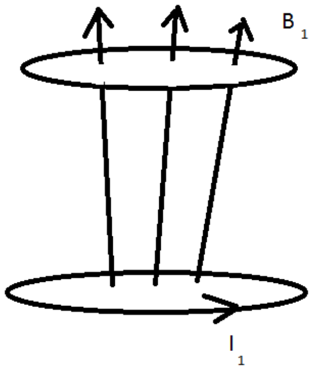
Inductancia. Auto y mutua.

Si tengo dos espiras y hago circular corriente por una de ellas, que llamo espira 1, se genera un campo que llamo $\vec{B}_1$. Algunas de las líneas de este campo van a atravesar la superficie encerrada por la espira 2:



Escribo entonces el flujo del campo $\vec{B}_1$ a través de la superficie encerrada por la espira 2 como ϕ_2,

$$\phi_2 = \int_{S(C_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \tag{1}$$

.

Luego, escribo a $\vec{B}_1$ como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1$ y aplico el teorema de Stokes,

$$\phi_2 = \int_{S(C_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S(C_2)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \tag{2}$$

La expresión general para $\vec{A}$ la conozco, y la llevo al caso particular de una densidad de corriente unidimensional cerrada en la espira 1,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{3}$$

Entonces reemplazando en (2),

$$\phi_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \left(\oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{l}_2 \tag{4}$$

Esto me dice que el flujo a través de la espira 2 ϕ_2 del campo $\vec{B}_1$, y la corriente que genera este campo y que circula por la espira 1 son proporcionales,

$$\phi_2 = M_{21} I_1 \tag{5}$$

donde

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1' \cdot \vec{dl}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{6}$$

que se llama coeficiente de inductancia mutua.
M_{21} tiene dos características fuertes:

1) Mirando la integral veo que es una cantidad que depende únicamente del medio material, la geometría y posición relativa de ambas espiras.

2) Puedo intercambiar 1 y 2 libremente en la integral, sin afectar el resultado, por lo cual $M_{21} = M_{12}$ (es simétrico). Esto implica,

$$\phi_1 = M_{12} I_2 \tag{7}$$

lo cual es muy loco: **si hago circular en la espira 2 la misma corriente que hice circular en la 1, obtengo el mismo flujo pero a través de la otra espira**. Puedo llamar entonces $M_{21} = M_{12} = M$.

Volviendo al caso original, de la expresión (5), donde hacía circular corriente por la espira 1: si varío la corriente I_1 en el tiempo, obtengo una variación de ϕ_2, y aplicando la ley de Faraday-Lenz ante esta variación temporal de ϕ_2, obtengo una fem en la espira 2,

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \tag{8}$$

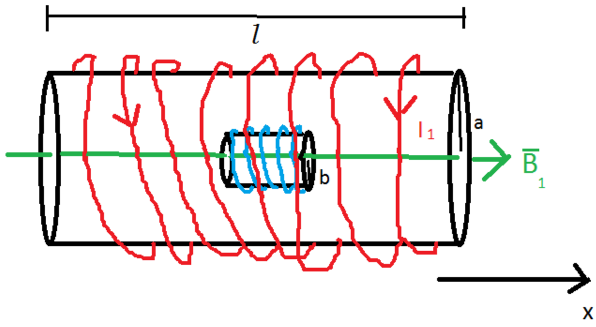
Además, esta variación de corriente I_1 me genera una fem en la propia espira 1, de manera proporcional con el factor M_{11}. Esto es general para cualquiera de las dos espiras. Llamo a M_{ii} como **auto-inductancia** L (generalmente se la llama solo inductancia), y también depende únicamente de la geometría de la espira o configuración que genera una corriente I.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{9}$$

Problema 5.7

7. Un solenoide tiene 1000 vueltas, 20cm de diámetro y 40cm de largo. En su centro se ubica coaxialmente otro solenoide de 1000 vueltas, 4cm de diámetro y longitud despreciable, cuya resistencia vale 50Ω. Inicialmente circulan 5A por el solenoide exterior, luego se reduce linealmente la corriente a 1A en 0.5s. Calcular la corriente que se induce en el solenoide interior, cuya autoinductancia es L.

Dibujo la configuración, llamando 1 al solenoide grande, y 2 al chico con radios a y b respectivamente. La longitud del solenoide 1 es l, y elijo el sentido de la corriente como indica la figura.



Esto me genera un campo constante $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N I_1}{l}\hat{x}$ donde $N = N_1 = N_2$ por los datos del problema.

Calculo el flujo de $\vec{B}_1$ a través de la superficie encerrada por el solenoide 2,

$$\phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 N I_1}{l}\hat{x} \cdot \hat{x} N \pi b^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi b^2}{l} I_1 = M I_1 \tag{10}$$

con $M = \frac{\mu_0 N^2 \pi b^2}{l}$ que depende únicamente de la geometría y el medio.

Por la ley de Faraday-Lenz, la fem inducida en el solenoide 2 es,

$$\varepsilon_{2-1} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \tag{11}$$

Ahora bien, el problema nos da los datos para calcular esta derivada a grandes rasgos, porque al ser el solenoide chico de tamaño despreciable con respecto al grande, este ve la fem inducida como constante. La llamo $\varepsilon_{2-1} = \varepsilon_0$ y se puede calcular a partir de los datos del problema usando la fórmula anterior.

Ahora me paro en el solenoide 2 y planteo la fem inducida como una suma de la fem ε_0 y la variación del flujo propia generada por la nueva corriente 2, que la expreso a través de la auto-inductancia L del solenoide 2, que es dato del problema,

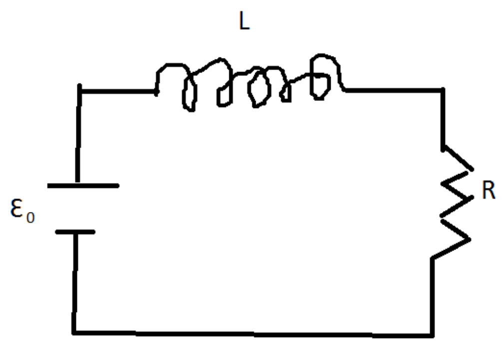
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 - L\frac{dI_2}{dt} \tag{12}$$

Es importante notar que el sentido final de la corriente va a quedar determinado por el signo de ε_0, pero siempre, **siempre**, debo poner un signo negativo antes del último miembro, porque la fem ε_2 se opone a la variación del flujo a través del propio solenoide.

Usando la Ley de Ohm, $\varepsilon_2 = I_2 R$, donde R es la resistencia del solenoide 2 (dato), me queda la siguiente ecuación diferencial,

$$L\frac{dI_2}{dt} + I_2 R - \varepsilon_0 = 0 \tag{13}$$

Esto se puede dibujar como un circuito de la siguiente manera:



donde ε_0 se ve como una pila, y vemos que la inductancia también causa una caída de potencial, además de la resistencia.

La ecuación que me quedó es una ecuación diferencial lineal de orden 1, cuya solución general es:

$$I_2(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} + Ce^{-(R/L)t} \tag{14}$$

La constante C la determino usando la condición inicial de que a tiempo cero, no había corriente circulando por el solenoide 2. Entonces, $C = -\frac{\varepsilon_0}{R}$, y me queda,

$$\boxed{I_2(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t})} \tag{15}$$

Por la forma funcional de I_2 puedo ver que para tiempos largos, la corriente se va a estabilizar en el valor $\frac{\varepsilon_0}{R}$, que es el valor para el circuito sin la inductancia.

El valor $\frac{L}{R}$ es el tiempo característico τ y por lo general es el tiempo que tarda la corriente en llegar a $2/3$ de su valor máximo.

Propuesta: aprovechar que el ejercicio tiene datos numéricos y graficar la corriente I_2.
Hay que darle un valor a L, tal que $I_2(\tau) = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{R}$.

Energía magnética

Ahora que vimos cómo se comporta la corriente en un caso con inductancia, podemos entender un poco mejor su sentido físico, si pensamos en energía. Supongamos que tengo el circuito anterior, sin la resistencia.

Vimos que al inducir una corriente, instantáneamente aparece otra corriente opuesta. Esto implica que necesito realizar un trabajo para vencer a esta corriente opuesta. Lo bueno de este trabajo, es que no se disipa como calor en una resistencia, sino que se almacena como energía magnética dentro del solenoide, y es energía recuperada cuando apago la corriente.

La energía almacenada es este trabajo y se calcula a través de la potencia:

$$\frac{dW}{dt} = P = \varepsilon I = -LI\frac{dI}{dt} \tag{16}$$

$$-W = U = \frac{1}{2}LI^2 \tag{17}$$

Parece contradictorio que calculemos una energía magnética a través de un trabajo, cuando establecimos que la fuerza magnética no hacía trabajo.

En realidad, lo que requiere trabajo es cambiar el campo magnético, de cero a algo constante en el caso que vimos, por ejemplo. Y variar un campo magnético implica variar un flujo. Lo cual por ley de Faraday, induce un campo eléctrico que sí realiza trabajo.

Se puede demostrar para un caso general, parecido al problema que vimos, donde tengo dos solenoides con corrientes, que la energía magnética es,

$$U = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \tag{18}$$

En el Feynmann vol. 2, sección 17-8 hay una demostración muy intuitiva de esta última fórmula.