Física 3: Electricidad y Magnetismo

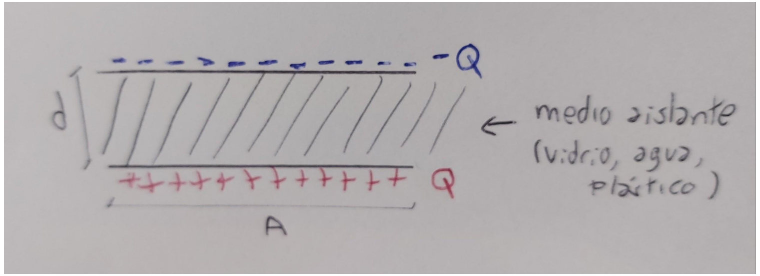
Pablo Dmitruk

Clase 9

Dieléctricos (o aisladores)

Consideramos ahora medios materiales donde *los electrones no son libres de moverse* → aislantes

Experimento: ponemos un medio aislante entre 2 placas cargadas



Se observa que la capacidad C aumenta

Recordemos que en vacío (sin aislante entre las placas) $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

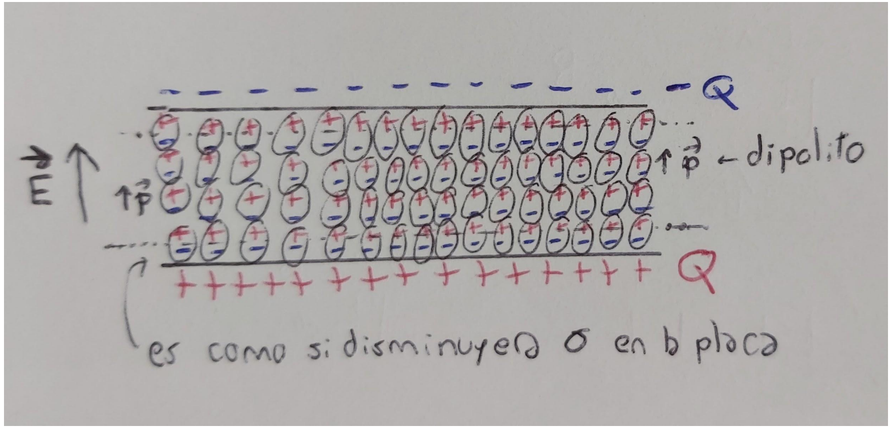
Definimos $\kappa = C/C_0$ la constante dieléctrica o coeficiente dieléctrico del medio aislante

Material	Constante Dieléctrica (k)
Vacío	1
Aire	1.00059
Polipropileno	2.2
Poliestireno	2.6
Policarbonato	2.8
Poliéster	3.3
Papel	3.5
Aceite de transformadores	4.5
Vidrio pyrex	4.7
Mica	5.4
Porcelana	6.5
Silicio	12
Agua	80.4
Cerámica de titanio	130
Titanato de estroncio	310

Como Q = C V, si Q no cambió pero C aumentó entonces tiene que disminuir la diferencia de potencial V,

o sea, *tiene que haber disminuido el campo eléctrico* E → Por qué ?

Pensemos que en el aislante entre las placas hay moléculas, que si bien son neutras, actúan como un dipolito que cuando hay un campo eléctrico tiende a alinearse paralelo al campo

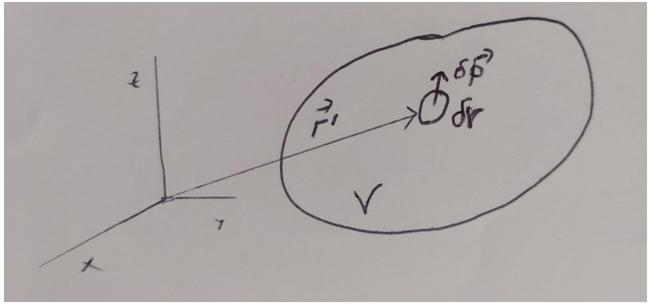


El efecto es como si disminuyera el valor de la densidad de carga σ en las placas,

y por lo tanto disminuye el valor del campo eléctrico $E = \sigma/\epsilon_0$

Otra forma de pensarlo es que los dipolitos alineados generan un campo eléctrico, que además tiende a oponerse al campo eléctrico que los indujo a alinearse, haciendo disminuir el campo eléctrico efectivo total (de ahí viene el nombre de dieléctrico).

Vamos a generalizar esta idea de que en el medio material hay una distribución de dipolos, que reacciona ante los campos aplicados y a su vez genera un nuevo campo que modifica el inicial.



En el medio material de volumen $\mathcal{V}$ definimos la densidad de momento dipolar o polarización

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}') = \frac{\delta\vec{\mathbf{p}}}{\delta\mathcal{V}}$$

Es decir, pensamos que en el dieléctrico en cada elemento de volumen hay un momento dipolar dado por

$$\delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\,\delta\mathcal{V}$$

El potencial que genera ese dipolo es $V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) = k\dfrac{\delta\vec{\mathbf{p}}\cdot(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3} = k\dfrac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\delta\mathcal{V}'\cdot(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}$

Integrando en todo el volumen del dieléctrico, $V(\vec{\mathbf{r}}) = \displaystyle\int_{\mathcal{V}} k\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\cdot(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}d\mathcal{V}'$

Usamos $\dfrac{(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\nabla}'\left(\dfrac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right)$ y la identidad vectorial $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right) = \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right) + \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')$$

Reemplazamos en la integral del potencial,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} k\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\cdot(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}} k\,\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right)d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}} k\,\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right)d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} k\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}d\mathcal{V}'$$

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} k\, \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} k\, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{V}'$$

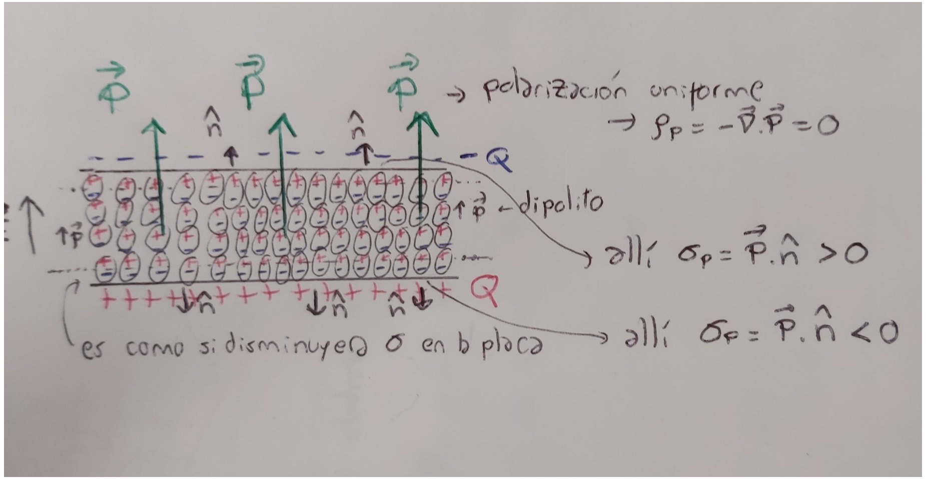
Usamos teo. div. para la primer integral: $\int_{\mathcal{V}} k \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}' = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} k \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \cdot \vec{\mathbf{dS}}' = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} k\, \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{S}'$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{\mathbf{r}}) = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} k \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{S}' - \int_{\mathcal{V}} k\, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{V}'$$

Recordemos que el potencial de una distribución de carga en superficie en general es: $V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{S}} k\, \frac{\sigma\, d\mathcal{S}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$

y para una distribución de carga en volumen: $V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} k\, \frac{\rho\, d\mathcal{V}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$

Vemos entonces que el potencial debido a la polarización es equivalente al que producirían una distribución superficial de carga, $\sigma_P = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y una distribución de carga en volumen, $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$



Interpretación de la densidad de carga de polarización

Comprobamos además, que la polarización no introduce carga neta, ya que:

$$Q_{tot} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \sigma_P \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho_P \, d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} \, d\mathcal{V} = 0 \quad , \ \text{por teo. div.}$$

El problema con que uno se encuentra en general es que no conoce la polarización, que además depende del campo eléctrico $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{E}})$

Vamos a suponer *medios lineales, isótropos y homogéneos (LIH)*, en los cuales

$\boxed{\vec{\mathbf{P}} = \chi\, \epsilon_0\, \vec{\mathbf{E}}}$, con χ la *susceptibilidad eléctrica* = constante.

Si el campo eléctrico E es muy grande, el dieléctrico puede "romperse" y hacerse conductor, y al valor de campo eléctrico lo llamamos *rigidez dieléctrica*.

→ para el aire a 1 atm, $E \approx 3\ 10^6 V/m$

Ley de Gauss en medios materiales

Supongamos una región de volumen $\mathcal{V}$ encerrada por una superficie $\mathcal{S}(\mathcal{V})$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{d\mathcal{S}} = \frac{Q_{enc}(S)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} (\rho_L + \rho_P) \, d\mathcal{V}$$

con ρ_L la densidad de cargas libres y ρ_P la densidad de cargas de polarización.

Reemplazamos $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$ $\Rightarrow \oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho_L \, d\mathcal{V} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} \, d\mathcal{V} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho_L \, d\mathcal{V} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\epsilon_0} \right) \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q_L}{\epsilon_0}$$

Definimos el vector desplazamiento eléctrico $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = Q_L}$

y usando el teo. div. obtenemos la versión local o diferencial $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L$

Notar que, si conocemos la distribución de cargas libres, con esta versión de la ley de Gauss

podríamos obtener el vector desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ y, si conocemos la relación entre $\vec{\mathbf{P}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$,

de la ecuación $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$ podemos obtener el campo eléctrico.

Para el caso particular de medios LIH vimos que $\vec{\mathbf{P}} = \chi\, \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$

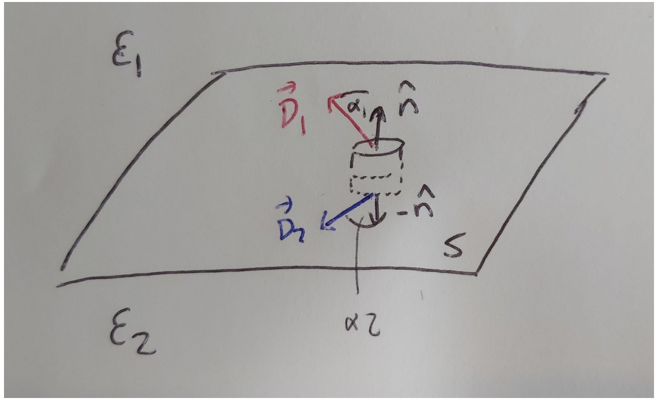
$\Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}(1+\chi) = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$, con $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$ la *permitividad eléctrica* del medio material

(en vacío $\vec{\mathbf{P}} = 0 \to \chi = 0 \to \epsilon = \epsilon_0$)

De la ley general $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_L$ si además el medio es LIH $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho_L}{\epsilon}$

y es como los problemas que vimos antes, cambiando ϵ_0 por ϵ (por ej. $C_{plano} = \dfrac{\epsilon A}{d}$)

Condiciones de contorno (empalme) entre dos medios



Sup. S tiene densidad de cargas libres σ_L

Usando un cilindrito de Gauss,

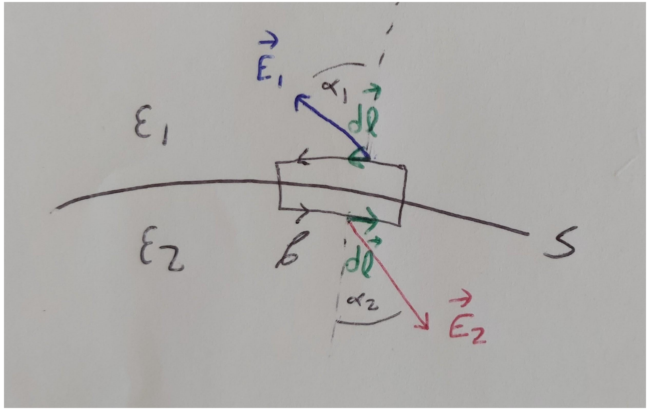
$$[\vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{D}}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})]\delta S = \sigma_L \delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_L$$

Si no hay densidad de carga libre en la superficie S, $D_{1n} = D_{2n}$

$$\Rightarrow D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2$$

y si los medios son LIH, $\epsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \epsilon_2 E_2 \cos\alpha_2$



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = 0 = \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{dl}} + \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot (-\vec{\mathbf{dl}}) = E_{1t} - E_{2t}$$

$$\Rightarrow \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

Si los medios son LIH, $\dfrac{D_1}{\epsilon_1}\sin\alpha_1 = \dfrac{D_2}{\epsilon_2}\sin\alpha_2$

Si no hay σ_L en S, y los medios son LIH, $\dfrac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \equiv \dfrac{n_1}{n_2}$ (como la ley de Snell)