Física 3-Cátedra Dmitruk

Clase 2
Guía 6
Facundo Pugliese

Corriente alterna: Repaso teórico

Con lo que vemos hoy van a poder hacer del ejercicio 6.6 al 6.16 (inclusive). Repasando rápidamente la teórica, para un circuito RLC tenemos

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(\varepsilon_0 e^{j\omega t})$$

Cómo el transitorio decae a 0 en un tiempo finito, miro las soluciones estacionarias con frecuencia ω

$$q(t) = \mathrm{Re}(Qe^{j\omega t}) \quad Q \in \mathbb{C}$$
$$i(t) = \mathrm{Re}(Ie^{j\omega t}) \quad I \in \mathbb{C}$$

Y usando que $\frac{dq}{dt} = i \Longrightarrow \mathrm{Re}(j\omega Q e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(Ie^{j\omega t}) \Longrightarrow j\omega Q = I$

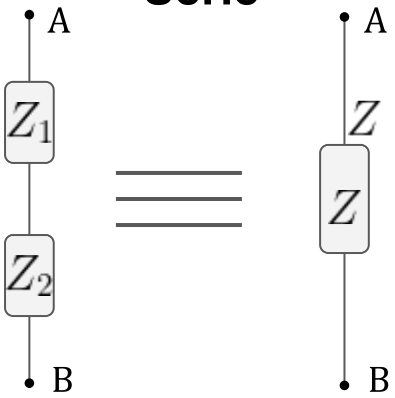
Reemplazamos en la ecuación y “tachamos” los Re (los asumimos implícitos)

$$Lj\omega I + RI + \frac{I}{j\omega C} = \varepsilon_0 \Longleftrightarrow \left(Lj\omega + R + \frac{1}{j\omega C}\right) I = \varepsilon_0 \Longleftrightarrow Z(\omega)I = \varepsilon_0$$

Corriente alterna: Impedancias

Capacitor: $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ Resistencia: $Z_R = R$ Inductancia: $Z_L = j\omega L$

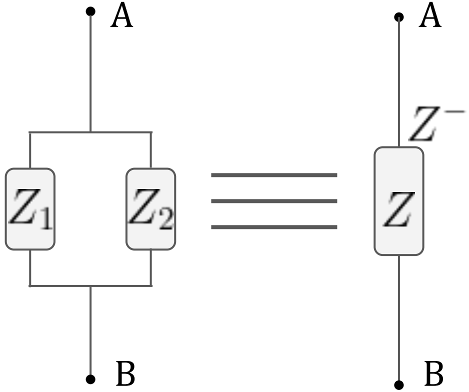
Serie



$$Z = Z_1 + Z_2$$

Suman cómo resistencias.
Para Z_C recuperamos los capacitores

Paralelo



$$Z^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$$

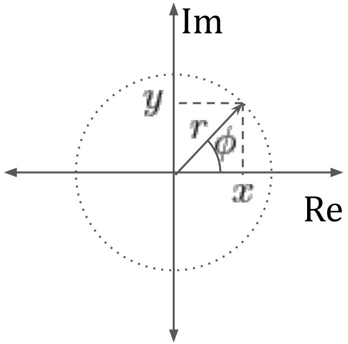
Leyes de Kirchoff:

Nodos: $\sum_k I_k = 0$

Mallas: $\sum_k Z_k I_k = \sum_j \varepsilon_j$

Todas las fuentes deben tener la misma frecuencia

Repaso veloz de números complejos



Forma cartesiana

$$z = x + jy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

Forma polar

$$z = re^{j\phi}$$

Conjugado: $z^* = x - jy = re^{j(-\phi)}$

Norma: $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Inverso: $z^{-1} = \dfrac{z^*}{|z|^2} = \dfrac{1}{r}e^{-j\phi}$

Producto: $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = re^{j\phi}$

$$r = r_1 r_2$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

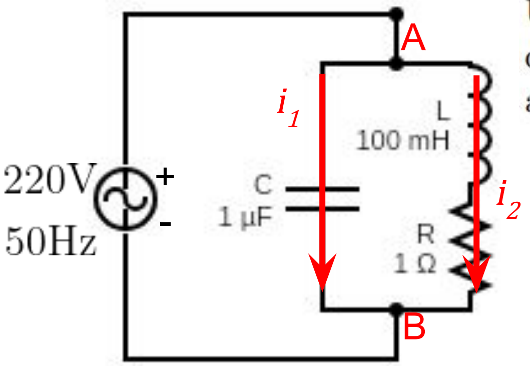
Suma: $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x + jy$

$$x = x_1 + x_2 \qquad y = y_1 + y_2$$

Parte real: $2\mathrm{Re}(z) = z + z^*$

Parte imaginaria: $2\mathrm{Im}(z) = z - z^*$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1\,\mu$F está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1$ H cuya resistencia interna vale $R = 1\,\Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Cómo tenemos una sola fuente, le ponemos fase nula $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Definimos las corrientes de rama i_1 e i_2 y la caída de potencial entre A y B

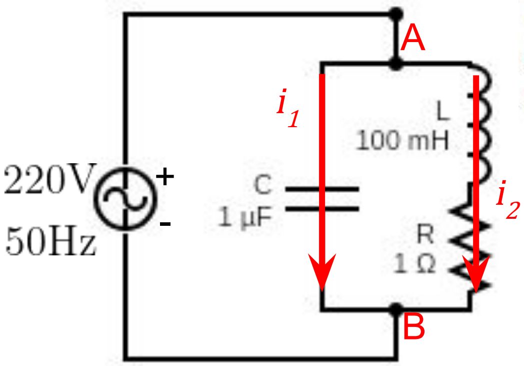
$$V_{AB} = -\varepsilon = -Z_1 i_1 = -Z_2 i_2$$

Pero ¿quienes son Z_1 y Z_2? En la rama 1 tenemos solo un capacitor
En 2 tengo una R y una L en serie; sus impedancias se suman

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_2 = Z_R + Z_L = R + j\omega L$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1\,\mu$F está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1$ H cuya resistencia interna vale $R = 1\,\Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

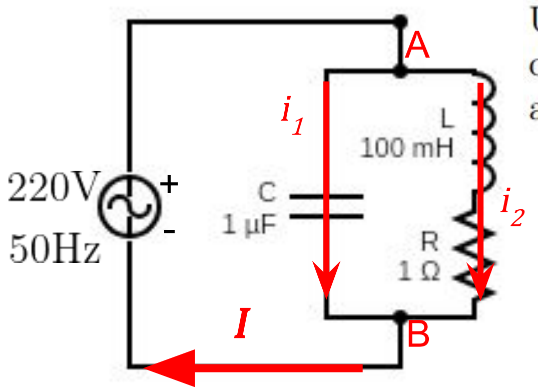
$$i_1 = \varepsilon j\omega C \Longrightarrow i_1(t) = \mathrm{Re}(i_1 e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(\varepsilon\omega C j e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(\varepsilon\omega C e^{j(\omega t+\pi/2)}) \Longrightarrow i_1(t) = \varepsilon\omega C\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{R + j\omega L} = \frac{\varepsilon}{R + j\omega L}\frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{\varepsilon(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \varepsilon A_2 e^{j\varphi_2}$$

Forma polar de 1/Z

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_2 = \left|\dfrac{(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}\right| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(..)}{\mathrm{Re}(..)}\right) = \arctan\left(-\dfrac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{array}\right. \longrightarrow i_2(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1\,\mu$F está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1$ H cuya resistencia interna vale $R = 1\,\Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

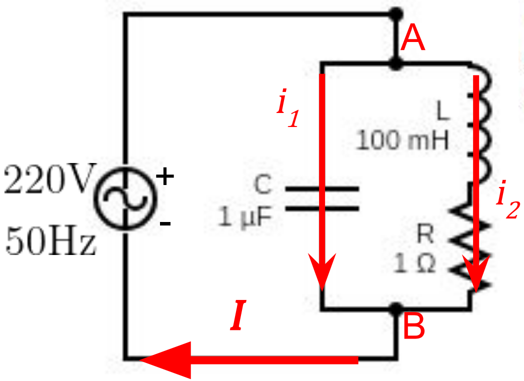
- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Usando ley de nodos en B $\quad I = i_1 + i_2 = \dfrac{\varepsilon}{Z_1} + \dfrac{\varepsilon}{Z_2} = \dfrac{\varepsilon}{Z_{eq}} \qquad Z_{eq} = \left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right)^{-1}$

$$Z_{eq}^{-1} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 + j\omega C(R + j\omega L)}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\theta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \varphi$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1\,\mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1\,\text{H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1\,\Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de $220\,\text{V}$ y $50\,\text{Hz}$ determinar:

- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Recordar que ω=2πf=2π50Hz

$$i_1(t) = \varepsilon\omega C\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \approx -0.49\pi$$

$$i_2(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \varphi(\omega) \approx -0.49\pi$$

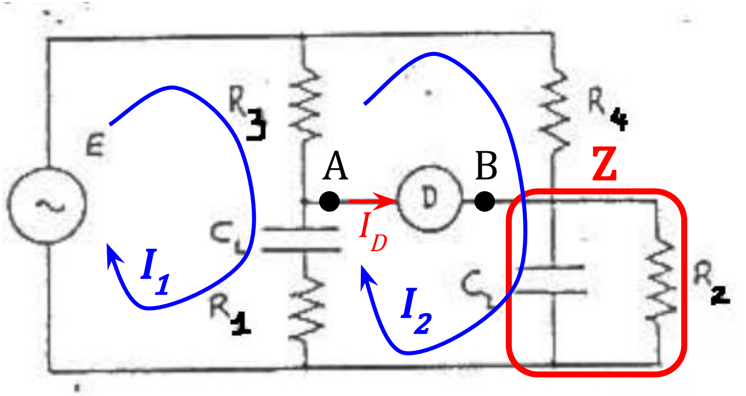
$$I(t) = \sqrt{\frac{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}}\,\varepsilon\cos(\omega t + \theta(\omega))$$

$$\mathcal{P}(t) = i_2(t)^2 R = \boxed{\frac{R\varepsilon^2}{R^2 + (\omega L)^2}}\cos^2(\omega t + \varphi(\omega))$$

≈50 W

Ejercicio 6.10: Puentes y equilibrios

10. Deducir las condiciones de equilibrio para el puente de Wien de la figura. En particular, si $C_1 = C_2$ y $R_1 = R_2$, hallar el cociente R_3/R_4 requerido para el equilibrio



Equilibrio ⇔ $I_D = 0$ ⇔ $V_{AB} = 0$

Puedo ignorar la rama con D (abierta) y resolver solo 2 corrientes de malla I_1 e I_2

Por simplicidad reemplazo C_2 y R_2 por Z

$$Z^{-1} = (R_2)^{-1} + j\omega C_2$$

1) $\varepsilon = R_3(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_1 - I_2) + R_1(I_1 - I_2)$

2) $0 = R_4 I_2 + Z I_2 + \underbrace{\boxed{R_3(I_2 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_1) + R_1(I_2 - I_1)}}_{-\varepsilon}$

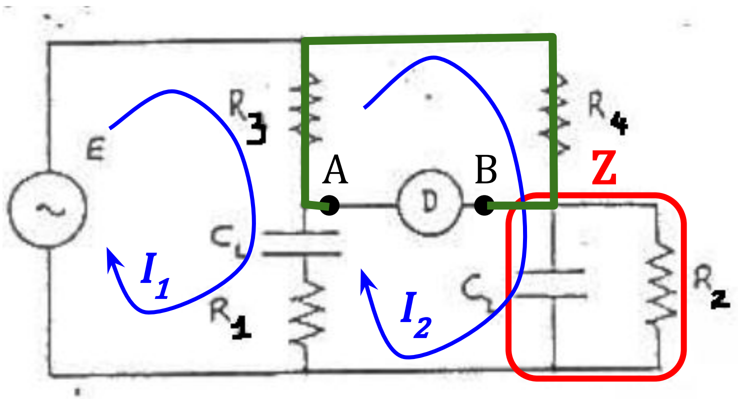
$$\boxed{I_1 = I_2 + \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3 + (j\omega C_1)^{-1}}}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\varepsilon}{R_4 + Z}}$$

Ejercicio 6.10: Puentes y equilibrios

$$\boxed{I_1 = I_2 + \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3 + (j\omega C_1)^{-1}}}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\varepsilon}{R_4 + Z}}$$



Falta $V_{AB} = 0$ para obtener la condición

$$0 = V_{AB} = -R_3(I_2 - I_1) - R_4 I_2$$

Y reemplazando sale:

$$\frac{R_3\varepsilon}{R_3 + R_1 + (j\omega C_1)^{-1}} = \frac{R_4\varepsilon}{R_4 + Z}$$

$$R_4\left(R_3 + R_1 + (j\omega C_1)^{-1}\right) = R_3\left(R_4 + Z\right)$$

$$R_4\left(R_1 + (j\omega C_1)^{-1}\right) = R_3 Z$$

$$\frac{R_1 + (j\omega C_1)^{-1}}{Z} = \frac{R_3}{R_4}$$

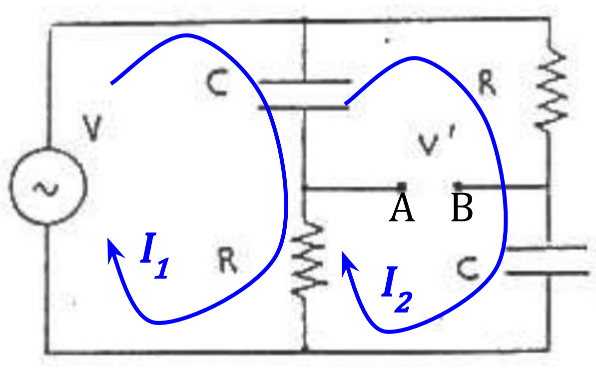
$$\frac{R_3}{R_4} = \left(R_1 + (j\omega C_1)^{-1}\right)\left(R_2^{-1} + j\omega C_2\right)$$

$$\frac{R_3}{R_4} = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) + j\boxed{\left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1}\right)}^{=0}$$

Igualando parte real e imaginaria salen 2 condiciones: amplitud y fase

Si $R_1=R_2=R$ y $C_1=C_2=C$, tenemos $R_3=2R_4$ y $\omega RC=1$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin



Para el circuito de la figura:

a) Hallar V' y mostrar que |V|=|V'|
b) Graficar la diferencia de fase entre V y V' en función de ω
c) Hallar el equivalente de Thevenin desde los bornes de V'

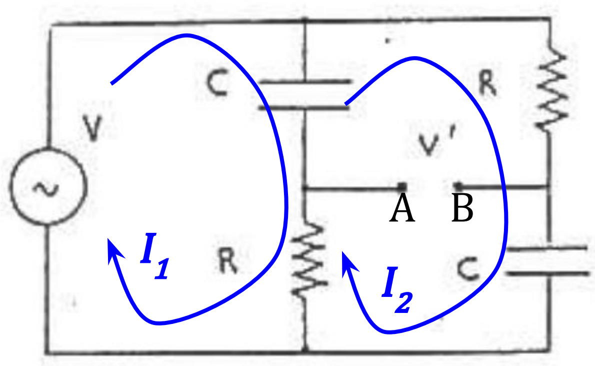
En (a), resolvemos las corrientes de malla I_1 e I_2 igual que para el 6.10 y sale

$$V - (I_1 - I_2)R - (I_1 - I_2)\frac{1}{j\omega C} = 0 \qquad I_1 = I_2 + \frac{V}{R + (j\omega C)^{-1}} = 2I_2$$

$$-I_2 R - I_2 \frac{1}{j\omega C} - (I_2 - I_1)R - (I_2 - I_1)\frac{1}{j\omega C} = 0 \qquad I_2 = \frac{V}{R + (j\omega C)^{-1}}$$

$$V' = V_{AB} = -(I_2 - I_1)\frac{1}{j\omega C} - I_2 R = I_2\left(\frac{1}{j\omega C} - R\right) = V\frac{(j\omega C)^{-1} - R}{(j\omega C)^{-1} + R} = V\frac{-Z^*}{Z} \Longrightarrow |V'| = |V|\left|\frac{-Z^*}{Z}\right| = |V|$$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin

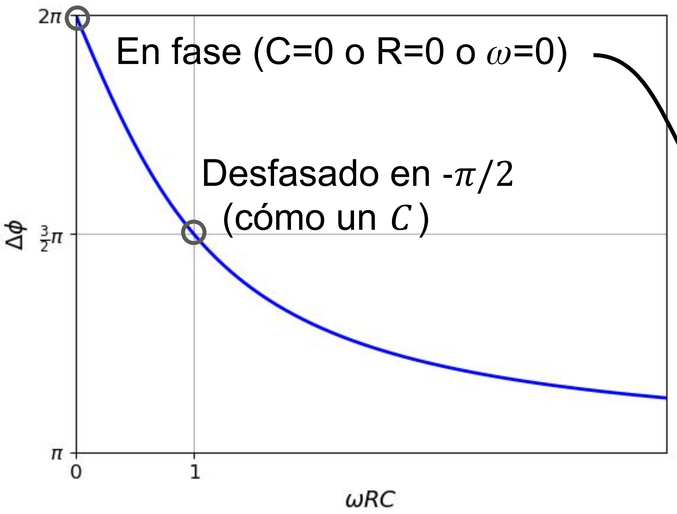


En (b), buscamos la diferencia de fase entre V y V', pero es igual a la diferencia de fase entre -Z* y Z

$$\frac{V'}{V} = \frac{-Z^*}{Z} = e^{j\Delta\phi} \Longrightarrow \Delta\phi = \phi(-1) + \phi(Z^*) - \phi(Z) = \pi - 2\phi(Z)$$

Con $Z = R + (j\omega C)^{-1} = R - j\dfrac{1}{\omega C} \Longrightarrow \phi(Z) = -\arctan\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)$

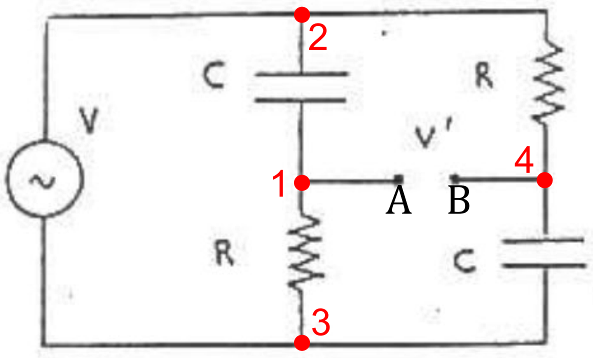
$$\boxed{\Delta\phi(\omega) = \pi + 2\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}$$



- Si C=0, no hay nada que introduzca desfasaje
- Si ω=0, estamos en corriente continua
- Si R=0, A y B están conectadas a la fuente

En contrafase: No le da tiempo al capacitor a cargarse/descargarse $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} \ll RC = \tau_{descarga}$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin

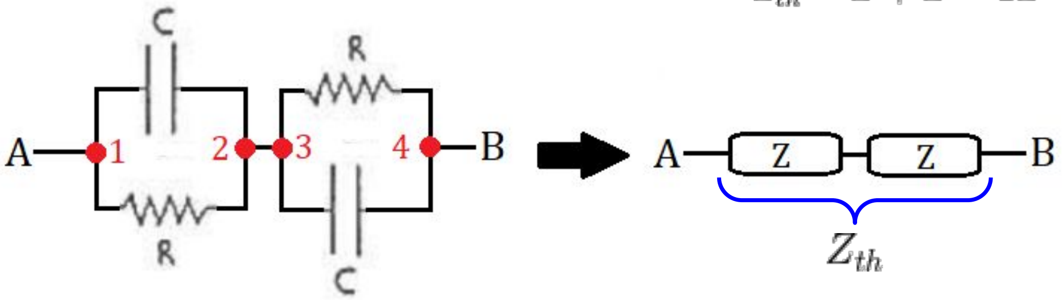


Para hacer Thevenin, es exactamente igual que en continua (ahora sumamos Z en lugar de R), así que ya tenemos la fuente compleja

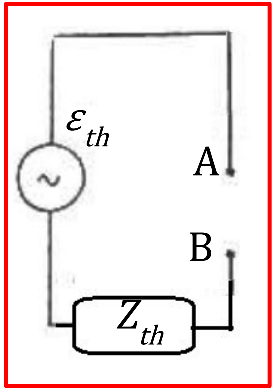
$$\varepsilon_{th} = V_{AB} = V e^{j\Delta\phi}$$

El sistema es fácil de reducir usando $Z^{-1}=R^{-1}+j\omega C$

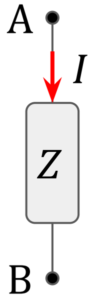
$$Z_{th} = Z + Z = 2Z = \frac{2R}{1 + j\omega RC}$$



Equivalente de Thevenin



Digresión: Sobre potencias y partes reales



Para calcular la potencia (*instantánea*) disipada en una impedancia Z, volvemos a la definición original

$$\mathcal{P}(t) = V_{AB}(t) i_{AB}(t)$$

Conociendo la amplitud compleja de la corriente I, la caída de potencial y corriente ***reales*** salen con

$$i_{AB}(t) = \mathrm{Re}(I e^{j\omega t}) = \frac{I e^{i\omega t} + I^* e^{-i\omega t}}{2}$$

$$V_{AB}(t) = \mathrm{Re}(Z I e^{j\omega t}) = \frac{Z I e^{i\omega t} + Z^* I^* e^{-i\omega t}}{2}$$

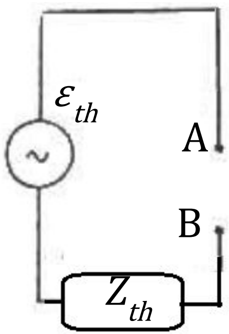
$$\mathcal{P}(t) = \frac{I e^{j\omega t} + I^* e^{-j\omega t}}{2} \frac{Z I e^{j\omega t} + Z^* I^* e^{-j\omega t}}{2} = \frac{1}{4}\left[Z I^2 e^{2j\omega t} + Z^* (I^*)^2 e^{-2j\omega t} + I Z^* I^* + I^* Z I\right]$$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{4}\left[2\mathrm{Re}(Z I^2 e^{j\omega t}) + (Z + Z^*)|I|^2\right] \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}(Z I^2 e^{j\omega t}) + \mathrm{Re}(Z)|I|^2\right]}$$

En general, nos interesa la potencia media, definida en un período cómo

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathcal{P}(t) = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[\mathrm{Re}(Z I^2 e^{j\omega t}) + \mathrm{Re}(Z)|I|^2\right] dt \Longrightarrow \boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(Z)|I|^2}$$

Thevenin: Teorema de máxima transferencia



Para un Thevenin arbitrario con ε_{th} y Z_{th} queremos la impedancia Z arbitraria que disipará la máxima potencia media

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$$
$$Z = R + jX$$

La corriente será $I = \dfrac{\varepsilon_{th}}{Z_{th} + Z}$

La potencia media disipada en Z es $\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\mathrm{Re}(Z)|I|^2}{2}$

Para este equivalente de Thevenin: $\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{R}{2}\dfrac{|\varepsilon_{th}|^2}{|Z_{th}+Z|^2} = \dfrac{|\varepsilon_{th}|^2}{2}\dfrac{R}{(R_{th}+R)^2 + (X_{th}+X)^2}$

Y lo maximizo

$$\frac{d}{dX}\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2 R(X+X_{th})}{\left[(R_{th}+R)^2+(X_{th}+X)^2\right]^2} = 0 \Longrightarrow X = -X_{th}$$

$$\frac{d}{dR}\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2}{2}\left[\frac{1}{(R_{th}+R)^2+(X_{th}+X)^2} - \frac{2R(R+R_{th})}{\left[(R_{th}+R)^2+(X_{th}+X)^2\right]^2}\right] = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2}{2}\frac{(R_{th}+R)^2 - 2R(R+R_{th})}{(R_{th}+R)^4} = 0 \Longrightarrow R = R_{th}$$

La potencia disipada es máxima para $Z = Z_{th}^*$