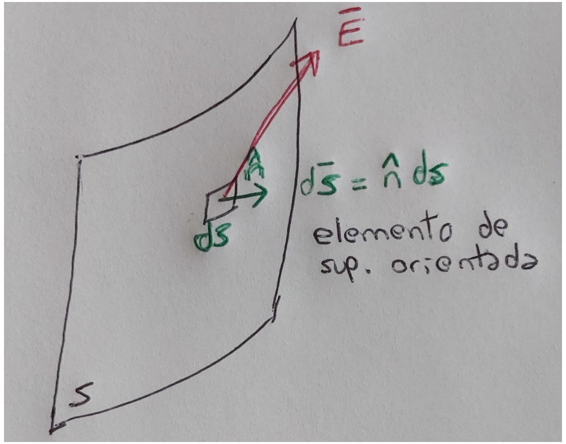
# Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 3

# Flujo de campo eléctrico

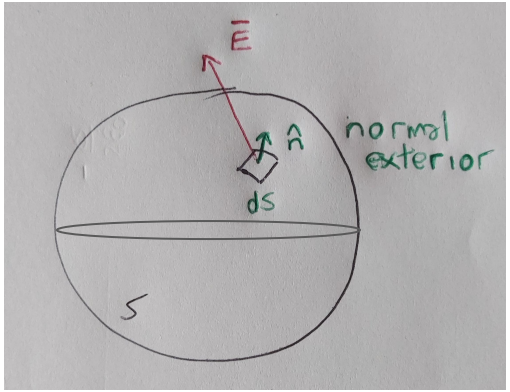
Definimos $$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \hat{n} d\mathcal{S}$$



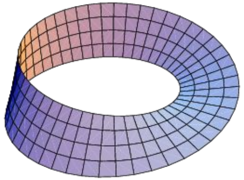

Nota: El flujo de partículas en un gas (lo van a ver en F4) es $\int_{\mathcal{S}} \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}\mathcal{S}}$ que me mide la masa que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

Si la superficie es cerrada $$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \hat{n} d\mathcal{S}$$

(*orientable*) con $\hat{n}$ la normal exterior.



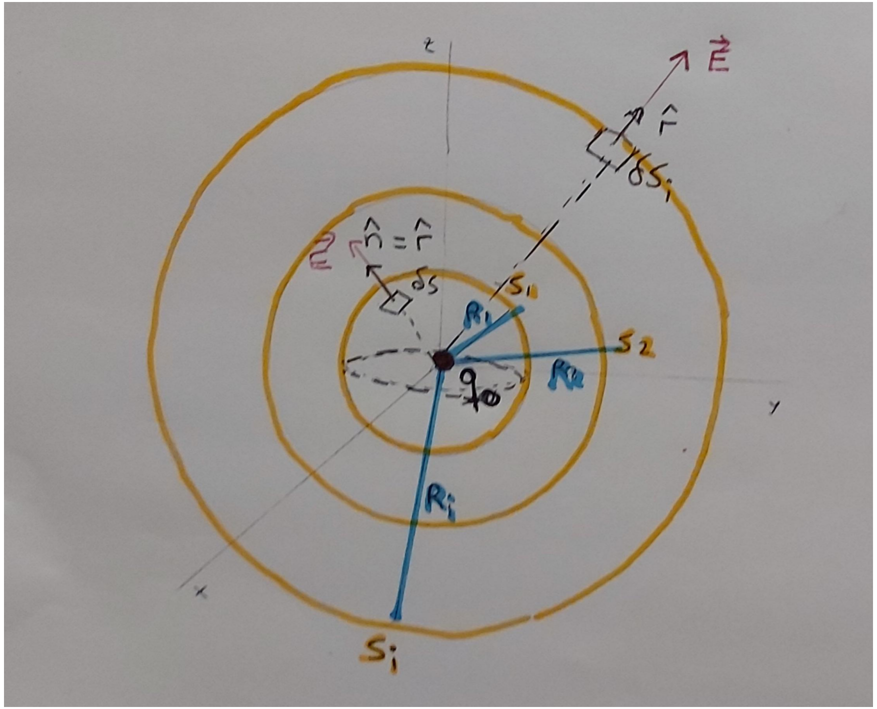

Banda de Möbius
(no orientable)



Vamos a calcular ahora el flujo del campo eléctrico generado por una carga puntual en el origen.

Recordemos como es el campo eléctrico en ese caso:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = k\, q_0\, \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}}{|\overrightarrow{\mathbf{r}}|^3} = k\, q_0\, \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$




Calculemos el flujo a través de superficies esféricas concéntricas, que indicamos por $S_1,\ S_2,\ ,S_i$ de radios $R_1,\ R_2,\ ,R_i$

$$\Phi_i = \oint_{S_i} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \hat{n}\, dS$$

usamos $\hat{n} = \hat{r}$

$$\Phi_i = \oint_{S_i} k\, q_0 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dS = \frac{k\, q_0}{r_i^2} \oint_{S_i} dS = \frac{k\, q_0}{r_i^2}\, S_i = \frac{k\, q_0}{r_i^2} 4\pi r_i^2$$

$$\Phi_i = 4\pi\, k\, q_0 = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

que es *independiente del radio de la esfera*.

Es clave en el anterior resultado que el campo eléctrico sea proporcional a la inversa de la distancia (radio en este caso) al cuadrado.

Utilizamos superficies esféricas porque era sencillo para calcular el flujo, pero resulta que si usamos *cualquier otra superficie que encierre a la carga* $q_0$ el flujo sigue dando $q_0/\epsilon_0$ independientemente de la superficie que utilicemos !

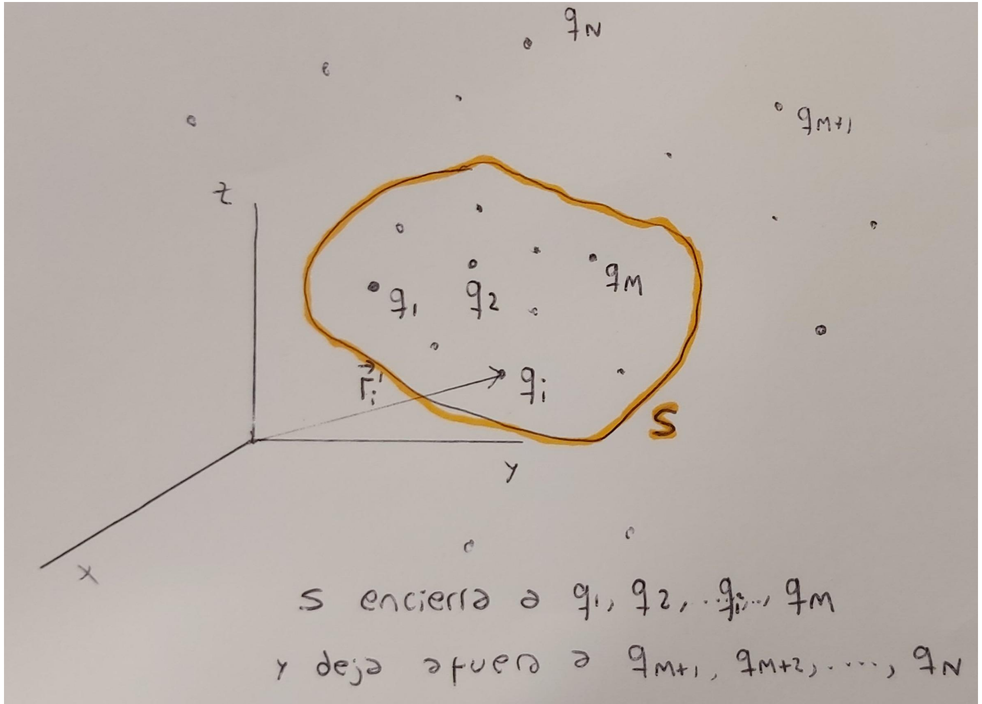
Si en cambio utilizamos una *superficie (cerrada) que no encierre a la carga* entonces el flujo da 0 (cero !).

Si ahora tenemos muchas cargas, podemos generalizar este resultado, utilizando el principio de superposición, y obtenemos que el flujo a través de una superficie cerrada será la sumatoria de las cargas encerradas dividido $\epsilon_0$ , resultado que se conoce como la *Ley de Gauss*.

# Ley de Gauss (1835)

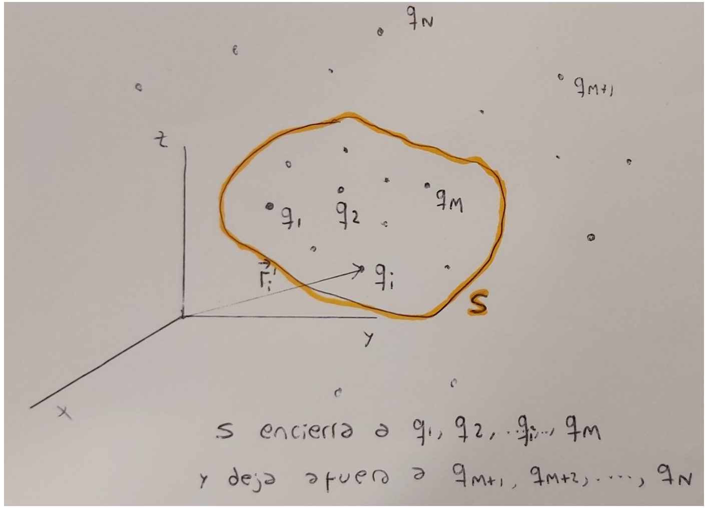
https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Supongamos tenemos N cargas puntuales $q_i$ con $i = 1, 2, 3, \ldots., N$ en posiciones $\vec{\mathbf{r}}'_{\mathbf{i}}$ y consideremos una superficie S que encierra a M de esas cargas $q_1, q_2, \cdot \cdot, q_M$ y deja afuera a las restantes $q_{M+1}, \cdot \cdot \cdot \cdot, q_N$ .



El campo eléctrico en cualquier punto del espacio es:

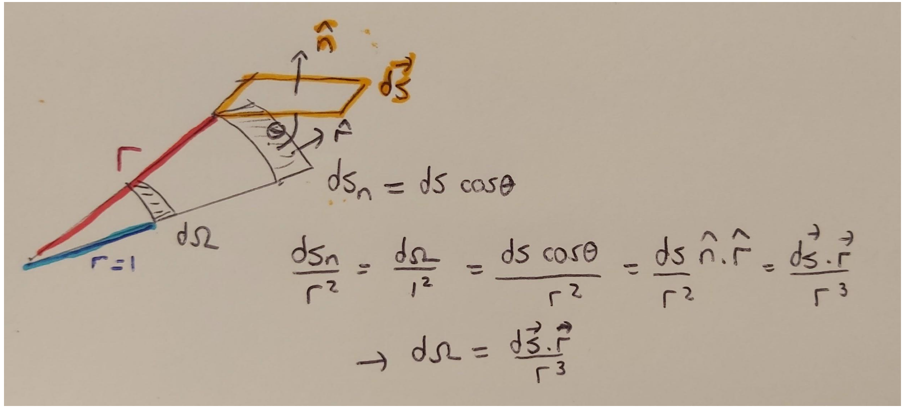
$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i\, \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r_i}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}'|^3}$$




Calculemos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie S

$$\Phi = \oint_s \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \oint_S \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r_i}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}'|^3} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \oint_S d\Omega_i$$

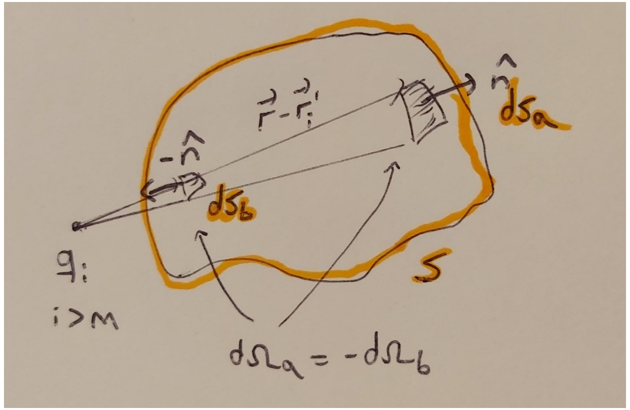
donde $d\Omega_i = \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r_i}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}'|^3} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$ es el




*diferencial de ángulo sólido* con centro en $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}'$

Si S *encierra* a $q_i$ , $\oint_S \frac{(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_i}'})}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'_i}|^3} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \oint_S d\Omega_i = 4\pi$

si $q_i$ está *afuera* de S $\oint_S \frac{(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_i}'})}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}'_i}|^3} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \oint_S d\Omega_i = 0$

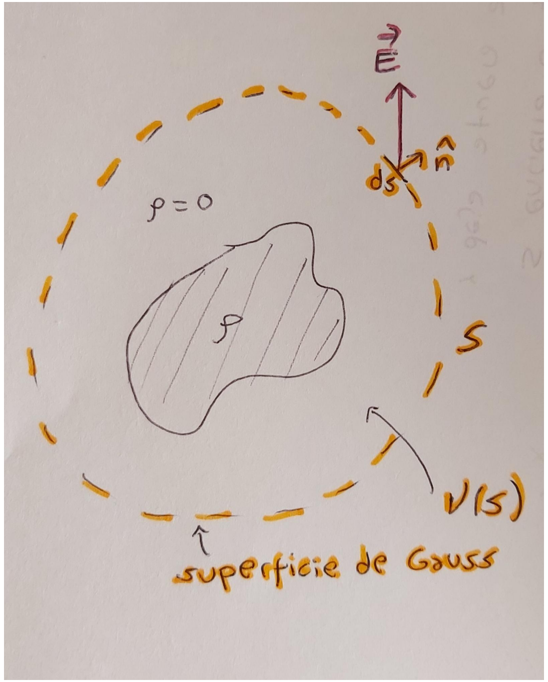


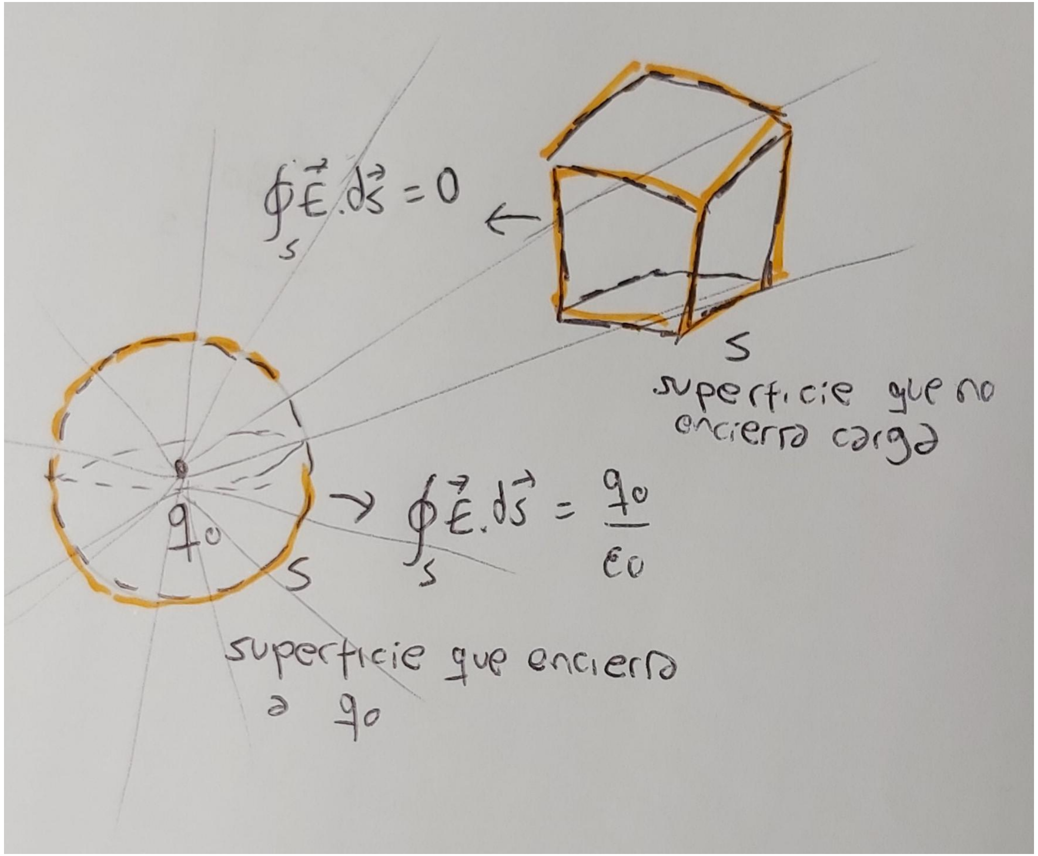

$$\rightarrow \Phi = \oint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \oint_S d\Omega_i = \sum_{i=1}^{M} k\, q_i\, 4\pi = 4\pi k \sum_{i=1}^{M} q_i = 4\pi k\, Q_{enc}(S) = \frac{Q_{enc}(S)}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \frac{Q_{enc}(S)}{\epsilon_0}$$

Vale también para distribuciones continuas de carga, y en ese caso $Q_{enc}(S) = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \rho \, d\mathcal{V}$ con $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ el volumen encerrado por S.

$$\oint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \frac{Q_{enc}(S)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \rho \, d\mathcal{V}$$






En la superficie que no encierra carga el flujo entrante es igual al saliente y el flujo neto es 0.

En la superficie que encierra carga hay un flujo neto saliente (si la carga es positiva)

Más observaciones:

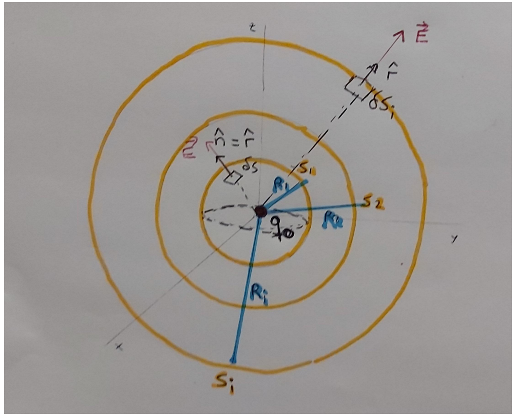
- Obtuvimos la Ley de Gauss como consecuencia de la Ley de Coulomb. *Usamos esencialmente la ley de la inversa con el cuadrado de la distancia y superposición*.

- Vale para otros campos que cumplan estas 2 propiedades ---> campo gravitatorio . De hecho Newton la demostró (sin usar cálculo diferencial !), pero mucho más laboriosamente, con geometría (Gauss llegó 200 años después).

- La ley de Coulomb nos da el campo dadas las cargas (fuentes). Con la ley de Gauss podemos obtener la carga en una región si conocemos el campo (en el borde de esa región !).

- La ley de Gauss sigue siendo válida con cargas móviles (campo eléctrico en general, no electrostático), si bien no es la demostración que vimos aquí partiendo de la ley de Coulomb.

# Gauss $\rightarrow$ Coulomb




Supongamos una carga puntual $q_0$ en el origen

*Por simetría* $\quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$

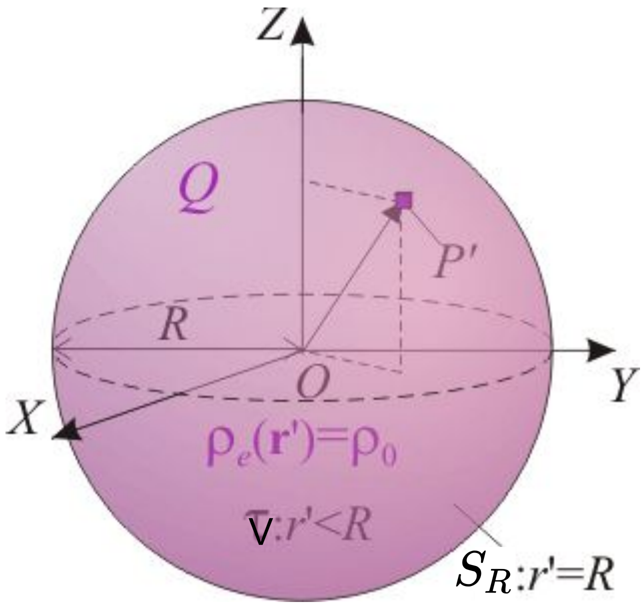
Tomo como *superficie de Gauss* una superficie esférica de radio r

$$\oint_{S_r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q_{enc}(S_r)}{\epsilon_0}$$

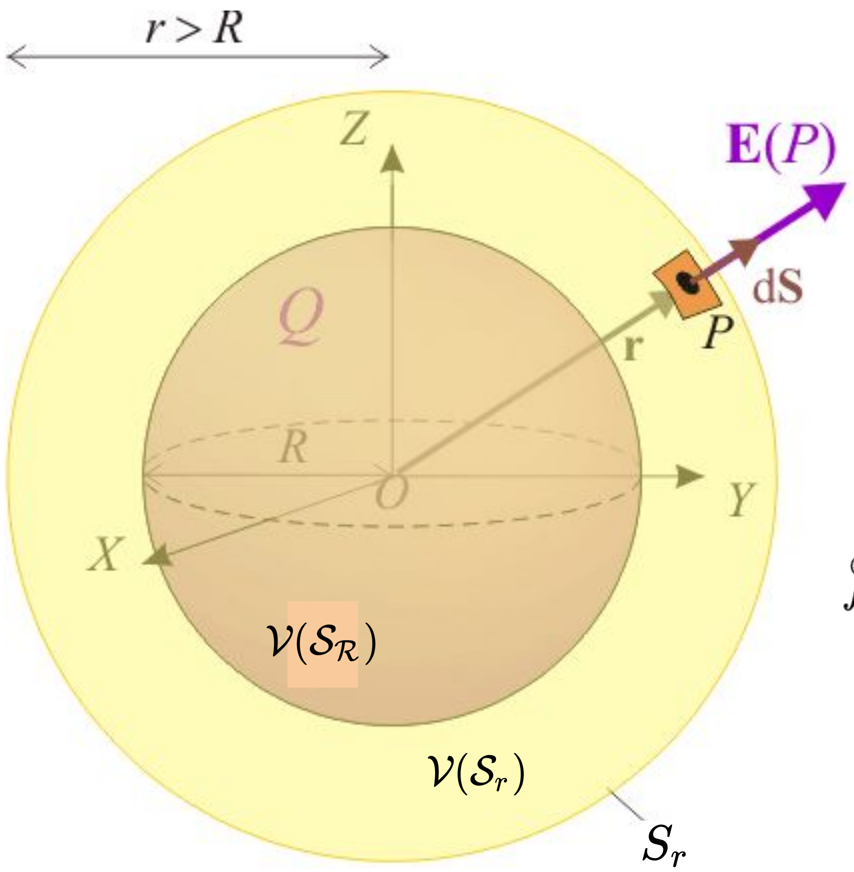
$$\oint_{S_r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \oint_{S_r} E(r)\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = E(r) \oint_{S_r} dS = E(r)\,4\pi r^2$$

$$\frac{Q_{enc}(S_r)}{\epsilon_0} = \frac{q_0}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow E(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} = k\frac{q_0}{r^2} \qquad \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = k\frac{q_0}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Veamos otro ejemplo de aplicación de la Ley de Gauss: esfera de radio R, uniformemente cargada con densidad de carga $\rho_0$ . La carga total en la esfera es $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$




Usamos consideraciones de simetría para calcular el campo eléctrico.




Sabiendo por las simetrías que el campo es radial, nos conviene tomar *superficies de Gauss esféricas* para calcularlo.

Consideremos una posición P a distancia $r > R$

Tomamos una superficie esférica de radio $r$, $S_r$ y aplicamos Gauss,

$$\oint_{S_r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q_{enc}(S_r)}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \oint_{S_r} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r}\, dS = E(r) \oint_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

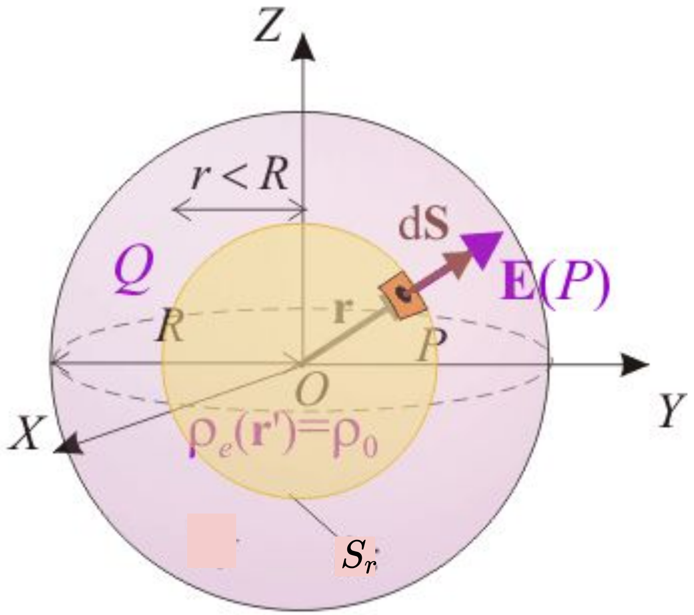
$$Q_{enc}(S_r) = Q \quad \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Esto nos indica que el campo para distancias r > R es como el de una *carga puntual de valor Q*.

Ahora consideremos un punto P a distancia r < R y tomemos nuevamente una *superficie de Gauss esférica* de radio r, $S_r$.

$$\oint_{S_r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \oint_{S_r} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r}\, dS = E(r) \oint_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

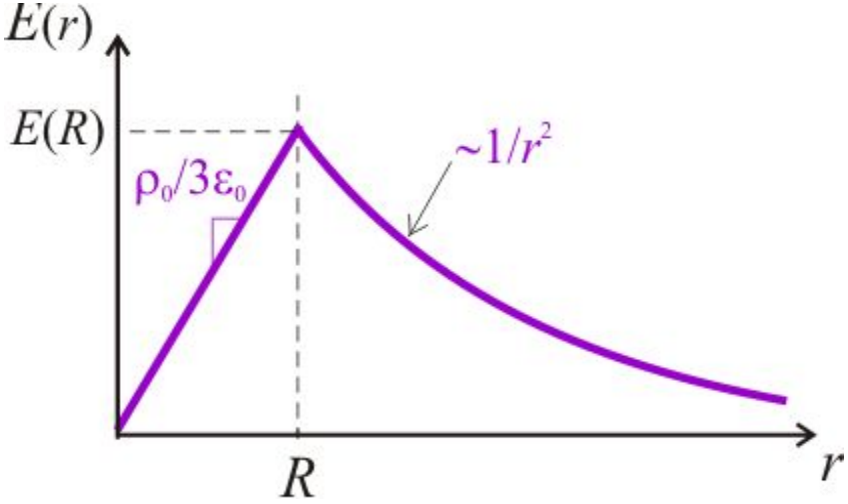
$$Q_{enc}(S_r) = \int_{\mathcal{V}(S_r)} \rho_0\, d\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = \mathcal{Q}\frac{r^3}{\mathcal{R}^3}$$




Igualando por Gauss,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q\, r^3}{\epsilon_0\, R^3} \;\rightarrow\; E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\, r$$

Es decir que el campo para r < R es lineal en r.




$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\, r \quad si \quad r < R$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 \; R^3}{3\epsilon_0 \; r^2} \quad si \quad r > R$$

Notar que el campo es continuo en r=R y tiende al valor $E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0 \; R}{3\epsilon_0}$ por ambos lados.

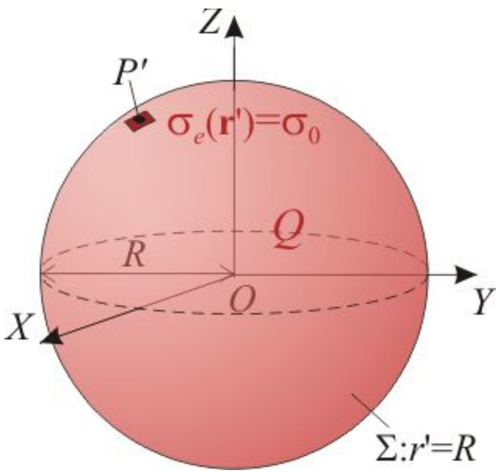
Notar también que el campo tiende a 0 cuando r tiende a 0.

*Para r < R la dependencia lineal con r del campo implica dependencia lineal con r de la fuerza que sentiría una carga de prueba q y si suponemos Q > 0 y q < 0 esa fuerza sería atractiva.*

Modelo atómico: núcleo con carga Q > 0 y electrón con carga q < 0 se ve atraído por una fuerza lineal con la distancia, como si hubiese un resorte (ley de Hooke de F1 !) → Esto nos da *oscilaciones del electrón en el átomo !* → https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B3mico_de_Thomson

(modelo atómico de Thomson: “budín de pasas”, luego siguieron Rutherford, Bohr...)

# Caso esfera cargada solamente en su superficie, con densidad de carga $\sigma_0$ = cte




Aplicamos Gauss igual que en el caso previo y obtenemos que para r > R queda igual que antes el campo de una carga puntual de valor Q en el origen, pero para el interior de la esfera r < R, si hacemos lo mismo que antes no obtenemos carga encerrada, entonces en ese caso queda $E(r) = 0$ !!

*O sea, el campo es nulo en cualquier punto interior de una esfera cargada uniformemente en su superficie.*

Esto es consecuencia de la ley de fuerza inversamente al cuadrado de la distancia.

# Forma diferencial o local de la Ley de Gauss

Aplicamos un conocido teorema de Mate 3 (también debido a Gauss !), que recordarán haber visto como el Teorema de la Divergencia el cual dice:

Si $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ es un campo vectorial "*bueno*" entonces vale $\oint_S \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}\, d\mathcal{V}$

donde S es una superficie cerrada, $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ es el volumen encerrado por S y $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \mathrm{div}(\vec{\mathbf{A}})$

es la divergencia del campo vectorial $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$.

La divergencia es un *operador vectorial*, en este caso es una campo escalar y en cartesianas su expresión es:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Campo "*bueno*" = $C^1$
con derivadas continuas.

Lo aplicamos entonces para el campo eléctrico, $\oint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\mathcal{V}$

y como por la ley de Gauss $\oint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \frac{Q_{enc}(S)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \rho\, d\mathcal{V}$

$$\rightarrow \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \frac{\rho}{\epsilon_0}\, d\mathcal{V}$$

y como esto vale para cualquier volumen $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ (o bien tomamos un volumen muy pequeño y aproximamos la integral de volumen por el valor del integrando multiplicado por el elemento de volumen)

$$\rightarrow \nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Lo que se conoce como *forma local o diferencial de la Ley de Gauss* (y es la primera de las ecuaciones de Maxwell que vemos). (discutir ley local vs ley integral)

$$\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

propiedad local del campo