide es: $\phi_i = B S = \frac{\mu_0 N I}{h} S$

y como el solenoide se compone de N espiras, el flujo total es: $\phi = N \phi_i = \frac{\mu_0 N^2 I}{h} S$

de aquí podemos despejar la **inductancia** (autoinductancia), $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{h}$

que vemos que depende sólo de la geometría

Inductancia en un circuito



Vimos que en la inductancia aparece una f.e.m.

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

Recorriendo el circuito (en sentido horario) entonces:

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind} = IR \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + IR \quad \text{nos queda una ecuación diferencial para } I$$

Si calculamos la potencia entregada por la pila, $P = I\varepsilon = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R = \frac{L}{2} \frac{dI^2}{dt} + I^2 R$

y si integramos entre 0 y t obtenemos, $U = \int_0^t P dt = \frac{L I^2}{2} + \int_0^t I^2 R dt$

es decir que la energía entregada se va parte en forma de disipación y parte se acumula en la inductancia

Podemos interpretar entonces la **energía magnética** almacenada en la inductancia como

$$U = \frac{L I^2}{2}$$

En general *para un sistema de espiras*, con coeficientes de inducción M_{jk} la energía magnética almacenada es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{jk} I_j I_k$$

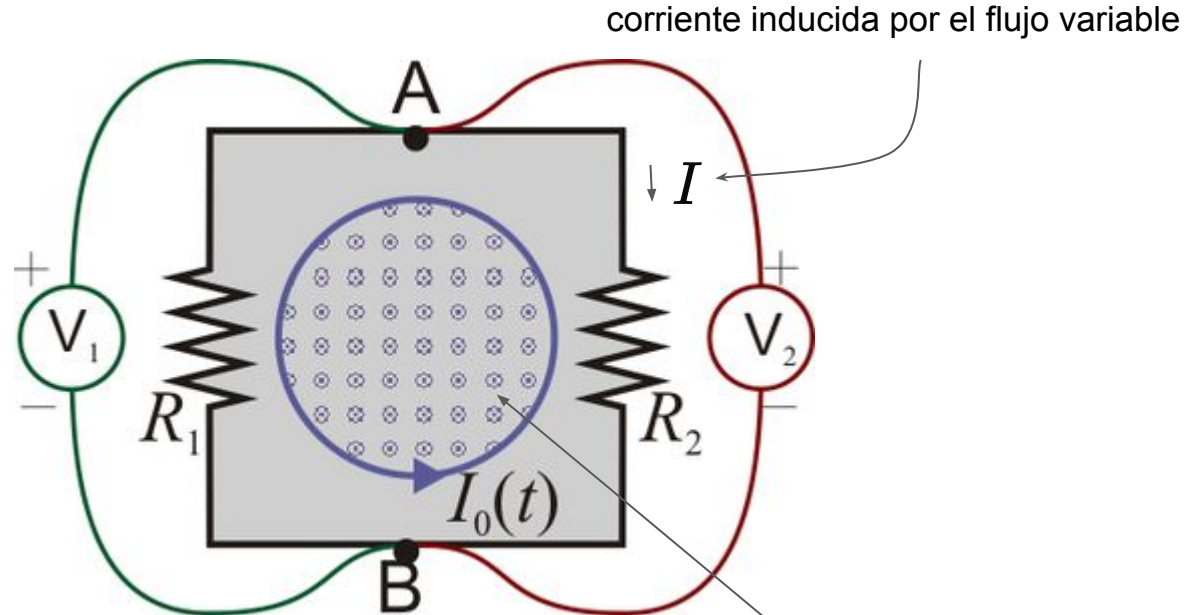
Ojo cuando tratamos con circuitos influenciados por espiras o solenoides externos con corrientes variables...

circuito alrededor de un solenoide

Si la corriente por el solenoide es variable las lecturas de los dos voltímetros son distintas !

$$\oint_{\text{circuito}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \neq 0$$

$$\oint_{\text{circuito}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{R_2} + \int_B^A (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{R_1} = I R_2 + I R_1 = V_2 - V_1 \neq 0$$



solenoid interior
(con flujo variable)

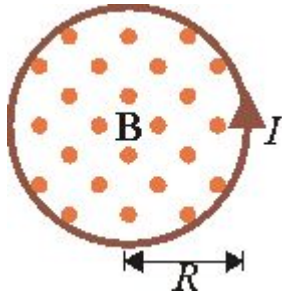
Inducción mutua de bobinas

Supongamos una configuración de dos bobinas una adentro de la otra como en la figura

Queremos calcular el coeficiente de inducción mutua M entre las bobinas, y la inductancia L de cada una.

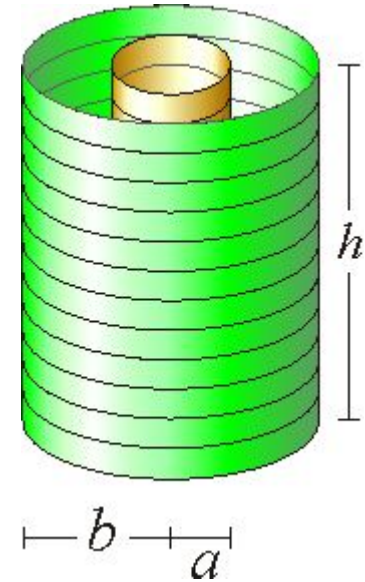
Empecemos calculando el campo magnético en todo punto.

Para un solenoide de radio R el campo magnético es:

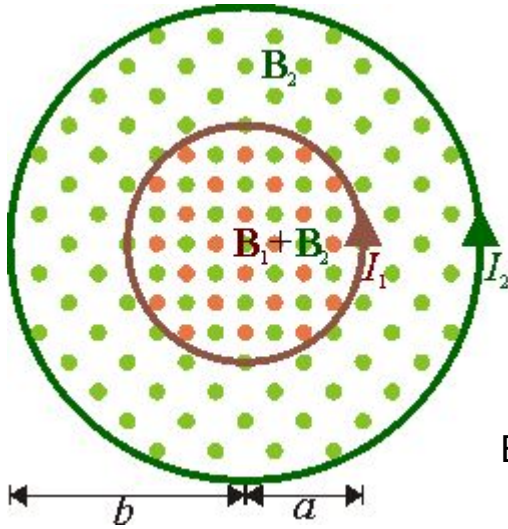


$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 N I}{h} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{si } r < R$$

y nulo afuera, si $r > R$



Considerando ahora los dos solenoides, aplicando superposición:



$$\vec{\mathbf{B}} = \left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{h} + \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad \text{si } r < a$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{si } a < r < b$$

$$\vec{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{si } r > b$$

En general tenemos, $\phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$

$$\phi_2 = M I_1 + L_2 I_2$$

para obtener los valores de L y M (que no dependen de las corrientes) podemos considerar casos particulares, por ejemplo un caso es suponer que $I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$

en ese caso el campo es $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} \hat{\mathbf{z}}$ si $r < b$ y los flujos son:

$$\phi_1 = N_1 \pi a^2 \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h}, \quad \phi_2 = N_2 \pi b^2 \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h}$$

De donde despejamos

$$M = \mu_0 \pi \frac{N_1 N_2 a^2}{h}, \quad L_2 = \mu_0 \pi \frac{N_2^2 b^2}{h}$$

Si ahora consideramos el caso $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$ entonces $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h} \hat{\mathbf{z}}$ si $r < a$ y

$$\phi_1 = N_1 \pi a^2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h}, \quad \phi_2 = N_2 \pi a^2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h}$$

de donde obtenemos el mismo valor de M y

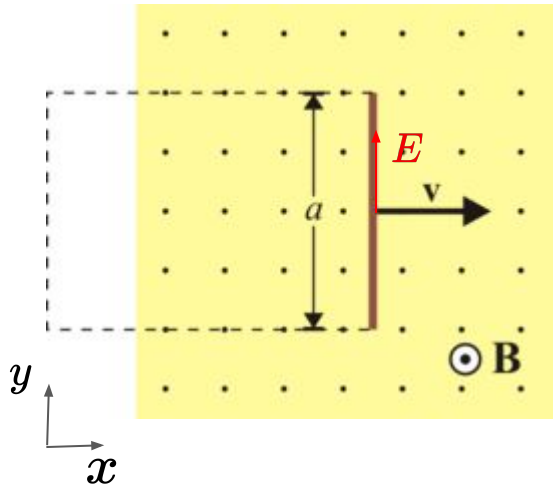
$$L_1 = \mu_0 \pi \frac{N_1^2 a^2}{h}$$

Se llama *constante de acoplamiento* al valor de $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

En este caso,
$$k = \frac{N_1 N_2 a^2}{\sqrt{N_1^2 N_2^2 a^2 b^2}} = \frac{a}{b}$$

La constante k es siempre menor que 1, que sería el caso de $a=b$, donde hay acoplamiento máximo.

Barra que avanza en un campo uniforme



Las cargas libres en la barra se mueven inicialmente solidarias con la barra, con velocidad v en $x \rightarrow$ experimentan entonces una fuerza debida al campo magnético:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q(v\hat{x} \times B\hat{z}) = -qvB\hat{y}$$

Las cargas positivas experimentan una fuerza hacia abajo y las negativas una fuerza hacia arriba, es decir que el campo magnético actúa como un separador de cargas, lo que se conoce como [efecto Hall](#) en general (por ejemplo en tubos de rayos catódicos, con un campo magnético transversal)

En la parte de arriba de la barra se acumulan cargas negativas y en la de abajo positivas (o defecto de negativas) y eso genera un campo eléctrico, que actúa con una fuerza eléctrica en contraposición a la magnética

Cuando se alcanza el equilibrio, la fuerza neta total es nula, entonces

$$\vec{F} = 0 = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = vB\hat{y}$$

lo que se conoce como *campo eléctrico inducido*

Si ahora calculamos la integral de línea del campo eléctrico en la barra (yendo de abajo hacia arriba)

$$\int_{\text{barra}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_{\text{barra}} v B \hat{\mathbf{y}} \cdot dl \hat{\mathbf{y}} = v B a$$

Veamos qué nos daría Faraday si tomamos una curva C que sea un cuadrado cuyo lado derecho es la barra (y completamos los otros lados con la línea punteada), recorrida en sentido antihorario (o sea de abajo hacia arriba en la barra):

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B a x) = -v B a$$

que coincide con el resultado que obtuvimos solamente usando la fuerza de Lorentz !

Esto nos muestra que la fuerza de Lorentz es consistente con Faraday, pero Faraday es general y vincula los campos eléctricos y magnéticos, aún si no estoy mirando las cargas.