Física 3: Electricidad y Magnetismo

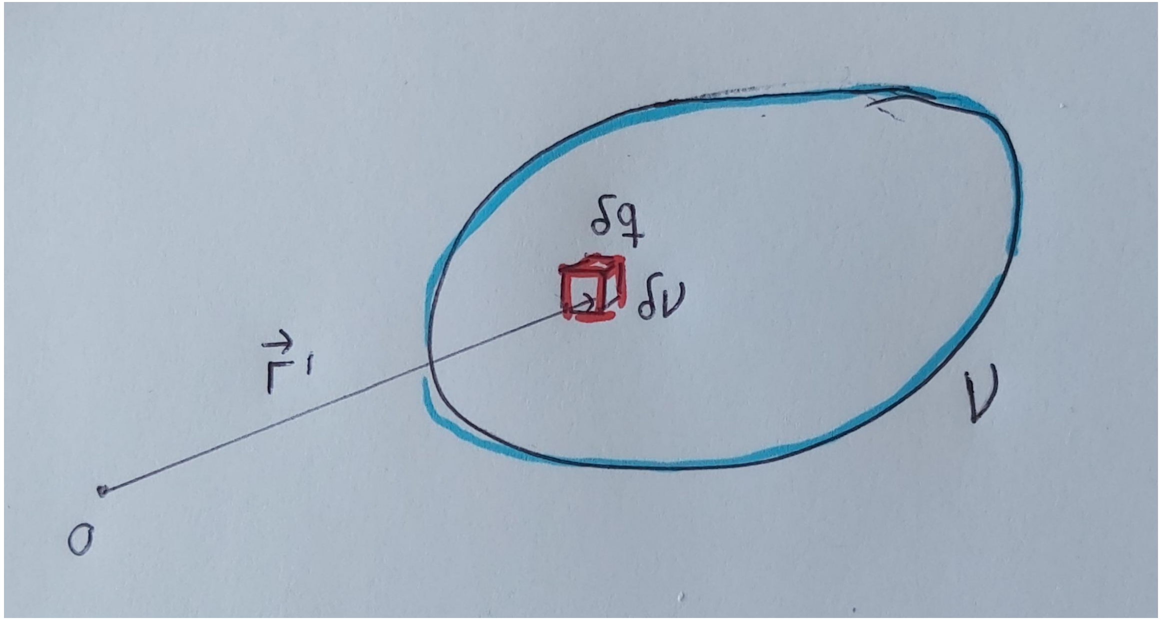
Pablo Dmitruk

Clase 2

Distribuciones continuas de cargas

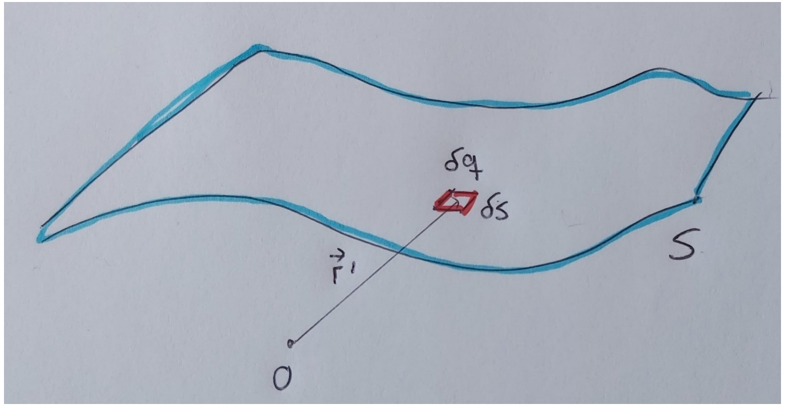
Definimos la densidad de carga (igual que con la densidad de masa).

En un volumen de carga



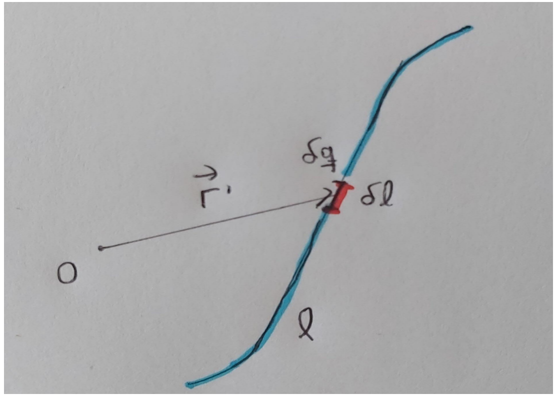
$$\rho(\overrightarrow{\mathbf{r}}') = \delta q / \delta \mathcal{V}$$

En una superficie de carga



$$\sigma(\overrightarrow{\mathbf{r}}') = \delta q/\delta \mathcal{S}$$

En una línea de carga



$$\lambda(\overrightarrow{\mathbf{r}}') = \delta q/\delta l$$

Haciendo la interpretación

$$q_i \to \delta q$$

$$\sum_i^N \to \int$$

el campo eléctrico queda:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N k\, q_i\, \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}_\mathrm{i}}'}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'_\mathrm{i}}|^3} \to \int k\, \delta q \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}|^3}$$

Y por lo tanto para cada tipo de distribución resulta,

En un volumen:
$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}'} k\, \rho(\overrightarrow{\mathbf{r}}') \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}|^3} d\mathcal{V}'$$

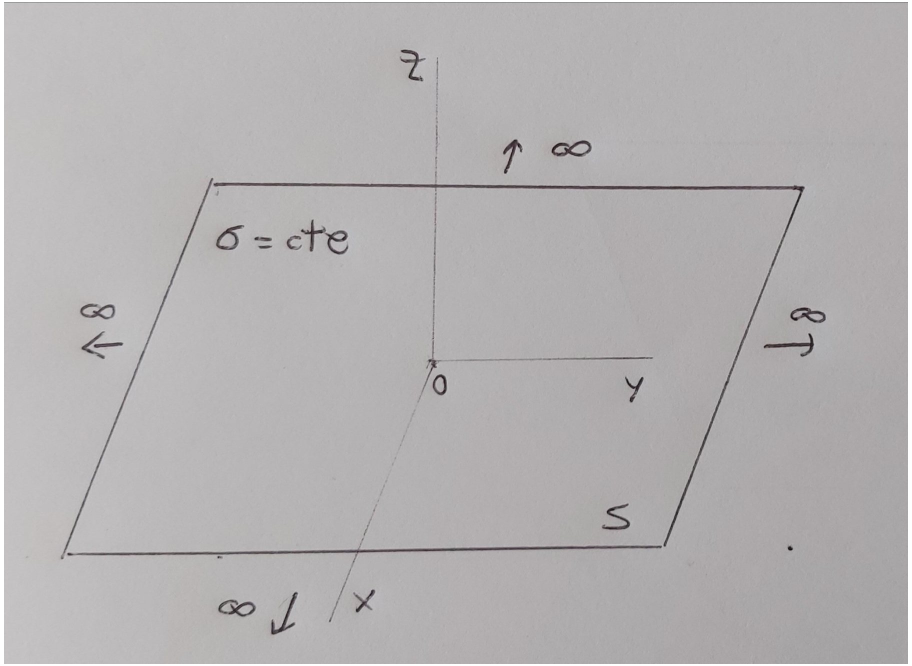
En una superficie:
$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{S}'} k\, \sigma(\overrightarrow{\mathbf{r}}') \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}|^3} d\mathcal{S}'$$

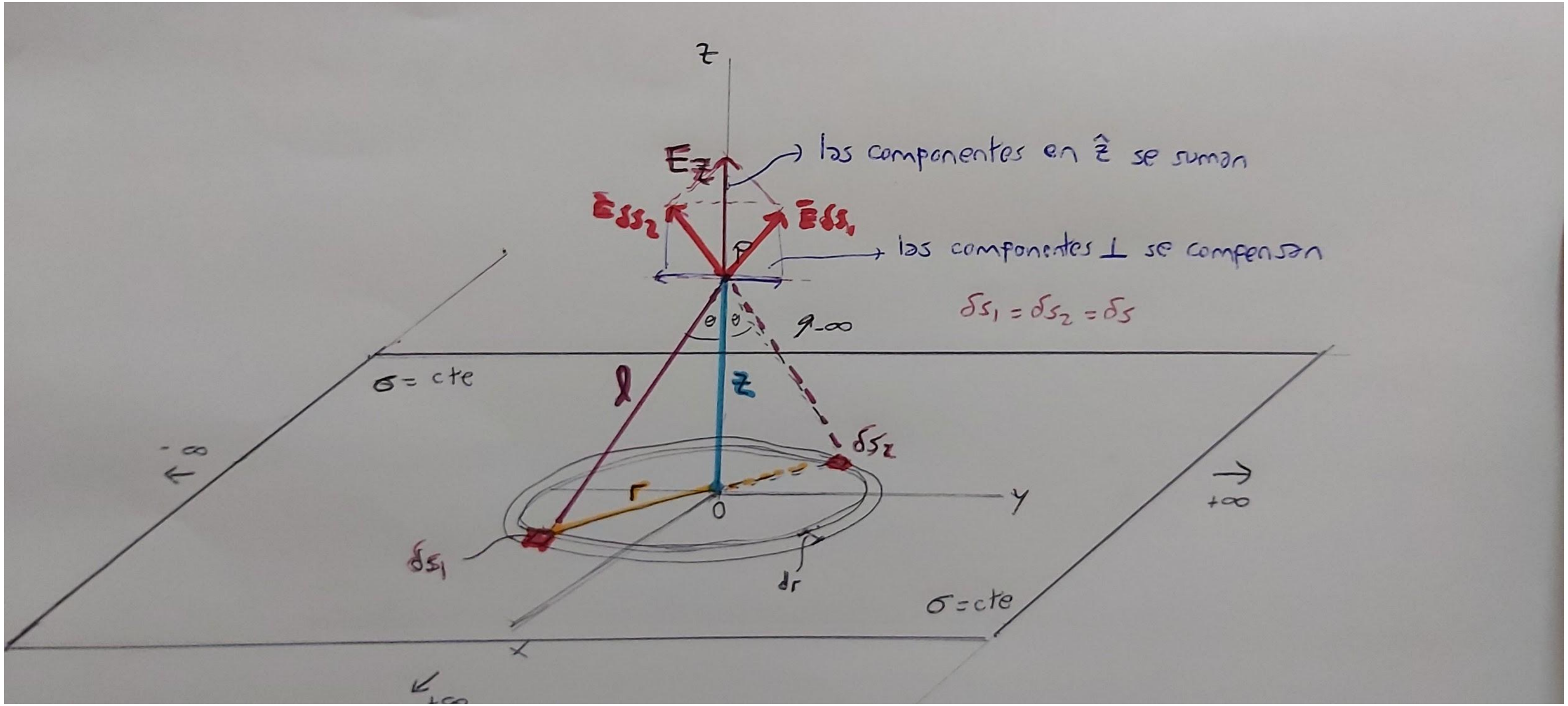
En una línea:
$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \int_{l'} k\, \lambda(\overrightarrow{\mathbf{r}}') \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'}|^3} dl'$$

Notar que se trata de integrales vectoriales, es decir, cada expresión involucra tres integrales (una para cada componente del campo) . Según sean en volumen, superficie o línea las integrales serán triples, dobles o simples respectivamente.

Vamos a calcular ahora el *campo eléctrico por integración directa* para una distribución de carga (usando algunos atajos para integrar más fácil).

El caso que consideramos es el de una distribución de carga en un plano infinito (elegimos el plano xy en z=0), con densidad de carga superficial $\sigma = cte$.





Si nos ubicamos en un punto P arbitrario a una altura z del plano cargado, consideremos el campo $\vec{\mathbf{E}}_{\delta S_1}$ generado por un diferencial de superficie δS_1 sobre el plano (esta superficie se encuentra a un radio r del punto O justo por debajo verticalmente del punto P). Existe otro diferencial de superficie opuesto δS_2 que genera un campo $\vec{\mathbf{E}}_{\delta S_2}$. Estos campos compensan sus componentes perpendiculares y suman sus componentes en z.

El módulo del campo generado por la carga en δS_1 es $E_{\delta S_1} = k\,\frac{\sigma\,\delta S}{l^2} = k\,\frac{\sigma\,\delta S}{(r^2+z^2)}$ y como dijimos las componentes perpendiculares al eje z (o sea paralelas al plano) se compensan con las del campo generado por la superficie radialmente opuesta δS_2, mientras que las componentes en z se suman. La componente en z del campo generado por una de las superficie resulta de multiplicar su módulo por $\cos(\theta) = \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$

$$E_{z\,\delta S} = k\sigma\frac{\delta S\; z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = k\sigma\frac{r\; d\varphi\; dr\; z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

y obtenemos la contribución de todas las superficies δS integrando (en ángulo 2π) en un anillo de radio r y espesor dr :

$$E_z^{anillo} = 2\pi k\sigma\frac{r\;z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr$$

Esto nos da la componente en z (la única que “sobrevive”) del campo generado por una distribución de carga superficial con densidad constante en un anillo de radio r y espesor dr. Para obtener el campo generado por todo el plano (infinito) podemos integrar sobre anillos concéntricos desde r=0 hasta r= ∞,

$$E_z = 2\pi k\sigma\int_0^{\infty}\frac{r\;z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr$$

Para hacer la integral introducimos un cambio de variables $r \rightarrow \alpha = r/z\,,\quad dr = z\,d\alpha$, luego:

$$E_z = 2\pi\,k\,\sigma \int_0^\infty \frac{r\,z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr = 2\pi\,k\,\sigma \int_0^\infty \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}d\alpha = 2\pi\,k\,\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

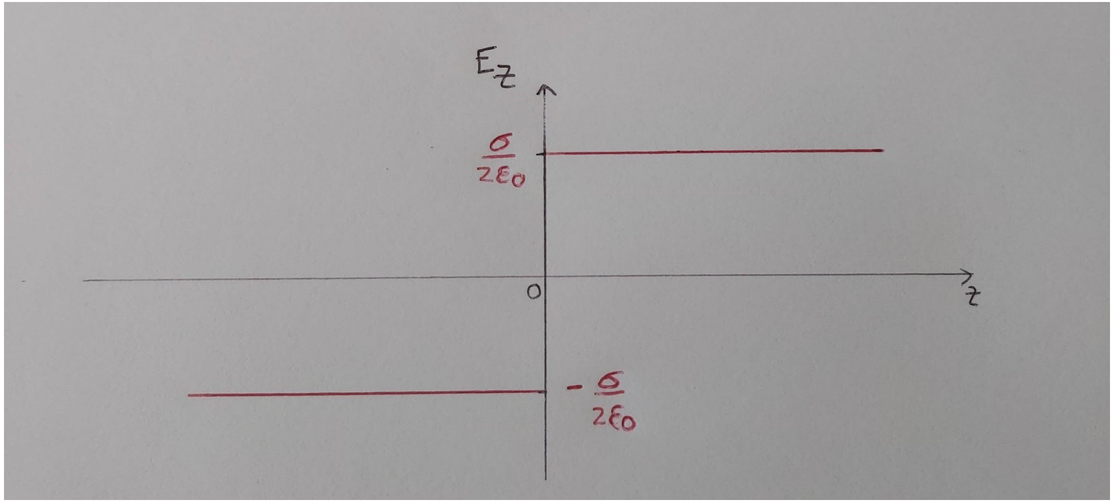
El campo entonces resulta ser constante (no importa cuan lejos estemos del plano !), es decir, no depende de z (ni de x ni de y, aunque eso lo podíamos ver por la simetría de la configuración de cargas).

La no dependencia con z no era algo intuitivo...amerita pensarlo un poco ---> hacerlo !

Hicimos la cuenta para un punto por arriba del plano cargado (en las z positivas). Podemos repetir el cálculo para un punto por debajo (en las z negativas) y lo que pasa es que allí apunta en sentido contrario (o sea hacia las z negativas si la densidad de carga es positiva), lo cual resulta de la definición de campo eléctrico (o sea, de la ley de Coulomb). El campo entonces nos queda:

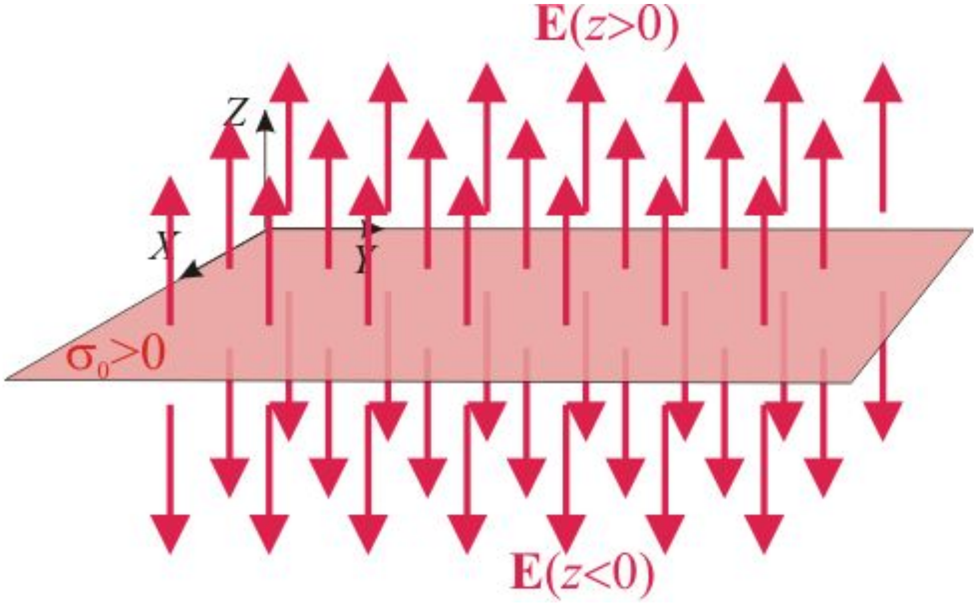
$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\,,\, si\ z > 0$$

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\,,\, si\ z < 0$$



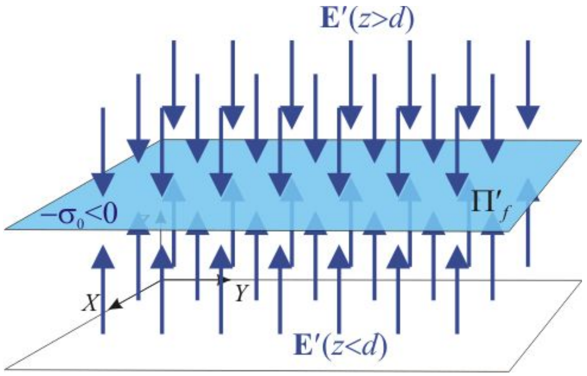
Notar que pega un salto (es discontinuo) en z=0. Eso es por que es un plano ideal, si tuviese espesor ("plano gordo") no ocurre.

Podemos representar gráficamente el campo eléctrico generado por el plano infinito y luce así:

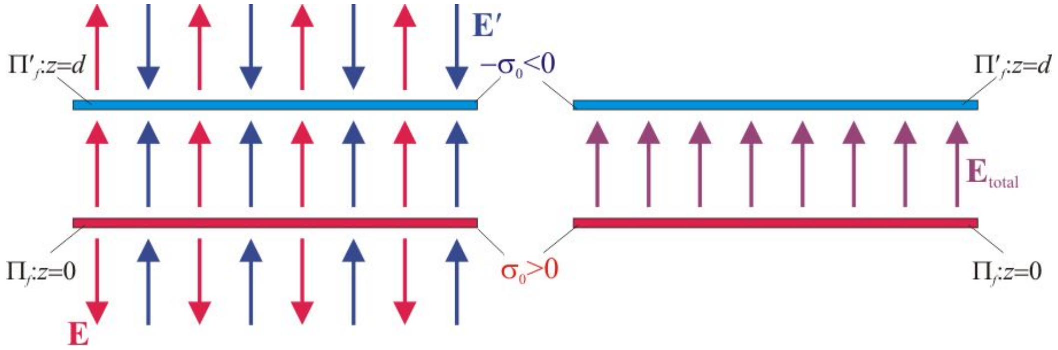


La intensidad del campo en cualquier punto del espacio es según lo que obtuvimos $\sigma/2\epsilon_0$.

Qué pasa si agregamos arriba otro plano infinito paralelo al anterior (a una distancia d) pero cargado con densidad opuesta $-\sigma$? Este plano genera un campo $\vec{\mathbf{E}'}$ (de igual intensidad que el anterior) así:



Para obtener el campo resultante total debido a los dos planos podemos aplicar superposición y resulta:



Es decir, el campo es no nulo (de valor σ/ϵ_0 uniforme) sólo en la región entre los planos.